RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE VITALI

Sulle derivazioni covarianti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 3 (1932), p. 16-27

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__16_0>

SULLE DERIVAZIONI COVARIANTI

Conferenze di GIUSEPPE VITALI, raccolte dalla Sig.[na] ANGELINA FOSCHI

Sunto. — *L'A. dà una definizione di derivazione covariante che comprende la derivazione del* RICCI *e le sue estensioni del calcolo assoluto generalizzato e quella che si può costruire coll'ausilio di n covarianti semplici indipendenti, recentemente usati dall'* EINSTEIN *nella costruzione della sua « Einheitliche Feldtheorie ».*

Nel Calcolo Differenziale Assoluto si considerano due tipi di derivazione covariante. Le derivazioni di un tipo (che dirò del primo tipo) si costruiscono col concorso di elementi forniti dagli intorni dei vari ordini di una varietà (1); quelle del secondo tipo si costruiscono coll'ausilio di un n–upla ortogonale tangente alla varietà (2).

(1) Questo tipo di derivazione è quello che si affacciò per la prima volta in un lavoro di CHRISTOFFEL – *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, Crelle's Journal, Band LXX, 1869 che poi costituì la principale operazione del Calcolo Differenziale Assoluto del RICCI, e le cui estensioni sono descritte nei miei due recenti lavori: A) *Geometria nello spazio hilbertiano* [Bologna N. Zanichelli 1929]; B) *Nuovi contributi alla nozione di derivazione covariante* con appendici di G. ALIPRANDI – R. BALDONI – M. LICENI – I. SACILOTTO [Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova. Anno I. N. 1, 2].

(2) Questo secondo tipo di derivazione covariante fu quasi contemporaneamente descritto da me e da WEITZENBÖCK ed ultimamente da A. EINSTEIN.

R. WEITZENBÖCK – *Invariantentheorie* [P. Noordhoff. 1923].

C) G VITALI – *Una derivazione covariante formata coll'ausilio di n sistemi covarianti del 1° ordine* [Atti della Società Ligustica di Sc. e Lett. 1924].

A. EINSTEIN – *Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Begriffes des Fernparallelismus* [Berliner Ak. der Wissenschaften 1928].

Malgrado la differenza della loro struttura e quella della loro proprietà, questi due tipi di derivazione si possono considerare come casi particolari di una medesima operazione.

Questo io ho mostrato in alcune mie Conferenze di Analisi Superiore nella R. Università di Bologna, conferenze che qui pubblico nella forma in cui furono raccolte e redatte dalla sig. ANGELINA FOSCHI.

§ I.

1. Siano

$$(1) \qquad u_1, u_2, \ldots, u_n$$

n variabili continue. Sia ν un intero maggiore di zero, e si consideri un sistema di 0_ν parametri (3).

$$(2) \qquad \varphi_\alpha(t;\, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \varphi_\alpha(t) = \varphi_\alpha,$$

corrispondenti agli stati di un indice α variante nella classe ν (4), funzioni a quadrato sommabile della solita variabile t in un aggregato misurabile g e anche delle variabili (1).

Supponiamo che le (2) siano fra loro linearmente indipendenti.

Supponiamo inoltre che per una sostituzione invertibile sulle (1) il sistema delle (2) varii come un covariante semplice di indice α.

Poniamo

$$(3) \qquad a_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha(t) \times \varphi_\beta(t) \quad (5).$$

Sia μ un intero $\leq \nu$, ed indichiamo con a_μ il determinante che ha per elementi gli $a_{\alpha,\beta}$ con α e β varianti nella classe μ,

(3) . A) pag. 87 e 172.
(4) . A) pag. 155.
(5) Qui, conformemente a quanto è convenuto in B), § 1, N. 1,

$$\varphi_\alpha(t) \times \varphi_\beta(t) = \int_g \varphi_\alpha(t) \cdot \varphi_\beta(t)\, dt\,.$$

l' indice α essendo costante in ogni riga e l' indice β essendo costante in ogni colonna, e gli indici delle righe e quelli delle colonne succedentisi nello stesso ordine.

Per la lineare indipendenza delle φ_α i determinanti $\underset{\mu}{a}$ sono diversi da zero.

Indicheremo con $\underset{\mu}{a}^{\alpha,\beta}$ il reciproco di $a_{\alpha,\beta}$ nel determinante $\underset{\mu}{a}$. Per le proprietà dei determinanti reciproci si ha subito

$$\Sigma_\gamma \underset{\mu}{a}^{\beta,\gamma} . a^{\alpha,\gamma} = \delta_\alpha^\beta \quad (^6) , \tag{4}$$

la sommatoria essendo estesa al variare di γ nella classe μ.

2. Consideriamo ora un sistema

$$H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}$$

in cui ogni indice od apice è di classe $\leq \nu$.

Diremo che si è eseguita su H la *reciprocità secondo il sistema* (2) *rispetto all'indice* α_h di classe μ_h, quando si passa da questo sistema al seguente

$$\underset{\gamma\ \mu_h}{\Sigma} a^{\alpha_h,\gamma} . H_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, \gamma, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s} = K_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}\, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_r}^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \alpha_h}$$

la sommatoria essendo estesa al variare di γ nella classe μ_h che ha per indici tutti gli indici di H eccettuato α_h e per apici tutti gli apici di H ed in più α_h.

Diremo invece che si è eseguita su H *la reciprocità secondo il sistema* (2) *rispetto all'apice* β_k se dal sistema H si passa al seguente

(6) Ricordo che

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{se} \quad \alpha \neq \beta \end{cases} .$$

$$\sum_\gamma a_{\beta_k, \gamma} \cdot H^{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \gamma, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} = P^{\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \beta_k}$$

che ha per indici tutti gli indici di H ed in più β_k, per apici tutti gli apici di H eccettuato β_k.

Se su H si eseguiscono successivamente più reciprocità secondo il sistema (2) il risultato che si ottiene è indipendente dall'ordine secondo cui si eseguiscono dette singole reciprocità.

Tale risultato si dice *un reciproco di H* Quando poi si eseguiscono le reciprocità su tutti gli indici e tutti gli apici di H si ha *il reciproco di H* (7).

3. Indichiamc oon $\underset{\mu}{\varphi^\alpha}(t)$ il reciproco secondo il sistema (2) del sistema $\varphi_\alpha(t)$ nel quale s' intende α variante nella classe μ, ossia poniamo

$$\underset{\mu}{\varphi^\alpha}(t) = \Sigma_\gamma \underset{\mu}{a^{\alpha, \gamma}} \cdot \varphi_\gamma(t), \tag{5}$$

la sommatoria essendo estesa al variare di γ nella classe μ.

Si ottiene subito

$$\varphi_\alpha(t) = \Sigma_\gamma a_{\alpha, \gamma} \cdot \underset{\mu}{\varphi^\gamma}(t). \tag{5'}$$

Si ha facilmente il risultato

$$\varphi_\alpha \times \underset{\mu}{\varphi^\beta} = \delta^\beta_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{per } \alpha = \beta \\ 0 & \text{per } \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{6}$$

infatti, applicando successivamente le formule (5) e (3), si ha

$$\varphi_\alpha \times \underset{\mu}{\varphi^\beta} = \varphi_\alpha \times (\Sigma_\gamma \underset{\mu}{a^{\beta, \gamma}} \cdot \varphi_\gamma) =$$

$$= \Sigma_\gamma \underset{\mu}{a^{\beta, \gamma}} (\varphi_\alpha \times \varphi_\gamma) = \Sigma_\gamma \underset{\mu}{a^{\beta, \gamma}} \cdot a_{\alpha, \gamma} = \delta^\beta_\alpha \, [\text{v.} \cdot (4)].$$

(7) Questa definizione è conforme all' analoga che figura in B), § 1, N. 2.

4. Partendo di nuovo da $H^{\beta_1, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$ fabbrichiamo il prodotto

$$\prod_1^r{}_h \varphi_{\alpha_h}(\tau_h) \cdot \prod_1^s{}_k \varphi^{\beta_k}_{\mu_k}(\theta_k) = U^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}$$

(dove μ_k è la classe di β_k, e τ_h e θ_k sono $r + s$ variabili indipendenti e ciascuna variabile in g).

Questo prodotto è un sistema assoluto che ha gli stessi indici ed apici di H e lo chiameremo *sistema U associato ad H*.

Indicheremo poi con

$$V^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}$$

il reciproco di $U^{\beta_1, \dots, \beta_s}_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$ e lo chiameremo il *sistema V associato ad H*.

Si ha subito in virtù di (5) e (2′)

$$V = \prod_1^r{}_h \varphi^{\alpha_h}_{\nu_h}(\tau_h) \cdot \prod_1^s{}_k \varphi_{\beta_k}(\theta_k)$$

dove ν_h è la classe dell'indice α_h.

5. Consideriamo ora un sistema H ed il corrispondente V; essi sono tali che gli indici dell'uno sono uguali agli apici dell'altro e viceversa; allora possiamo applicare il principio di saturazione moltiplicando e sommando rispetto a tutti gli α ed a tutti i β; noi porremo

$$[H, \varphi] = \sum_{\alpha, \beta} H \cdot V. \tag{7}$$

La $[H, \varphi]$ è un invariante rispetto alle variabili (1) che dipende dalle $r + s$ variabili τ_h e θ_k.

La $[H, \varphi]_\gamma$, dove γ è un indice variante nel campo Ω [8],

[8] A). pag. 154.

ha significato: rappresenta la derivata rispetto ad u_γ dell'invariante [H, φ] ([9]) ed è un covariante.

Chiameremo *derivata covariante* o *sistema derivato covariante* del sistema H secondo il dato sistema delle φ, il sistema

$$(8) \qquad H^{\beta_1, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \gamma} = [H, \varphi]_\gamma \times U^{\beta_1, \ldots, \beta_s}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}$$

Questo è un sistema assoluto.

Infatti i fattori del prodotto da integrare nel 2° membro di (8) sono il 1° un covariante di indice γ, il secondo un sistema assoluto cogli stessi indici ed apici di H.

§ 2.

1. Consideriamo una varietà V_n col σ_ν ([10]) avente il massimo numero di dimensioni, ed indichiamo con $f(t; u)$ una sua determinante ([11]).

Se per φ_α prendiamo il sistema f_α ([12]) la (8) è la derivata introdotta in B). Se $\rho_\gamma = 1$ ([13]) questa derivata diventa quella considerata in A).

E quando gli apici e gli indici del sistema assoluto H sono di 1ª classe è la derivata di Ricci.

§ 3.

1. I parametri φ_α individuano uno spazio lineare ad 0_ν dimensioni passante per l'origine e variante in generale col variare delle (1).

(9) A). pag. 155, § 2.
(10) A). pag. 211.
(11) A). pag. 85.
(12) A). pag. 181 secondo capoverso.
(13) Cioè se γ ha una sola cifra. A) pag. 155.

Supponiamo che questo spazio sia indipendente dalle (1), allora possiamo fissare in esso un sistema di 0_ν parametri $\underset{\beta}{\psi}$ normali e a due a due ortogonali; queste ψ sono funzioni a quadrato sommabile in g indipendenti dalle u; si ha subito che ogni φ_α o $\underset{\nu}{\varphi_\alpha}$ sarà una combinazione lineare delle $\underset{\beta}{\psi}$, cioè sarà

$$\varphi_\alpha = \Sigma_\gamma \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{\psi}, \tag{9}$$

$$\underset{\nu}{\varphi^\beta} = \Sigma_\gamma \underset{\gamma}{X^\beta} \cdot \underset{\gamma}{\psi}. \tag{9'}$$

Le X saranno convenienti funzioni delle (1) e si ricavano dalle (9) e (9') moltiplicandole per una ψ ed integrando.

Infatti si trova

$$\underset{\gamma}{X_\alpha} = \varphi_\alpha \times \underset{\gamma}{\psi}, \tag{10}$$

$$\underset{\gamma}{X^\alpha} = \underset{\nu}{\varphi^\alpha} \times \underset{\gamma}{\psi}. \tag{10'}$$

Dalte (10) e dalle (5), si ha:

$$\underset{\gamma}{X_\alpha} = \underset{\beta}{\Sigma}\, a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{\nu}{\varphi^\beta} \times \underset{\gamma}{\psi} = \underset{\beta}{\Sigma}\, a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{\gamma}{X^\beta}. \tag{11}$$

Poichè per le (9) e (9') si ha

$$\varphi_\alpha \times \underset{\nu}{\varphi^\beta} = \underset{\gamma\gamma'}{\Sigma}\, \underset{\gamma}{X_\alpha}\, \underset{\gamma'}{X^\beta} \cdot \underset{\gamma}{\psi} \times \underset{\gamma'}{\psi} = \underset{\gamma}{\Sigma}\, \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{X^\beta}$$

si vede che, per le (6), si ha

$$\underset{\gamma}{\Sigma}\, \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{X^\beta} = \delta_\alpha^\beta \tag{12}$$

Di qui risulta che $\underset{\gamma}{X^\alpha}$ è il reciproco di $\underset{\gamma}{X_\alpha}$ nel determinante che ha per elementi gli $\underset{\gamma}{X_\alpha}$, con γ indice di riga ed α

indice di colonna, ordinati allo stesso modo. (Questo determinante è evidentemente diverso da zero, perchè, se lo supponiamo eguale allo zero, ci sarebbe una relazione lineare per colonne e quindi le φ sarebbero linearmente dipendenti, contro il supposto).

Sarà anche, per note proprietà dei determinanti ortogonali,

$$\sum_{\gamma} \underset{\alpha}{X}_{\gamma} \cdot \underset{\beta}{X}^{\gamma} = \delta_{\alpha}^{\beta} . \tag{13}$$

Consideriamo ora

$$\varphi_{\alpha}(t) = \sum_{\gamma} \underset{\gamma}{X}_{\alpha} \cdot \underset{\gamma}{\psi}(t) \quad \text{e} \quad \underset{\nu}{\varphi}^{\alpha}(\tau) = \sum_{\gamma'} \underset{\gamma'}{X}^{\alpha} \cdot \underset{\gamma'}{\psi}(\tau) ,$$

moltiplichiamo e sommiamo rispettto ad α

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(t) \cdot \underset{\nu}{\varphi}^{\alpha}(\tau) = \sum_{\gamma\gamma'\alpha} \underset{\gamma}{X}_{\alpha} \underset{\gamma'}{X}^{\alpha} \cdot \underset{\nu}{\psi}(t) \cdot \underset{\gamma'}{\psi}(\tau) ,$$

e per la (13)

$$\Sigma_{\alpha} \varphi_{\alpha}(t) \cdot \underset{\nu}{\varphi}^{\alpha}(\tau) = \sum_{\gamma} \underset{\gamma}{\psi}(t) \cdot \underset{\gamma}{\psi}(\tau) . \tag{14}$$

Ora prendiamo il sistema covariante

$$H_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(t),$$

e deriviamolo coavariantemente secondo il sistema (2). Allora è

$$[H, \varphi] = \Sigma_{\alpha} \varphi_{\alpha}(t) \cdot \varphi^{\alpha}(\tau) = \sum_{\gamma} \psi(t) \cdot \psi(\tau) , \qquad [\text{v. } 14]$$

quindi $[H, \varphi]$ è costante rispetto alle u ed è necessariamente $[H, \varphi]_{\gamma} = 0$ ed infine, indicando con D_{γ} la derivata covariante, si ha

$$D_{\gamma} H_{\alpha} = [H, \varphi]_{\gamma} \times \varphi_{\alpha}^{(t)} = 0,$$

ossia

$$D_{\alpha} \varphi_{\alpha}(t) = 0 .$$

In modo analogo si trova

$$D_\gamma \underset{\nu}{\varphi}^{\alpha}(t) = 0 \, .$$

Integrando i due membri delle due precedenti relazioni, dopo averle moltiplicate per $\underset{\beta}{\psi}(t)$, si ottiene, [vedi (10) e (10')],

$$D_\gamma \underset{\beta}{X}_\alpha = 0 \ , \quad D_\gamma \underset{\beta}{X}^\alpha = 0$$

2. Supponiamo che esista una determinante f per cui sia.

$$a_{\alpha,\beta} = \varphi_\alpha \times \varphi_\beta = f_\alpha \times f_\beta$$

(Se $\nu = 1$ questo è sempre possibile ([14])). Allora i parametri (manifestamente invarianti)

$$\underset{\gamma}{F} = \sum_\alpha \underset{\gamma}{X}^\alpha \cdot f_\alpha \ ,$$

i quali, evidentemente, appartengono al σ_ν della V_n che ha per determinante la f, sono normali e a due a due ortogonali. Infatti:

$$\underset{j}{F} \times \underset{i}{F} = \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha \times f_\beta \cdot \underset{j}{X}^\alpha \cdot \underset{i}{X}^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{j}{X}^\alpha \cdot \underset{i}{X}^\beta \ .$$

Ma per la (11)

$$\underset{j}{X}_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{j}{X}^\beta \ .$$

Dunque

$$\underset{j}{F} \times \underset{i}{F} = \sum_\alpha \underset{j}{X}_\alpha \cdot \underset{i}{X}^\alpha = \delta_i^j \qquad \text{[v. (13)]}.$$

([14]) Vedi SCHLÄFLI. *Sugli spazi a curvatura costante.* [Annali di Matematica, Serie 2, Vol. 5, 1871–73]. Ed anche E. CARTAN. *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien.* [Annales de la societé Polonaise de mathematique. Tome VI, pag. 1].

3. Riprendiamo la relazione (12)

$$\sum_{\gamma} \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{X^\beta} = \delta^\beta_\alpha \, .$$

Moltiplichiamo poi i due membri per a_{β,γ_1} e sommiamo rispetto a β, tenendo conto delle (11).

$$\sum_{\gamma} \underset{\gamma}{X_\alpha} \cdot \underset{\gamma}{X_{\gamma_1}} = a_{\alpha,\gamma_1} \, .$$

È bene avvertire che, per il fatto che il determinante $\underset{\nu}{a}$ è diverso da zero, la varietà che ha f per determinante ha il σ_ν col massimo numero di dimensioni.

4. Consideriamo ora una varietà V_n ad n dimensioni il cui σ_ν abbia il massimo numero di dimensioni (cioè 0_ν dimensioni) ed indichiamo con f una sua determinante.

Consideriamo poi nel σ_ν, 0_ν parametri normali invarianti ed a due a due ortogonali

$$\underset{i}{F} \quad (i \text{ variabile nella classe } \nu)$$

Poniamo poi

$$a_{\alpha,\beta} = f_\alpha \times f_\beta$$

Allora sarà

$$\underset{i}{F} = \sum_{\alpha} \underset{i}{X^\alpha} \cdot f_\alpha \, ,$$

e ne consegue

$$\underset{i}{F} \times \underset{j}{F} = \sum_{\alpha,\beta} f_\alpha \times f_\beta \cdot \underset{i}{X^\alpha} \cdot \underset{j}{X^\beta} = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{i}{X^\alpha} \cdot \underset{j}{X^\beta} \, .$$

Poniamo poi

$$\underset{j}{X_\alpha} = \sum_{\beta} a_{\alpha,\beta} \cdot \underset{j}{X^\beta}$$

ed allora

$$\underset{i}{F} \times \underset{j}{F} = \sum_{\alpha} \underset{i}{X}^{\alpha} \cdot \underset{j}{X}_{\alpha}$$

ma per ipotesi,

$$\underset{i}{F} \times \underset{j}{F} = \delta_i^j \,.$$

È evidente che il determinante delle $\underset{i}{X}^{\alpha}$ è diverso dallo zero, quindi le $\underset{i}{X}_{\alpha}$ sono lo reciproche delle $\underset{i}{X}^{\alpha}$ in queste determinante e perciò si ha anche:

$$\sum_{i} \underset{i}{X}^{\alpha} \cdot \underset{i}{X}_{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \,.$$

Riprendiamo la relazione

$$\underset{i}{F} = \sum_{\alpha} \underset{i}{X}^{\alpha} \cdot f_{\alpha} \,.$$

Moltiplichiamo per $\underset{i}{X}_{\beta}$ e sommiamo rispetto ad i

$$\sum_{i} \underset{i}{X}_{\beta} \cdot \underset{i}{F} = \sum_{\alpha} \left(\sum_{i} \underset{i}{X}_{\beta} \cdot \underset{i}{X}^{\alpha}\right) \cdot f_{\alpha} = f_{\beta} \,.$$

Da questa relazione si ricava

$$a_{\alpha,\beta} = f_{\alpha} \times f_{\beta} = \sum_{i,j} \underset{i}{F} \times \underset{j}{F} \cdot \underset{i}{X}_{\alpha} \cdot \underset{j}{X}_{\beta} = \sum_{i} \underset{i}{X}_{\alpha} \cdot \underset{i}{X}_{\beta} \,.$$

A questo punto consideriamo uno spazio lineare S_{0_ν} ad 0_ν dimensioni ed in questo un sistema di parametri normali e a due a due ortogonali ed indipendenti dalle u che chiamo

$$\underset{i}{\phi} \qquad (i \text{ variabile nella classe } \nu).$$

Ora poniamo

$$\varphi_{\alpha} = \sum_{i} \underset{i}{X}_{\alpha} \cdot \underset{i}{\phi} \,. \tag{15}$$

Si ha subito

$$\varphi_\alpha \times \varphi_\beta = \sum_{i,j} \underset{i}{\phi} \times \underset{i}{\phi} \cdot \underset{i}{X}_\alpha \cdot \underset{j}{X}_\beta = \sum_i \underset{i}{X}_\alpha \cdot \underset{i}{X}_\beta = a_{\alpha,\beta} \, .$$

Si vede così che prendendo come sistema fondamentale, per definire la derivata covariante il sistema delle φ dato dalle (15) si verificano per questo sistema le condizioni richieste del numero 2. La derivata covariante corrispondente ad un tal sistema delle φ coincide per $\nu = 1$ e $\rho_j = 1$ con quella descritta nella nota C).