RENATO CACCIOPPOLI

Sugli sviluppi in serie di funzioni ipersferiche e di polinomi biortogonali di Hermite

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 3 (1932), p. 163-182

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__163_0>

SUGLI SVILUPPI IN SERIE DI FUNZIONI IPERSFERICHE E DI POLINOMI BIORTOGONALI DI HERMITE.

di Renato Caccioppoli

La teoria delle funzioni ipersferiche e dei polinomi di Hermite che a quelle si connettono, come i polinomi di Legendre alle funzioni di Laplace della sfera ordinaria, ha conseguito ultimamente un assetto definitivo, per opera prevalentemente di Appell e Kampé de Fériet (1). Fra i suoi risultati principali va annoverata la costruzione degli sviluppi formali che estendono al caso di un numero qualunque di variabili le serie di funzioni sferiche e di polinomi di Legendre; e si pone naturalmente il problema della convergenza di tali sviluppi.

Questo problema mi propongo qui di studiare (2), limitatamente, per semplicità, al caso dell'ipersfera dello spazio a quattro dimensioni e dei polinomi di Hermite in due variabili. Stabilirò dapprima i criteri più semplici, praticamente già estesissimi, per la convergenza degli sviluppi di funzioni continue. Passerò poi ad uno studio sommario, di interesse prevalentemente teorico, delle condizioni generali di convergenza locale, e delle discontinuità ammissibili per la funzione sviluppata sotto queste condizioni.

Si vedrà come il fenomeno della convergenza delle serie considerate sia di natura alquanto più complessa e delicata di quello presentato dalle serie di funzioni sferiche ordinarie, molto

(1) V. il trattato di questi due Autori: *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques–Polynomes d' Hermite* (Gauthier-Villars, 1926).

(2) La sommabilità, per medie di ordine superiore, delle serie in quistione è stata esaminata da Koschmieder (Math. Annalen, t. 101 e 104).

più instabile potrebbe dirsi; come specialmente, per assicurare la convergenza, le discontinuità vadano sottoposte a condizioni singolarmente restrittive.

1. - Preliminari [1].

1. - Nello spazio a quattro dimensioni Σ dei punti di coordinate reali x_1, x_2, x_3, x_4 sia S la sfera con centro nell'origine O e raggio unitario; su questa sfera a tre dimensioni si definiscono le funzioni ipersferiche, generalizzanti le funzioni di LAPLACE della sfera ordinaria, come quelle cui si riducono i polinomi omogenei armonici in Σ, cioè verificanti l'equazione

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2} = 0 .$$

La funzione ipersferica di grado n, Y_n, originata dal polinomio $P_n(x_1, x_2, x_3, x_4)$ di grado n, contiene $(n+1)^2$ costanti arbitrarie omogenee. Introducendo coordinate polari mediante le formole

$$x_1 = \rho \cos\theta_1, \quad x_2 = \rho \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2, \quad x_3 = \rho \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cos\varphi,$$

$$x_4 = \rho \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \operatorname{sen}\varphi ,$$

si può scrivere

$$P_n(x_1, x_2, x_3, x_4) = \rho_n Y_n(\theta_1, \theta_2, \varphi) ,$$

e Y_n si presenta come un polinomio nei seni e coseni di θ_1, θ_2 e φ $(0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi;\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

Conviene però sostituire alle coordinate polari, per evitare la dissimmetria introdotta con gli angoli θ_1, θ_2, quelle definite dalle formole seguenti

[1] V. APPELL et KAMPÉ DE FÉRIET, loc. cit., 2^{me} Partie.

$$z_1 = \rho x_1, \; z_2 = \rho x_2, \; z_3 = \rho \sqrt{X} \cos\varphi, \; z_4 = \sqrt{X} \operatorname{sen}\varphi,$$

$$(X = 1 - x_1^2 - x_2^2);$$

qui il punto (x_1, x_2) varia nel cerchio C di centro nell'origine e raggio unitario, e φ nell'intervallo $(0, 2\pi)$. Le x possono chiamarsi coordinate *zonali*, la φ *longitudine:* ovviamente, φ è indeterminata quando $x_1^2 + x_2^2 = 1$, cioè $X = 0$ [1].

Nelle nuove variabili la funzione Y_n diventa

$$Y_n = P_n(x_1, x_2, \sqrt{X}\cos\varphi, \sqrt{X}\operatorname{sen}\varphi).$$

La proprietà fondamentale di *ortogonalità* si estende subito alle funzioni ipersferiche: si ha per $m \neq n$

$$\int_S Y_m Y_n \, d\omega = 0,$$

dove l'elemento di S è dato da

$$d\omega = \operatorname{sen}^2\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\varphi = dx_1 \, dx_2 \, d\varphi.$$

2. – Sia Q un punto variabile su S, M un punto qualunque di Σ interno ad S, e indichiamo con γ l'angolo MOQ. Se $F(M) = F(z_1, z_2, z_3, z_4)$ è una funzione armonica internamente ad S, sussiste la formola, che estende quella classica di Poisson

$$F(M) = \frac{1}{2\pi^2} \int_S F(Q) \frac{1 - \rho^2}{(1 - 2\rho\cos\gamma + \rho^2)^2} \, d\omega.$$

Il secondo membro può trasformarsi in una serie di potenze di ρ (convergente per $\rho < 1$) ricorrendo allo sviluppo

$$\frac{1}{1 - 2ax + a^2} = \sum_0^\infty a^n \, V_n^{(2)}(x),$$

[1] Su S le superficie $\varphi =$ cost. sono emisferi *meridiani*, segati dai semispazi limitati dal piano $z_3 = z_4 = 0$, e passanti per il cerchio unitario di detto piano.

in cui le $V_n^{(2)}$ designano le cosiddette *funzioni sferiche di 2° ordine* [1]; si trova con facile calcolo

$$F(M) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \rho^n \int_S F(Q) \, V_n^{(2)} (\cos\gamma) \, d\omega \, .$$

Si deduce di qui ovviamente uno sviluppo *formale* in serie di funzioni ipersferiche per una funzione $f(P)$ definita su S; posto

$$(1) \qquad f(P) = \sum_0^{\infty} Y_n(P)$$

si ha

$$(2) \qquad Y_n(P) = \frac{n+1}{2\pi^2} \int_S f(Q) \, V_n^{(2)} (\cos\gamma) \, d\omega \, ,$$

dove γ è l'angolo POQ; e sussistono le formole

$$\int_S Y_n(Q) \, V_m^{(2)} (\cos\gamma) \, d\omega = 0 \quad (m \neq n) \, ,$$

$$\int_S Y_n(Q) \, V_n^{(2)} (\cos\gamma) \, d\omega = \frac{2\pi^2}{n+1} Y_n(P) \, .$$

Le funzioni $V_n^{(2)}$, espresse mediante l'angolo γ, acquistano la forma semplicissima [2]

$$(3) \qquad V_n^{(2)} (\cos\gamma) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\gamma}{\operatorname{sen}\gamma} \, .$$

3. - Sono particolarmente notevoli le funzioni ipersferiche

[1] Caso particolare dei polinomi di Gegenbauer definiti dallo sviluppo

$$(1 - 2ax + a^2)^{-p/2} = \Sigma a^n V_n^{(p)} \, ,$$

con p qualunque.

[2] V. Appell et Kampé de Fériet, loc. cit., Note I (p. 390).

cosiddette *zonali,* cioè indipendenti dalla longitudine φ; una funzione zonale di grado n contiene $n+1$ costanti arbitrarie omogenee. Tutte le funzioni zonali linearmente indipendenti si ottengono ricorrendo allo sviluppo seguente, considerato da HERMITE in vista di un'estensione a due variabili dei polinomi di LEGENDRE;

$$\frac{1}{1-2a_1x_1-2a_2x_2+a_1^2+a_2^2}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}a_1^r a_2^s\, V_{rs}(x_1,x_2).$$

Gli $n+1$ polinomi V_{rs}, con $r+s=n$, forniscono altrettante funzioni ipersferiche Y_n indipendenti da φ. E lo sviluppo di una funzione delle sole x_1 e x_2, definita nel cerchio C, in serie di funzioni ipersferiche, contiene soltanto polinomi V.

Questi polinomi di HERMITE appaiono quindi come naturale generalizzazione di quelli di LEGENDRE; una differenza sostanziale sta però nel fatto che i primi non costituiscono come i secondi un sistema ortogonale ([1]), sicchè i coefficienti dello sviluppo formale di una funzione $f(x_1\,x_2)$ in serie di polinomi V non possono determinarsi senz'altro col procedimento classico di EULER e FOURIER. Questa difficoltà è stata superata da HERMITE mercè l'introduzione dei nuovi polinomi U_{rs} definiti dallo sviluppo

$$\frac{1}{\sqrt{(a_1x_1+a_2x_2-1)^2+(a_1^2+a_2^2)(1-x_1^2-x_2^2)}}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}a_1^r a_2^s\, U_{rs}(x_1,x_2),$$

di cui il primo membro rappresenta un'altra generalizzazione della funzione generatrice dei polinomi di LEGENDRE. I polinomi U_{rs} e V_{rs} costituiscono un doppio sistema biortogonale: propriamente si ha

$$\iint\limits_{c(1-x_1^2-x_2^2\geq 0)} U_{rs}(x_1,x_2)\,V_{r's'}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=0 \qquad [(r-r')^2+(s-s')^2>0]$$

([1]) L'ortogonalità fra due polinomi V_{rs} e $V_{r's'}$ ha luogo solo quando $r+s \neq r'+s'$, o quando, essendo $r+s=r'+s'$, una almeno delle differenze $r-r'$, $s-s'$ è dispari.

$$\iint\limits_{c(1-x_1^2-x_2^2\geq 0)} U_{rs}(x_1,x_2)\, V_{rs}(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = \frac{\pi}{r+s+1}\,\frac{(r+s)!}{r!\,s!}.$$

Ogni polinomio U è una combinazione lineare a coefficienti costanti dei polinomi V aventi lo stesso suo grado (ed inversamente), sicchè anche i nuovi polinomi forniscono un sistema completo di funzioni ipersferiche zonali. Vale inoltre per essi la seguente estensione immediata della formola di Rodrigues

$$U_{rs}(x_1, x_2) = \frac{(-1)^{r+s}}{2^{r+s}}\,\frac{1}{r!\,s!}\,\frac{\partial^{r+s}}{\partial x_1^r\,\partial x_2^s}\left[(1-x_1^2-x_2^2)^{r+s}\right].$$

Possiamo ora scrivere lo sviluppo formale di una funzione $f(x_1, x_2)$ definita nel cerchio C:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} A_{rs}\, V_{rs}(x_1 x_2), \tag{4}$$

ponendo

$$A_{rs} = \frac{r+s+1}{\pi}\,\frac{r!\,s!}{(r+s)!}\iint\limits_{C} f(x_1, x_2)\, U_{rs}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2; \tag{5}$$

analogamente, scambiando gli uffici di U e V, si dedurrebbe lo sviluppo in serie di polinomi U.

Lo sviluppo (4), quando sommato per diagonali, scritto cioè sotto la forma di serie semplice

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r+s=n} A_{rs}\, V_{rs}(x_1, x_2) \tag{6}$$

non è altro che lo sviluppo in serie di funzioni ipersferiche (1), per la funzione f indipendente da φ. E beninteso altrettanto può dirsi per l'analoga serie di polinomi U, che dà le medesime somme diagonali.

2. - Sviluppo in serie di funzioni ipersferiche di una funzione sulla sfera a tre dimensioni

4. - Ci proponiamo ora di indagare sulla validità dello sviluppo in serie di funzioni ipersferiche (1). Innanzi tutto perchè le formole (2) abbiano senso si richiede dalla funzione

$$f(P) = f(x_1, x_2, \varphi)$$

la sommabilità su S. Supporremo per ora che f sia continua, e che abbia continue le derivate prime *su* S, cioè le derivate di direzione definite dall'espressione

$$\lim_{P' \to P} \frac{f(P') - f(P)}{\overline{PP'}} ,$$

la distanza $\overline{PP'}$ essendo presa in Σ.

A semplificare le notazioni ulteriori porremo

$$\frac{d}{dx} V_n^{(2)}(x) = W_n(x) , \quad \int_0^x V_n^{(2)}(x)\, dx = U_n(x) .$$

Si indichi con $s_n(P)$ la somma dei primi $n+1$ termini della serie (1): di questa somma dobbiamo cercare il limite per $n \to \infty$.

È lecito ammettere che il punto P considerato sia quello di coordinate (su S)

$$x_1 = 1 , \quad x_2 = 0 \quad (\varphi \text{ indeterminata})$$

poichè a questo caso ci si può sempre ridurre con una opportuna trasformazione di coordinate; allora si avrà

$$\cos \gamma = x_1 .$$

Dalle (2) e dalla formula sommatoria (analoga ad altra nota per i polinomi di LEGENDRE)

$$\sum_0^n (m+1)\, V_m^{(2)}(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx} V_n^{(2)}(x) + \frac{d}{dx} V_{n+1}^{(2)}(x)\right]$$

si trae ora per $s_n(P)$ l'espressione

$$s_n(P) = \frac{1}{4\pi^2}\int_S f(Q)\,[W_n(\cos\gamma) + W_{n+1}(\cos\gamma)]\,d\omega =$$

$$(7) \qquad = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \iint_C f(x_1, x_2, \varphi)\,[W_n(x_1) + W_{n+1}(x_1)]\,dx_1\,dx_2 .$$

Integrando per parti otteniamo, indicando con Γ la circonferenza di C,

$$s_n(P) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_\Gamma f(x_1, x_2, \varphi)\,[V_n^{(2)}(x_1) + V_{n+1}^{(2)}(x_1)]\,dx_2 - \right.$$

$$\left. - \iint_C \frac{df}{dx_1}[V_n^{(2)}(x_1) + V_{n+1}^{(2)}(x_1)]\,dx_1\,dx_2 \right\} .$$

Importa notare che la derivata parziale qui introdotta, in quanto presa rispetto ad una coordinata zonale, è in generale infinita per $X = 0$, cioè per (x_1, x_2) su Γ, come mostra subito la seguente espressione del quadrato dell'elemento lineare di S:

$$\frac{1 + x_1^2}{X} dx_1^2 + \frac{1 + x_2^2}{X} dx_2^2 + \frac{2x_1 x_2}{X} dx_1\,dx_2 + X\,d\varphi^2 .$$

Ma l'ordine di infinito della derivata su Γ non supera $\frac{1}{2}$, e propriamente si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, \varphi)\,\frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} ,$$

con la f_1 funzione continua (dipendente però ovviamente ancora da φ per $X = 0$).

Se ora sulla circonferenza Γ identifichiamo l'angolo γ con l'arco contato a partire dal punto $(1, 0)$, avremo

$$d x_2 = \cos\gamma \, d\gamma \quad \text{su} \quad \Gamma ;$$

poniamo poi

$$f(x_1, x_2, \varphi) = g(\gamma) \quad \text{su} \quad \Gamma .$$

Osservando ancora che in virtù della (3) si ha

$$V_n^{(2)}(\cos\gamma) + V_{n+1}^{(2)}(\cos\gamma) = \frac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{3}{2}\right)\gamma}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma} ,$$

si ottiene in definitiva la (7) sotto la forma

$$s_n(P) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + 3/2)\gamma}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma} g(\gamma)\cos\gamma \, d\gamma \, - \right.$$

$$\left. - \iint_C \frac{\partial f}{\partial x_1}\left[V_n^{(2)}(x_1) + V_{n+1}^{(2)}(x_1)\right] dx_1 \, dx_2 \right\} . \tag{8}$$

Poichè si ha notoriamente [1]

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + 3/2)\gamma}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma} g(\gamma)\cos\gamma \, d\gamma = 2\pi g(0) ,$$

e $g(0) = f(P)$, per dimostrare la validità della (1) nel punto considerato basterà far vedere che l'integrale (funzione di φ)

$$\iint_C \frac{\partial f}{\partial x_1}\left[V_n^{(2)}(x_1) + V_{n+1}^{(2)}(x_1)\right] dx_1 \, dx_2$$

[1] Si ricordi che per ipotesi $g(\gamma)$ ha derivata continua.

tende a zero, per $n \to \infty$, e legittimare il passaggio al limite sotto il segno di integrazione rispetto a φ.

Premettiamo all'uopo la relazione di limite

$$\lim_{n \to \infty} U_n(x) = 0$$

(uniforme per $|x| \leq 1$), conseguenza immediata della (3) che fornisce, posto $x = \cos\gamma$,

$$U_n(x) = \int_0^x V_n^{(2)}(x)\,dx = \int_\gamma^{\pi/2} \operatorname{sen}(n+1)\gamma\, d\gamma\,.$$

Nell'integrale doppio precedente effettuiamo una prima integrazione rispetto ad x_1; il risultato di questa tenderà a zero, per $x_2 \neq 0$, al divergere di n, — e ciò in virtù di un noto risultato sugli integrali singolari, perchè l'integrale indefinito

$$U_n(x) + U_{n+1}(x)$$

del secondo fattore dell'integrando tende a zero.

Inoltre l'integrando stesso è maggiorato in valore assoluto dalla funzione

$$\frac{2M}{\sqrt{1-x_1^2}\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}}\,,$$

dove M indica il massimo modulo della funzione f_1 dianzi introdotta, e questa maggiorante risulta sommabile nel cerchio C. Pertanto l'integrale doppio tende a zero, ed è lecito nella (8) il passaggio al limite, che avviene attraverso una successione di integrandi equilimitati [1]; e possiamo conchiudere che

$$\lim_{n \to \infty} s_n(P) = f(P)\,.$$

[1] Del resto la convergenza a zero dell'integrale considerato è uniforme rispetto a φ.

5. - Ovviamente, nella trattazione che precede è essenziale soltanto l'ipotesi che le derivate prime di $f(P)$ siano limitate; o meglio che $f(P)$ abbia su S rapporti incrementali limitati, cioè verifichi la condizione (di LIPSCHITZ)

$$|f(P') - f(P)| \leq k \cdot \overline{PP'}$$

con k costante. Questa circostanza implica notoriamente l'esistenza della derivata prima considerata $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ quasi ovunque, cioè a prescindere, per ogni fissato valore di φ, dai punti di un insieme di misura nulla su C.

Possiamo dunque ritenere dimostrato il teorema generale seguente:

Se la funzione continua $f(P)$, definita sulla sfera a tre dimensioni S, è ivi a rapporti incrementali limitati, essa è sviluppabile nella serie di funzioni ipersferiche (1), *i cui termini sono dati dalle formole* (2).

Si riconosce agevolmente che se le derivate di $f(P)$ sono continue la convergenza dello sviluppo è certamente uniforme su S; basta osservare che le funzioni $f_1(x_1, x_2, \varphi)$ che occorrono nella valutazione delle somme $s_n(P)$ risultano uniformemente continue, e che allora nell'espressione (8) di s_n la parentesi sotto il primo segno integrale tende al proprio limite uniformemente al variare di P.

6. - Si ricava ancora dalla dimostrazione del teorema precedente un criterio generale di convergenza locale:

Perchè il secondo membro della (8) tenda a $f(P)$, per una particolare determinazione di P e del cerchio (polare)

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

passante per esso, basta che sia limitata la particolare funzione $f_1(x_1, x_2, \varphi)$, e più generalmente basta che f_1 sia maggiorata in valore assoluto da una funzione sommabile $M(\varphi)$ di sola φ, essendo allora

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} [V_n^{(2)}(x_1) + V_{n+1}^{(2)}(x_1)] \right| \leq \frac{2\,M(\varphi)}{\sqrt{1 - x_1^2}\,\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \,.$$

Tale circostanza è verificata per ogni punto del cerchio polare se f soddisfa la condizione di Lipschitz separatamente su ogni emisfero meridiano (a prescindere tutt'al più da un insieme di valori di φ avente misura nulla), con un coefficiente variabile con φ ma sommabile rispetto a φ.

In generale dunque *lo sviluppo* (1) *è valido in tutti i punti di un cerchio massimo* Γ *quando* $f(P)$ *verifica la condizione di* Lipschitz *su quasi tutti gli emisferi passanti per* Γ, *e con un coefficiente sommabile rispetto alla longitudine di questi.*

Questo criterio presenta analogie con quello dato da Jordan per la convergenza locale di uno sviluppo in serie di funzioni sferiche ([1]). Lo si potrebbe estendere e completare osservando che ad assicurare l' occorrente sommabilità della funzione

$$f_1(x_2, x_2, \varphi) \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}\,\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{1}{\sqrt{1 - x_2^2}}$$

non sono necessarie le limitazioni assegnate per f_1; di ciò faremo cenno più oltre.

7. – Un teorema più strettamente affine a quello di Jordan si ottiene, insieme ai risultati precedenti, ricorrendo ad una impostazione un po' diversa del problema, alla quale sarà opportuno accennare.

Scriviamo la (7) in coordinate polari, ed integriamo per parti rispetto a θ_1, assumendo $f \operatorname{sen}\theta_1$ come fattor finito, ed osservando che $\gamma = \theta_1$; otterremo

$$s_n(P) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_2\, d\theta_2 \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial\theta_1} (f \operatorname{sen}\theta_1) [V_n^{(2)}(\cos\theta_1) +$$

$$+ V_{n+1}^{(2)}(\cos\theta_1)] \, d\theta_1 =$$

([1]) V. Jordan, *Cours d' Analyse* (2e éd.), t. II, n. 244. — Caccioppoli, *Sulle serie di Laplace*, Rend. Acc. Lincei (6), vol. 11 (1930).

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_2 d\theta_2 \int_{-1}^{1} \frac{\partial f}{\partial \theta_1}[V_n^{(2)}(x) + V_{n+1}^{(2)}(x)]\,dx +$$

$$+ \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta_2\, d\theta_2 \int_0^{\pi} f\cos\theta_1\,[V_n^{(2)}(\cos\theta_1) + V_{n+1}^{(2)}(\cos\theta_1)]\,d\theta_1\,,$$

essendo $x = \cos\theta_1$.

Ragionando come precedentemente, si prova che se f verifica su quasi tutti i semicerchi meridiani la condizione di Lipschitz, con un coefficiente $k(\theta_2, \varphi)$ sommabile sulla sfera (θ_2, φ), cioè tale che converga l'integrale

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} k(\theta_2, \varphi) \operatorname{sen}\theta_2\, d\theta_2\,,$$

il primo termine dell'ultima espressione tende a zero, e nel secondo termine il terzo integrale ha per limite $\pi f(P)$ [1].

Quindi *lo sviluppo* (1) *è valido nel punto P quando f verifica la condizione di* Lipschitz *su quasi tutti i semicerchi meridiani passanti per P, e con un coefficiente sommabile sulla sfera* (θ_2, φ).

Anche questo criterio è suscettibite di estensioni, come vedremo in seguito.

3. - Sviluppo di una funzione di due variabili in serie di polinomi di Hermite.

8. - Del risultato enunciato al n. 5 è caso particolare, giusta l'osservazione del n. 3, l'analogo sulla sviluppabilità in serie di polinomi $V_{r,s}$ di Hermite di una funzione $f(x_1, x_2)$ definita nel cerchio C; e difatti è ovvio che una limitazione per le deri-

[1] Il passaggio al limite sotto i due primi segni è lecito, perchè l'integrale trigonometrico, come funzione di θ_2 e di φ, è maggiorato in valore assoluto da una funzione lineare di $k(\theta_2, \varphi)$.

vate prime di $f(x_1, x_2)$ ne implica un'altra per le derivate su S della funzione $f(P) = f(x_1, x_2)$.

Ma beninteso lo sviluppo deve intendersi sommato per diagonali, scritto cioè sotto la forma (6); si ottiene allora una serie semplice di cui il termine generico, cioè il polinomio

$$P_n(x_1, x_2) = \sum_{r+s=n} A_{rs} V_{rs}(x_1, x_2),$$

può anche esprimersi mediante l'integrale triplo

$$\text{(9)} \qquad \frac{n+1}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\varphi \int\int_C f(\xi_1, \xi_2)\, V_n^{(2)}(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 +$$
$$+ \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\, \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2} \cos\varphi)\, d\xi_1\, d\xi_2 ,$$

come segue dalla (2).

Pertanto *una funzione* $f(x_1, x_2)$ *definita nel cerchio C ed avente rapporti incrementali limitati ammette lo sviluppo in serie di polinomi di* Hermite (6), *in cui i coefficienti sono dati dalle* (5) *ed il termine di grado n ha l'espressione* (9).

La convergenza dello sviluppo è certamente uniforme quando le derivate di f sono continue.

9. - Sembra difficile ottenere risultati generali sulla validità dello sviluppo (4) in *serie doppia* (assolutamente convergente). Per potere stabilire maggiorazioni semplici dei coefficienti A_{rs} ci occorrerà l'ipotesi che f ammetta derivate di tutti gli ordini [1].

Indichiamo con M_{rs} un limite superiore per

$$\left| \frac{\partial^{r+s} f}{\partial x_1^r\, \partial x_2^s} \right|$$

nel cerchio C. Dalla (5) si deduce con successive integazioni per parti, introducendo i polinomi U_{rs} mediante la formola di Rodrigues generalizzata,

[1] Cfr. Appell et Kampé de Fériet, n. XCIII.

$$A_{rs} = \frac{1}{2^{r+s}} \frac{r+s+1}{\pi (r+s)!} \iint_C (1 - x_1^2 - x_2^2)^{r+s} \frac{\partial^{r+s} f}{\partial x_1^r \partial x_2^s} dx_1 dx_2 ,$$

e di qui si trae

$$|A_{rs}| \leq \frac{M_{rs}}{2^{r+s}(r+s)!} .$$

Supponiamo esista un numero $k < \sqrt{2}$ tale che

$$M_{rs} \leq k^{r+s} (r+s)! ;$$

si avrà allora

$$|A_{rs}| \leq \left(\frac{k}{2}\right)^{r+s} ,$$

ed il secondo membro della (4) risulterà assolutamente convergente, essendo tale la serie

$$\Sigma \left(\frac{k}{2}\right)^{r+s} V_{rs}$$

che coincide con lo sviluppo (assolutamente convergente per $a_1^2 + a_2^2 < 1$) della funzione generatrice dei polinomi V quando si ponga

$$a_1 = a_2 = \frac{k}{2} .$$

La validità della (4) è poi assicurata dal precedente teorema sullo sviluppo (6).

Quindi una funzione $f(x_1, x_2)$ le cui derivate verifichino in C le limitazioni

$$\left| \frac{\partial^{r+s} f}{\partial x_1^r \partial x_2^s} \right| \leq k^{r+s} (r+s)! ,$$

con $k < \sqrt{2}$, ammette lo sviluppo (4) in serie doppia assolutamente convergente.

In particolare sono sviluppabili secondo la (4) le funzioni *intere* [1] in x_1, x_2; per un polinomio di grado n lo sviluppo si riduce ai termini di grado $\leq n$.

Non si attribuisca d'altronde soverchia importanza alla questione della convergenza assoluta della serie doppia. Il metodo più naturale di sommazione, quello per cui si lasciano assegnare i criteri di convergenza più semplici e genarali, sembra qui il metodo diagonale, così come, ad esempio, per le serie doppie di Fourier è quello *rettangolare* considerato da Stolz. La serie (6), procedente per polinomi ortogonali di grado crescente, appare inoltre nel modo più ovvio come una diretta estensione della serie di Legendre.

4. - Estensione dei criteri di convergenza. - Discontinuità.

10. - Per estendere ulteriormente i precedenti risultati torniamo alla (8) e cerchiamo, premessa soltanto la sommabilità di f su S, sotto quali condizioni generali ed in che forma la si possa ancora stabilire:
L'integrale doppio proveniente dall'integrazione per parti si può scrivere sempre che f sia assolutamente continua, per quasi tutti i valori di x_2, internamente all'intervallo di variabilità di x_1, e beninteso l'integrando risulti sommabile; si dovrà poi sostituire a $g(\gamma)$ la funzione

$$g(\gamma, \varphi) = \lim_{x_1 \to \cos\gamma} f(x_1, \operatorname{sen}\gamma, \varphi)$$

che esisterà quasi ovunque su Γ.

Se ora queste condizioni sono verificate per quasi tutte le determinazioni di φ, sussisterà la formola seguente, generalizzazione della (8),

[1] Più generalmente quelle analitiche regolari nel campo (frontiera inclusa)

$$|x_1| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |x_2| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$
\begin{aligned}
s_n(P) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(n+{}^3/_2)\gamma}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma} g(\gamma,\varphi)\cos\gamma\, d\gamma \right. - \\
\text{(10)} \qquad \left. - \int\!\!\int_C [V_n^{(2)}(x_1) + V_{n+1}^{(2)}(x_1)] \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 \right\}.
\end{aligned}
$$

Perchè l'integrale doppio tenda a zero, in modo che sia lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrazione rispetto a φ, basterà che sia finito l'integrale (maggiorante a meno del fattore 2)

$$
\text{(11)} \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int\!\!\int_C \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| dx_1\, dx_2 .
$$

Perchè inoltre converga l'integrale trigonometrico, restando maggiorato, in vista ancora del passaggio al limite sotto il primo segno integrale della (10), da una funzione sommabile di φ, basterà che la funzione $g(\gamma, \varphi)$ abbia in γ una variazione totale sommabile rispetto a φ; il limite si scriverà allora, con una notazione di uso frequente,

$$
\pi[g(-0, \varphi) + g(+0, \varphi)].
$$

Soddisfatte tali condizioni, lo sviluppo convergerà nel punto $P(1, 0)$, e vi avrà per somma il valor medio di f, cioè

$$
\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [g(-0, \varphi) + g(+0, \varphi)]\, d\varphi ,
$$

in particolare $f(P)$ se f è continua in P.

Il risultato del n. 7 si estende analogamente, introducendo la funzione

$$
g(\theta_2, \varphi) = \lim_{\theta_1 \to 0} f(\theta_1, \theta_2, \varphi) ;
$$

verificate allora le condizioni dell'assoluta continuità di f in θ_1 per quasi tutti i punti della sfera (θ_2, φ), e dellà convergenza dell'integrale

$$(12) \qquad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta_2 \, d\theta_2 \int_0^{\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right| d\theta_1 = \int_S \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta_1} \left| \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right| d\omega ,$$

lo sviluppo convergerà nel punto $\theta_1 = 0$ verso il valor medio di f

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} g(\theta_2, \varphi) \operatorname{sen} \theta_2 \, d\theta_2 \quad (^1).$$

Rileviamo subito, come conseguenza, un'estensione del teorema del n. 7, relativa al caso che f, continua separatamente all'interno dei singoli meridiani, presenti per $\theta_1 = 0$ valori limiti variabili con θ_2 e φ:

Lo sviluppo (1) *fornisce il valor medio di f nel punto* $\theta_1 = 0$ *quando f verifica la condizione di* Lipschitz *internamente a quasi tutti i semicerchi meridiani, con un coefficiente sommabile sulla sfera* (θ_2, φ).

Enunciamo ora un teorema sulla convergenza in un punto generico dell'ipersfera, che si deduce immediatamente dal criterio precedente:

Lo sviluppo (1) *è valido in ogni punto di continuità purchè la funzione, dotata di variazioni totali uniformemente limitate sui cerchi massimi di S, risulti su quelli passanti per un punto quasi sempre assolutamente continua.*

Più generalmente si otterrà nella somma dello sviluppo il valor medio in un punto di discontinuità.

(¹) Per la supposta convergenza degli integrali (11) e (12), i valori medi qui definiti coincidono, come è facile verificare, con la media secondo la definizione più usuale, cioè con la derivata in P della funzione additiva

$$\int_J f(Q) \, d\omega$$

degli insiemi J di S.

L'ipotesi dell'assoluta continuità, che con l'altra delle variazioni limitate riduce la somma dello sviluppo a dipendere esclusivamente dal comportamento della funzione nel punto considerato, limita notevolmente l'arbitrio nella distribuzione dei punti di discontinuità; si può dire che esclude sostanzialmente distribuzioni superficiali.

Queste condizioni sono certamente verificate se $f(\theta_1, \theta_2, \varphi)$ è assolutamente continua rispetto alle sue tre variabili prese tanto complessivamente che a coppie o separatamente - in breve se f è *assolutamente continua su* S (1).

Pertanto *una funzione assolutamente continua su S è sviluppabile in serie di funzioni ipersferiche.*

11. - I risultati esposti, ed altri più o meno speciali che si dedurrebbero senza difficoltà dall'analisi precedente, contengono poi, come casi particolari, criteri di sviluppabilità in serie di polinomi di Hermite. Possiamo dispensarci dall'entrare in ulteriori particolari, e ci limiteremo a formulare esplicitamente il seguente teorema, di interesse sopratutto pratico, che completa il primo risultato esposto nel n. 4:

Una funzione $f(P)$ che all'infuori di taluni punti o linee (regolari) di discontinuità abbia su S derivate prime continue e sommabili è sviluppabile in serie di funzioni ipersferiche in ogni punto che col suo opposto sia di continuità.

In particolare:

Una funzione $f(x_1, x_2)$ avente un numero finito di discontinuità e dotata negli altri punti di C di derivate prime continue e sommabili ammette, a prescindere dai punti di discontinuità e dai simmetrici di questi rispetto al centro, lo sviluppo in serie di polinomi di Hermite (2).

Per far vedere come la presenza di una linea di discontinuità, comunque breve, possa turbare la convergenza di uno

(1) In un particolare sistema di coordinate. Va notato che la proprietà non è invariante di fronte ai cambiamenti di coordinate polari.

(2) A complemento di questo teorema potrebbe chiedersi una condizione perchè si ottengano i valori medi nei punti di discontinuità. Sostanzialmente basterà che nell'intorno di ognuno di questi punti, sopra ogni curva passante

sviluppo in serie di polinomi di HERMITE, sceglieremo l'esempio semplicissimo della funzione

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ per } x_1 < -\cos\frac{\pi}{k} \\ 0 \text{ per } x_1 > -\cos\frac{\pi}{k} \end{cases} \qquad (k \text{ intero} > 1).$$

In questo caso va sostituito nella (8), che dà la somma s_n nel punto (1, 0), all'integrale doppio esteso a C il termine

$$2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{k}\left[V_n^{(2)}\left(-\cos\frac{\pi}{k}\right) + V_{n+1}^{(2)}\left(-\cos\frac{\pi}{k}\right)\right],$$

e di qui segue che

$$\lim_{m\to\infty} s_{2mk-1} = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}\frac{\pi}{k},$$

$$\lim_{m\to\infty} s_{2mk-2} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{sen}\frac{\pi}{k}.$$

Questo esempio mette bene in luce la vera ragione del fatto cui alludevamo in principio, cioè dei nuovi ostacoli alla convergenza che s'incontrano passando dalle serie di funzioni sferiche ordinarie a quelle di funzioni ipersferiche: si è che nell'espressione del termine generale dello sviluppo [formola (2)] il polinomio di LEGENDRE, tendente a zero al divergere dell'indice, viene sostituito dalla funzione $V_n^{(2)}$ che converge allo zero solo *debolmente*, come suol dirsi, cioè previa integrazione.

per esso ed a curvatura limitata, f abbia variazione limitata; tale comportamento, p. es., presenta nell' origine

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$