

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNIBALE COMESSATTI

Sulla connessione e sui numeri base delle superficie algebriche reali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 3 (1932), p. 141-162

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__141_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA CONNESSIONE E SUI NUMERI BASE DELLE SUPERFICIE ALGEBRICHE REALI ⁽¹⁾

di ANNIBALE COMESSATTI

In una Memoria comparsa, con titolo poco diverso, negli Annali di Matematica del 1928 (6) ⁽²⁾, ho dimostrato che l'ordine di connessione totale Z (cfr. n. 1) d'una superficie algebrica reale F può esprimersi colla formula

$$(1) \quad Z = R_2 - 2h,$$

nella quale $R_2 = I + 4q + 2$ ha il noto significato, ed h è la dimensione del modulo (massimo numero di elementi indipendenti) formato da quei cicli bidimensionali della riemanniana V di F che son trasformati in cicli omologhi dalla simmetria S immagine del coniugio di F (cicli reali). Ho poi precisato in $\rho - \bar{\rho}$ ($\bar{\rho}$ numero base reale) la dimensione del sottomodulo formato dai cicli algebrici reali, cioè insomma l'apporto recato ad h dai cicli algebrici, traendo dalla (1) la disuguaglianza

$$(2) \quad Z \leq R_2 - 2(\rho - \bar{\rho}),$$

che contiene come caso particolare la relazione $I + Z = 2(\bar{\rho} - 1)$ da me stabilita nel 1914 (1) per le superficie razionali reali.

Nel presente lavoro, pervengo a rinforzare notevolmente la (2) sostituendovi la doppia disuguaglianza

(¹) Sull'argomento della presente Nota ho riferito al recente Congresso Internazionale dei matematici in Zurigo (Settembre 1932); un sunto di essa, nelle proporzioni di quest'Introduzione, comparirà negli Atti di quel Congresso.

(²) La numerazione in grassetto rinvia all'indice bibliografico posto in fine.

$$(3) \quad 2(\bar{\rho} + p_0) - R_2 \leq Z \leq R_2 - 2(\rho - \bar{\rho}) - 2p_0,$$

e ciò in base alla circostanza, recentemente messa in luce da SEVERI (19) nell'ambito di un importante teorema dello HODGE, che un integrale doppio di prima specie d'una superficie algebrica, non può avere i periodi tutti reali, né tutti immaginari puri; la quale entra in gioco nella questione, appena si appuri, come qui vien fatto, che la parte, per dir così, trascurata, di h , cioè l'intero

$$(4) \quad \tau = h - (\rho - \bar{\rho}),$$

esprime il numero (massimo) dei *periodi reali indipendenti* degli integrali doppi di 1^a specie reali della nostra F , mentre a sua volta (posto, al solito, $\rho_0 = R_2 - \rho$) l'intero

$$(5) \quad \tau' = \rho_0 - \tau = R_2 - h - \bar{\rho},$$

ha il significato analogo relativamente ai *periodi immaginari puri* di quegli integrali.

Le applicazioni della (3) non sono, a dir vero, cospicue; quanto meno non involgono conclusioni *generali* in merito al *problema di HARNACK* sul numero delle falde. Merita forse di avvertire che nella stessa (3) vale, da entrambe le parti, il segno = allora (e soltanto) che ρ_0 assume il valor minimo $2p_0$, cioè nel caso delle superficie per cui il numero degli integrali doppi di prima specie è la metà di quello dei relativi periodi; le quali, sian esse reali o no, costituiscono certo una classe interessante e degna di studio. In particolare la doppia eguaglianza sussiste per tutte le superficie di genere geometrico zero, come del resto avevo già avvertito fin dalla precedente ricerca.

A più espressivi ravvicinamenti, ed a conseguenze per qualche riguardo notevoli, si presta invece la relazione

$$(6) \quad Z = R_2 - 2(\rho - \bar{\rho}) - 2\tau,$$

dedotta dalla (1) a norma della (4); e ciò specialmente in grazia del vario significato — tra cui quello, sostanzialmente già acqui-

sito, ma qui esplicitamente specificato per τ — dei caratteri che vi figurano, e delle disuguaglianze $\tau \geq p_g$, $\tau' \geq p_g$ che si deducono dall'osservazione di SEVERI. Vi ho dedicato, quasi per intero, la seconda parte della Nota, nella quale oltre a riesaminare, in modo più approfondito, i casi, già considerati in (6), delle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve algebriche reali, o di una stessa curva (coppie non ordinate) pervenendo, per i relativi numeri base ρ , $\bar{\rho}$, a limitazioni che ritengo definitive (nel senso che ogni coppia di valori ad esse soddisfacenti corrisponde ad un caso effettivo), ritrovo i valori dei due numeri base inerenti alle superficie iperellittiche di rango 1 già assegnati dal LEFSCHETZ (11), e determinano quelli della coppia (τ, τ') per tutte le *superficie di KUMMER* reali.

Nel corso della ricerca ho poi occasione d'indicare due nuove espressioni del carattere Z che mi sembrano degne d'attenzione.

I.

1. — Premetto qualche richiamo.

In primo luogo circa l'*ordine di connessione totale* Z . Nel caso semplice in cui la F considerata ha una sola falda Φ , questa, ove si precisi opportunamente l'influenza delle singolarità ⁽³⁾, può riguardarsi come una varietà topologica a due dimensioni; per tale Φ , il nostro Z s'identifica col relativo *numero di BETTI* R_1 (mod. 2) ⁽⁴⁾, cioè si esprime colla formola

$$(7) \quad Z = 2 - \alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2,$$

in funzione dei numeri delle *celle* 0—1—2 dimensionali d'un *complesso reticolante* la Φ .

Per una F con più falde, (specificamente m) Z si definisce ancora mediante la (7), intendendosi che i valori di $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$

⁽³⁾ Cfr. Mem. 6, n. 1.

⁽⁴⁾ Quindi è 0 per la sfera, 1 per il piano proiettivo, 2 per l'anello; mentre il *numero di BETTI assoluto* ha, nel secondo caso, il valore 0.

sian computati globalmente; tanto vale, indicandosi con Z_i i singoli ordini di connessione, il porre

$$(8) \quad Z = \sum_{i=1}^m Z_i - 2m + 2.$$

Infine quando la F è priva di punti reali va posto $Z=2$ ⁽⁵⁾ come darebbe la (8) per $m=0$, $Z_i=0$.

Appresso, circa talune modalità tipiche inerenti al comportamento dei cicli bidimensionali, entro alla riemanniana V della nostra F , di fronte alla trasformazione involutoria (simmetria) S immagine del coniugio s di F . Il punto di vista topologico è qui, al solito, quello *assoluto* ⁽⁶⁾; quindi i cicli si suppongono sempre *orientati*, ecc.

Ciclo reale, rispetto ad S , della V , è ogni ciclo α che sia omologo al proprio trasformato $\alpha' = S(\alpha)$ mediante S ; *ciclo immaginario puro*, ogni ciclo che sia omologo all'opposto $-\alpha'$ del trasformato. Ogni ciclo (qui bidimensionale) γ , della V , è dipendente dai cicli reali ed immaginari puri, perchè 2γ è somma d'un ciclo reale $\gamma + \gamma'$ e d'un ciclo immaginario puro $\gamma - \gamma'$; quindi la somma delle dimensioni dei due moduli, riempiti dai cicli dei due tipi, è il *numero di BERTI* (assoluto) R_2 della V . Insomma colle notazioni dell'introduzione, quelle dimensioni sono h e $h = R_2 - h$.

Se in particolare si considerano i soli *cicli algebrici*, allora, come si è già avvertito, la dimensione del primo modulo è $\rho - \bar{\rho}$; quella del secondo sarà quindi $\bar{\rho}$ ⁽⁷⁾, in quanto sommata colla prima deve dare la dimensione del modulo di tutti i cicli algebrici, cioè il numero base (complesso) ρ .

2. - Supponiamo fissata, del resto in modo qualunque, per i cicli bidimensionali di V , una *base intermediaria* $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{R_2}$ rispetto all'ordinaria omologia (senza divisione) cioè una *base*

⁽⁵⁾ Cfr. 5, nota ⁽¹⁸⁾, e 6 nota ⁽¹⁶⁾.

⁽⁶⁾ Secondo la terminologia della recente *Topology* (15) di LEFSCHETZ.

⁽⁷⁾ Si tenga presente (cfr. 6, n. 9) che le curve reali di F son rappresentate in V da cicli immaginari puri.

minima di fronte all'omologia con divisione \simeq . Indicando con $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{R_2}$ i cicli trasformati mediante S , ed esprimendoli in termini della base, avremo una sostituzione lineare a coefficienti interi

$$(9) \quad \gamma'_i \simeq a_{i1} \gamma_1 + a_{i2} \gamma_2 + \dots + a_{iR_2} \gamma_{R_2}, \quad (i = 1, 2, \dots, R_2)$$

di matrice \mathbf{a} , che, per la natura della S , risulterà unimodulare ed involutoria. Una tal sostituzione, può, com'è noto, ridursi su nuovi cicli alla forma ⁽⁸⁾

$$(10) \quad \alpha'_i \simeq \alpha_i, \quad \beta'_j \simeq -\beta_j \\ (i = 1, 2, \dots, h; \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad h + k = R_2),$$

doendosi però avvertire che in, generale, la base α_i, β_j non sarà più minima ⁽⁹⁾, per quanto lo siano separatamente le due basi α_i, β_j per i rispettivi moduli dei cicli reali ed immaginari puri.

A questo punto è il caso d'inserire una conclusione, per dir così, incidentale. La *traccia* della matrice inerente alla sostituzione (10), cioè la somma degli elementi della sua diagonale principale è $h - k = h - (R_2 - h) = 2h - R_2$, quindi, per la (1), vale $-Z$; ma d'altra parte nel passaggio alla trasformata (9) la traccia non cambia, dunque:

L'ordine di connessione totale Z d'una superficie algebrica reale F , è eguale alla traccia, cambiata di segno, della matrice \mathbf{a} inerente alla sostituzione operata dalla simmetria S immagine del coniugio di F (entro alla relativa riemanniana V) sui cicli bidimensionali d'una base minima (rispetto all'operazione \simeq) ⁽¹⁰⁾.

⁽⁸⁾ Cfr. i miei lavori 2, § 1 e 4, § 1.

⁽⁹⁾ Il determinante della sostituzione che fa passare dai cicli γ_h agli α_i, β_j , ha per valore assoluto 2^λ , dove λ è la caratteristica (mod. 2) di \mathbf{a} . Cfr. i lavori sopra citati.

⁽¹⁰⁾ Colgo l'occasione per segnalare un'altra espressione di Z che mi si è presentata nel corso di altra ricerca: Entro la varietà W ad otto dimensioni che rappresenta le coppie ordinate di punti della V (prodotto topolo-

3. - Introduciamo ora la considerazione degl' *integrali doppi di prima specie reali*, appartenenti alla nostra F (di genere geometrico p_g) e dei relativi periodi. Si vede subito che di cosiffatti integrali *reali* se ne possono assegnare p_g indipendenti; giacchè assunta, com'è lecito (a meno d'una proiezione da un centro reale) la F , d'ordine n , in S_3 , il sistema delle relative aggiunte d'ordine $n-4$ è reale, perchè determinato razionalmente da F , quindi assimilabile, come insieme dei suoi elementi (considerati di fronte alla trasformazione di coniugio dell'ambiente) ad uno spazio reale Sp_g .

I periodi di quest'integrali ai cicli α_i sono reali (ed anzi ogni periodo reale è una loro combinazione lineare a coefficienti interi) e quelli ai cicli β_j immaginari puri: però nè gli uni nè gli altri sono in generale indipendenti, giacchè ogni combinazione lineare a coefficienti interi dei cicli α_i (e analogamente dei β_j) che sia un *ciclo algebrico*, dà luogo ad un periodo nullo: e di tali combinazioni lineari ne esistono, come sappiamo $\rho - \bar{\rho}$ (risp. $\bar{\rho}$) indipendenti. Il numero dei periodi reali *indipendenti* è pertanto $h - (\rho - \bar{\rho}) = \tau$, quello dei periodi immaginari puri $h - \bar{\rho} = R_2 - h - \bar{\rho} = \tau'$; ed è chiaro che, ordinati opportunamente gli α_i, β_j si potranno assumere come tali i periodi assunti ai cicli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\tau; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\tau'}$, avendosi nell'insieme una tabella con p_g righe e $\tau + \tau' = \rho_0$ colonne, delle quali τ di elementi reali e τ' di elementi immaginari puri. In generale tale tabella non sarà primitiva; tuttavia resta il fatto che ogni altro periodo è una combinazione lineare a coefficienti razionali di quelli che le appartengono.

A questo punto interviene l'osservazione ricordata del SEVERI a mostrare che τ e τ' non possono essere inferiori a p_g . Ed invero se fosse $\tau < p_g$ si potrebbe costruire una combinazione lineare a coefficienti reali dei nostri p_g integrali, (cioè un integrale reale) coi periodi ai cicli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\tau$ nulli, quindi con tutti i periodi immaginari puri; ed analogamente, se fosse $\tau' < p_g$ si potrebbe costruire un integrale coi periodi tutti reali.

gico $V \times V$ siano Ω e Γ i due cicli quadrimensionali (opportunamente orientati) che rappresentano la corrispondenza identica (in V) e la simmetria S . Allora se (Ω, Γ) è il relativo *indice di KRONECKER*, si ha $Z = 2 - (\Omega, \Gamma)$.

Dopo ciò non resta che sostituire nelle disuguaglianze

$$(11) \quad \tau \geq p_g, \quad \tau' \geq p_g,$$

a τ e τ' i valori (4) (5), e tener conto della (1), per dedurne senz'altro le (3).

II.

4. - Si vede subito che il caso dell'eguaglianza si presenta *simultaneamente* nelle (11) allora e soltanto che ρ_0 assume il *valor minimo* $2p_g$. Di conseguenza anche nella (3) vale, da entrambe le parti, il segno =, onde, tenuto conto che $R_2 = \rho + \rho_0 = \rho + 2p_g$ si può scrivere

$$(12) \quad Z = 2\bar{\rho} - \rho,$$

od anche, in base alla $R_2 = I + 4q + 2$ ($q = p_g - p_a$)

$$(12') \quad I + Z = 2(\bar{\rho} + p_g - 2q - 1).$$

In particolare le (12) (12') sussistono per le *superficie di genere geometrico zero*, ed allora la (12') si riduce alla già ricordata $I + Z = 2(\bar{\rho} - 1)$, rispetto alla quale essa rappresenta un, sia pur lieve, progresso.

Merita d'esser rilevata qualche conseguenza della (12). Sostituendo per Z la sua espressione $\Sigma Z_i - 2m + 2$ si ottiene $2m = \rho - 2\bar{\rho} + 2 + \Sigma Z_i$, quindi, in forza di $\Sigma Z_i \geq 0$, la disuguaglianza

$$(13) \quad m \geq \frac{\rho}{2} - \bar{\rho} + 1,$$

la quale porge un *limite inferiore per il numero delle falde*, espressivo soltanto quando sia $\rho > 2\bar{\rho} - 2$.

Aggiungasi che se la nostra F con $\rho_0 = 2p_g$ (in particolare con $p_g = 0$) è *priva di punti reali*, deve aversi $\rho = 2\bar{\rho} - 2$,

come dà la (12) per $Z=2$. L'osservazione non può tuttavia invertirsi, giacchè il valore $Z=2$ appartiene anche a superficie con falde reali.

Sta comunque il fatto che se $\rho \pm 2\bar{\rho} - 2$ (così in particolare se $\rho=1$) *la superficie ha sempre punti reali*. Quando $\rho > 2\bar{\rho} - 2$ una conclusione più precisa si attinge dalla disuguaglianza (13); ed anzi avendosi, per la (12), $Z > 2$, cioè $\Sigma Z_i < 2m$, una delle Z_i ha il valore 0 od 1, onde *la superficie ha almeno una falda del tipo di connessione della sfera o del piano proiettivo*; invece quando $\rho < 2\bar{\rho} - 2$ si ha $\Sigma Z_i > 2m$, quindi *esiste almeno una falda con ordine di connessione $Z_i > 2$* .

Nel caso generale in cui $\rho_0 > 2p_0$, la (3) non conduce, nei riguardi di m , a conseguenze *general*i degne di rilievo.

5. - Andiamo ora ad occuparci di alcune applicazioni e verifiche della (6), incominciando dai casi delle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve algebriche reali C e C' , e, per $C=C'$, anche le coppie non ordinate. Essi sono già stati considerati, ma solo per $C=C'$, nella Memoria 6 ai fini della verifica di (1); qui, in base al significato precisato per τ ed alle disuguaglianze (11), l'analisi vien spinta assai più in là.

Sia dapprima F la *superficie delle coppie di punti di due curve reali* C, C' , di generi p, p', V , come prima, la relativa riemanniana, *prodotto* (topologico) $\Omega \times \Omega'$ delle riemanniane di C, C' . Se P, P' son punti delle due curve, s, s' le simmetrie di Ω, Ω' immagini delle trasformazioni di coniugio, e si pone $\bar{P} = s(P), \bar{P}' = s'(P')$, i due punti $P \times P', \bar{P} \times \bar{P}'$ di V si corrispondono in una simmetria S ; ed è naturalmente con riferimento ad essa che la F si considera come *superficie reale*.

I punti reali di F provengono dalle coppie di punti reali di C, C' ; onde se le due curve hanno risp. α ed α' rami reali la F ha $\alpha \alpha'$ falde, ciascuna delle quali, essendo topologicamente il prodotto di due circuiti unidimensionali, ha la connessione del toro (cfr. 5. n. 5). Dunque tutte le Z_i sono eguali a 2, ed in definitiva lo risulta anche Z ; pertanto la (6) per il nostro caso diviene

$$(14) \quad R_2 = 2(\rho - \bar{\rho} + \tau + 1).$$

Ricordiamo ora alcune note proprietà della F in discorso, che sussistono a prescindere dalla realtà di C, C' ⁽¹⁾. Se $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p}$ è un sistema fondamentale di cicli (lineari) della Ω (non c'interessa che sia primitivo, cioè base minima) ed analogamente $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{2p}$, un sistema fondamentale per Ω' , i $4pp' + 2$ cicli bidimensionali della V

$$(15) \quad P \times \Omega', \Omega \times P', \Gamma_{rs} = \gamma_r \times \gamma'_s, \quad (r=1, \dots, 2p; s=1, \dots, 2p')$$

costituiscono pure un sistema fondamentale (nel senso che sono linearmente indipendenti ed ogni altro ciclo bidimensionale è linearmente legato ad essi): quindi $R_2 = 4pp' + 2$. I primi due cicli sono evidentemente algebrici (talchè $\rho \geq 2$); la presenza di altri cicli algebrici implica fra C e C' i legami che andiamo a richiamare.

Siano $u_1, u_2, \dots, u_p; u'_1, u'_2, \dots, u'_p$, due sistemi d'integrali abeliani di prima specie indipendenti di C, C' , $\omega = \|\omega_{ir}\|$, $\omega' = \|\omega'_{is}\|$ le matrici dei relativi periodi ai cicli γ_r, γ'_s . Gli u_i, u'_k si possono in modo noto interpretare come integrali di PICARD della F (la quale ha l'irregolarità $q = p + p'$), e combinandoli a due a due si formano $p_p = pp'$ integrali doppi indipendenti di prima specie

$$(16) \quad U_{ik} = \iint du_i du'_k;$$

inoltre il periodo di U_{ik} al ciclo Γ_{rs} vale $\omega_{ir} \omega'_{ks}$.

Suppongasì ora che in V esista un *ciclo algebrico* indipendente dai due già menzionati. Un suo opportuno multiplo sarà omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi dei cicli (15); togliendo la parte dipendente dai due primi, resterà un ciclo algebrico

$$(17) \quad \Delta \sim \sum_{r,s} a_{rs} \Gamma_{rs},$$

⁽¹⁾ Cfr. LEFSCHETZ, 13, pag. 52 ed 85.

colle a_{rs} intere e non tutte nulle. Esprimendo che i periodi dagl'integrali U_{ik} al ciclo Δ sono nulli, si trovano le relazioni

$$(18) \quad \sum_{r,s} a_{rs} \omega_{ir} \omega'_{ks} = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots, p)$$

le quali vengono a dirci che la forma bilineare

$$(19) \quad \sum_{r,s} a_{rs} x_r y_s,$$

è una *forma simultanea di RIEMANN* (SCORZA, 16) delle matrici ω , ω' . Viceversa, se tale è la (19), il ciclo Δ espresso dalla (17) e algebrico in forza d'un *teorema fondamentale di LEFSCHETZ* (12, n. 21, e 13, IV, n. 29); e dopo ciò da facili considerazioni si raccoglie che il numero dei cicli algebrici indipendenti di V , cioè il numero base ρ di F vale $\lambda + 2$ dove λ è il numero delle forme indipendenti (19), cioè il *carattere simultaneo di SCORZA* delle matrici ω , ω' .

Esauriti i richiami, introduciamo ora l'*ipotesi della realtà di C, C'*. Con riguardo ad essa potremo scegliere:

a) gl'integrali u_i ed u'_k reali, con che lo saranno, rispetto ad S , i p_g integrali doppi U_{ik} ;

b) i cicli γ_r (ed analogamente γ'_s) in modo che i primi p siano reali e gli ultimi p immaginari puri ⁽¹²⁾. Si vede allora subito, tenendo conto della definizione di S , che tra i Γ_{rs} risultan reali quelli con indici entrambi $\leq p$ od entrambi $> p$ (cioè ottenuti combinando due cicli γ_r , γ'_s entrambi reali od entrambi immaginari puri) immaginari puri gli altri; talchè, ove si tenga conto che i due cicli $P \times \Omega'$, $P' \times \Omega$, come immagini di curve reali, sono immaginari puri, risulta che, per la nostra F , i due caratteri h , k del n. 2 valgono risp. $2pp'$, $2pp' + 2$.

Se Δ è un ciclo algebrico avente l'espressione (17), separando nel secondo membro la parte dipendente dai Γ_{rs} reali, da

⁽¹²⁾ La scelta è lecita, perchè il carattere h della sostituzione, analoga alla (9), ed inerente ai cicli *lineari* d'una riemanniana, ha il valore p (p genere, irregolarità bidimensionale). Cfr. i miei lavori 2, n. 2, e 4, n. 4 ed anche LEFSCHETZ (10).

quella che contiene i Γ_s , immaginari puri, si può scrivere $\Delta \sim \Delta_1 + \Delta_2$, Δ_1 essendo un ciclo reale e Δ_2 immaginario puro. Inoltre Δ_1 e Δ_2 sono algebrici, perchè il periodo d'un qualunque integrale U_{ik} al ciclo Δ_1 è la parte reale del periodo nullo relativo a Δ , quindi è anch'esso nullo ⁽¹³⁾. Ciò viene a dire che ogni forma (19) è somma di due altre, che diremo risp. del 1° e del 2° tipo, la prima delle quali dà origine ad un ciclo reale, la seconda ad un ciclo immaginario puro; al che si perviene anche più elementarmente separando il reale dall'immaginario nella (18).

Ogni forma riemanniana simultanea delle matrici ω, ω' dipende, per quel che si è visto, dalle forme del 1° e 2° tipo, ed ogni forma d'un tipo è ovviamente indipendente da quelle dell'altro; e pertanto se i due moduli (tipi) contengono risp. μ, ν forme indipendenti, sarà $\lambda = \mu + \nu$. Corrispondentemente avremo μ cicli reali e ν cicli immaginari puri del tipo (17), complessivamente indipendenti, e tali che ogni altro ciclo algebrico di V è dipendente da essi e dai due cicli $P \times \Omega', \Omega \times P'$. Se ne deduce che i moduli formati dai cicli algebrici reali, e da quelli immaginari puri hanno risp. le dimensioni $\mu, \nu + 2$, onde (n. 1) risulta

$$(20) \quad \rho - \bar{\rho} = \mu, \quad \bar{\rho}' = \nu + 2, \quad \rho = \lambda + 2, \quad (\lambda = \mu + \nu),$$

ed infine

$$(21) \quad \tau = h - (\rho - \bar{\rho}) = 2pp' - \mu, \quad \tau' = h - \bar{\rho} = 2pp' - \nu.$$

Si verifica subito che la (6) resta soddisfatta dai valori ottenuti per $R_2, \rho - \bar{\rho}, \tau$; ma la conclusione più interessante scende dal portare i valori di τ, τ' nelle disuguaglianze (11), tenendo conto dei valori che le (20) porgono per μ, ν, λ . Tal conclusione così si enuncia:

I numeri base, complesso e reale, della superficie che rap-

⁽¹³⁾ Si può anche osservare che il trasformato $\bar{\Delta}$ di Δ mediante S è algebrico, e che $\bar{\Delta} \sim \Delta_1 - \Delta_2$, quindi $2\Delta_1 \sim \Delta + \bar{\Delta}$ e $2\Delta_2 \sim \Delta - \bar{\Delta}$ sono pure algebrici.

presenta le coppie di punti di due curve algebriche reali C, C' , di generi p, p' , soddisfano alle limitazioni

$$(22) \quad 2 \leq \rho \leq 2pp' + 2, \quad 2 \leq \bar{\rho} \leq pp' + 2, \quad \rho - \bar{\rho} \leq pp'.$$

Non sembra semplice appurare se tutti i valori compatibili con queste disuguaglianze (la prima delle quali è conforme al limite superiore di SCORZA, $\lambda \leq 2pp'$) si presentino in casi effettivi, benchè ciò sia da ritenersi probabile; comunque, la limitazione è notevole, come può vedersi su esempî, quali il seguente relativo a $p = 1, p' = 2$

ρ	2	3	4	5	6
$\bar{\rho}$	2	2, 3	2, 3, 4	3, 4	4

È importante osservare che *quando le curve C, C' sono birazionalmente identiche*, cioè F è la superficie delle coppie ordinate dei punti d'una curva reale C , *i limiti inferiori di $\rho, \bar{\rho}$ devono aumentarsi di un'unità*, cioè si ha $\rho \geq 3, \bar{\rho} \geq 3$, l'eguaglianza sussistendo per una C a moduli generali; in quanto allora esiste sempre un ciclo algebrico (immaginario puro) indipendente dai $P \times \Omega', P' \times \Omega$ ed è l'immagine Γ dalla curva (reale) di F rappresentante le coppie di punti coincidenti di C (la corrispondenza identica). Ciò si lega al fatto che *due curve coincidenti son sempre vincolate*, il vincolo essendo per lo meno espresso dalla classica relazione (alternata) di RIEMANN (trasportata dalle retrosezioni ai cicli γ_r), la quale è precisamente quella che discende dall'espressione (17) del ciclo Γ ⁽¹⁴⁾. Poichè Γ è immaginario puro, la forma corrispondente, ai cicli γ_r , è del 2° tipo; ciò

⁽¹⁴⁾ Ciò consegue facilmente dalla teoria topologica delle corrispondenze di LEFSCHETZ (14). La considerazione del ciclo Γ immagine della corrispondenza identica entro la varietà delle coppie (ordinate) di punti d'una varietà algebrica V_n è fondamentale per la dimostrazione, data dallo HODGE (8), dell'esistenza di (almeno) una relazione bilineare tra i periodi degl'integrali n — pli della V_n . Cfr. anche KÄHLER (9).

riflette anche, a norma d'un mio risultato, il suo carattere di *forma principale* ⁽¹⁵⁾.

Così in particolare, mentre per la F relativa a due curve ellittiche birazionalmente distinte la coppia $(\rho, \bar{\rho})$ può avere i quattro valori $(2, 2)$ $(3, 2)$ $(3, 3)$ $(4, 3)$, essi si riducono ai due soli $(3, 3)$ $(4, 3)$ allorchè le due curve coincidono in un'unica C , il secondo caso presentandosi quando la C è *singolare* (a moltiplicazione complessa) ⁽¹⁶⁾.

6. — Andiamo ora a considerare, conservando per la C le notazioni precedenti, la superficie Φ immagine delle coppie *non ordinate* dei suoi punti. Essa è in corrispondenza $(1, 2)$ colla F di cui sopra; e due punti $P \times Q$, $Q \times P$ di F omologhi d'uno stesso punto di Φ sono associati in una corrispondenza involutoria T della Φ in sè.

Per gl'invarianti fondamentali della Φ , si hanno, dal SEVERI ⁽¹⁷⁾, i valori $q = p$, $p_g = \binom{p}{2}$, $R_2 = \binom{2p}{2} + 1$; inoltre, come ho fatto vedere altrove (5, n. 5) $Z = p + 1$.

Un sistema fondamentale per i cicli bidimensionali della riemanniana V di Φ , è dato, con ovvio significato dei simboli, dai $\binom{2p}{2} + 1$ cicli

$$(23) \quad (P, \Omega), \quad H_{rs} = (\gamma_r, \gamma_s) \quad (17); \quad (r < s)$$

⁽¹⁵⁾ Vedi la mia Memoria 2, n. 10.

⁽¹⁶⁾ La superficie delle coppie ordinate di punti d'una curva reale C , ammette anche un altro modello reale, corrispondente alla simmetria $P \times P \longleftrightarrow \bar{P} \times \bar{P}$, da me studiato nei lavori 5, 6; qui per non aggravare l'esposizione coll'esame di casi meno tipici, non se ne discorre. Colgo l'occasione per avvertire che i valori dei numeri base $\rho, \bar{\rho}$, indicati, per il caso di curve a moduli generali, nella Memoria 6, devono essere tutti aumentati di 1; il che nulla toglie alla validità delle conclusioni nelle quali quei numeri entrano per il tramite della differenza $\rho - \bar{\rho}$.

⁽¹⁷⁾ Non ci tratteniamo a provare dettagliatamente che il sistema di questi cicli è fondamentale. La dimostrazione può affidarsi ai ragionamenti del n. 7 di 6, dopo aver avvertito, che, nella riemanniana di F , i cicli

nel seguito si supponrà che $H_{r,s}$ sia orientato come il $\Gamma_{r,s}$ di F con cui è in corrispondenza biunivoca, notandosi che tal convenzione, estesa anche al caso $r > s$, porge $H_{r,s} = -H_{s,r}$. Avvertasi ancora che (γ_r, γ_s) non è un ciclo, ma una varietà aperta omeomorfa al *nastro di Möbius* ⁽¹⁸⁾.

Se P, Q son due punti di C , $u_i(P), u_i(Q)$ i relativi valori dell'integrale u_i , calcolati da una prefissata origine lungo cammini opportuni, le p funzioni del punto (P, Q) di Φ

$$U_i = u_i(P) + u_i(Q),$$

sono altrettanti integrali semplici di prima specie indipendenti; e mediante essi si formano i $p_g = \binom{p}{2}$ integrali doppi di prima specie indipendenti

$$(24) \quad U_{ik} = \iint dU_i dU_k \quad (19). \quad (i < k)$$

Ora è facile provare che il periodo di U_{ik} al ciclo (γ_r, γ_s) è eguale al determinante del 2° ordine formato coi periodi di u_i, u_k ai cicli γ_r, γ_s , cioè ha il valore

$$(25) \quad \omega_{ir} \omega_{ks} - \omega_{is} \omega_{kr}.$$

Invero si individuino i punti di γ_r, γ_s mediante due coordinate reali u, v (variabili ad es. tra 0 e 1); allora le stesse u, v saranno coordinate curvilinee sul ciclo $H_{r,s}$, ed il valore di U_i in un suo punto risulterà somma d'una funzione $u_i(P) = u_i(u)$ della sola u , con una funzione $u_i(Q) = v_i(v)$ della sola v . Il nostro periodo sarà poi dato da

$(PQ) + (QP), \Gamma_{r,s} - \Gamma_{s,r}$ ($r < s$) trasformati dei (23) mediante la corrispondenza (1, 2) tra Φ ed F' costituiscono un sistema fondamentale per i cicli trasformati in cicli omologhi da T .

⁽¹⁸⁾ Cfr. la mia Memoria 5, n. 5.

⁽¹⁹⁾ SEVERI, 17, n. 9.

$$\iint_{H_{rs}} \frac{D(U_i, U_k)}{D(u, v)} du dv = \iint_{H_{rs}} \left(\frac{du_i}{du} \frac{dv_k}{dv} - \frac{du_k}{du} \frac{dv_i}{dv} \right) du dv \quad (20),$$

cioè, tenuto conto che le derivate $\frac{du_i}{du}$ ecc., son funzioni d'una sola variabile, da

$$\int_{\gamma_r} \frac{du_i}{du} du \int_{\gamma_s} \frac{dv_k}{dv} dv - \int_{\gamma_r} \frac{du_k}{du} du \int_{\gamma_s} \frac{dv_i}{dv} dv,$$

che conduce senz'altro alla (25).

Da questo punto in poi le cose procedono parallelamente al n.º precedente. Anzitutto il ciclo (P, Ω) è algebrico, è, se la C è reale, immaginario puro; poi da un qualunque altro ciclo algebrico, combinato linearmente con (P, Ω) si può dedurre un ciclo, pure algebrico, avente l'espressione

$$(26) \quad \Delta = \sum_{r, s} a_{rs} H_{rs}, \quad (r < s)$$

e la condizione dell'algebricità di un tal Δ , implicando l'annullarsi dei relativi periodi degli integrali doppi di prima specie, porta, per il tramite delle espressioni (25), a ciò, che la *forma bilineare alternata*

$$(27) \quad \sum_{r, s} a_{rs} x_r y_s,$$

è una *forma alternata di RIEMANN* della matrice ω . E reciprocamente da ogni tal forma si deduce un ciclo algebrico Δ .

Quando, con riguardo alla realtà di C , si scelgono i cicli γ_i come al n. prec., e gli integrali u_i reali, con che risultano reali anche gli U_i , U_{ik} di Φ , si vede che, tra i cicli H_{rs} , $2 \binom{p}{2} = p^2 - p$ (cogl'indici r, s entrambi minori o entrambi

(20) L'orientazione di H_{rs} interviene a fissare l'ordine dei differenziali du, dv .

maggiori di p) sono reali, e gli altri p^2 immaginari puri, quindi, tenuto conto anche di (P, Ω) che i numeri h, k del n. 2 hanno risp. i valori $p^2 - p, p^2 + 1$.

Ha poi luogo a farsi, analogamente al n. prec., la distinzione delle (27) in forme del 1° e del 2° tipo, dovendosi osservare che in ogni caso esiste (almeno) una forma del 2° tipo (cfr. la fine del n. prec.) cioè un ciclo immaginario puro indipendente da (P, Ω) , talchè $\rho \geq 2, \bar{\rho} \geq 2$. Dopo ciò, se μ e ν son le dimensioni dei moduli riempiti dalle forme dei due tipi, quindi $\chi = \mu + \nu - 1$ l'indice di singolarità della C (della matrice ω), ragionando come al n. prec. si deduce che

$$(28) \quad \rho = \chi + 2, \quad \bar{\rho} = \nu + 1, \quad \rho - \bar{\rho} = \mu,$$

quindi

$$(29) \quad \tau = h - (\rho - \bar{\rho}) = p^2 - p - \mu, \quad \tau' = k - \bar{\rho} = p^2 - \nu,$$

ed infine, per il tramite delle (11), ricordando che $p_g = \binom{p}{2}$ si perviene alla conclusione seguente:

I numeri base, complesso e reale, della superficie che rappresenta le coppie non ordinate di punti d'una curva algebrica reale C , di genere p , soddisfano alle limitazioni

$$(30) \quad 2 \leq \rho \leq p^2 + 1, \quad 2 \leq \bar{\rho} \leq \binom{p+1}{2} + 1, \quad \rho - \bar{\rho} \leq \binom{p}{2}.$$

È poi quasi superfluo far rilevare che la (6) resta verificata dai valori assegnati per $Z, R_2, \rho - \bar{\rho}, \tau$. Si noterà infine che il confronto delle (30) (28) fornisce per χ il noto limite superiore (SCORZA) $p^2 - 1$.

7. - Nel caso particolare $p = 2$ le (30) divengono

$$2 \leq \rho \leq 5, \quad 2 \leq \bar{\rho} \leq 4, \quad \rho - \bar{\rho} \leq 1,$$

e forniscono, come possibili, per la coppia $(\rho, \bar{\rho})$ i valori

$$(31) \quad (2, 2) (3, 2) (3, 3) (4, 3) (4, 4) (5, 4).$$

La Φ è allora una superficie di JACOBI, che però contiene una

curva eccezionale reale immagine delle coppie della g_2^1 di C . Se la si fa sparire mediante una trasformazione birazionale reale, passando così ad una Φ priva di curve eccezionali, entrambi i numeri base diminuiscono di un'unità, e si cade sui valori

$$(31') \quad (1, 1) (2, 1) (2, 2) (3, 2) (3, 3) (4, 3),$$

già assegnati dal LEFSCHETZ (11) per le superficie iperellittiche di rango 1 (superficie di PICARD) che contengono come casi particolari quelle di JACOBI. Val la pena di rifare tal deduzione con appoggio ai nostri risultati, e nell'ordine d'idee precedente, che d'altronde si ravvicina in molti punti a quello del LEFSCHETZ.

Una F di PICARD reale può avere 1, 2 o 4 falde (a seconda che il carattere reale λ della simmetria a cui è legata la realtà è 2, 1, 0) ma in ogni caso esse hanno tutte la connessione del toro ⁽²¹⁾ quindi $Z=2$. Inoltre $R_2=6$, e pertanto, a norma della (6)

$$(32) \quad \bar{\rho} = \tau + \rho - 2.$$

È noto, e del resto risulterà anche dal seguito, che $\rho \leq 4$; vediamo quel che può dirsi di τ .

Si fissino per la F due integrali semplici di 1^a specie reali u_1, u_2 , e quattro cicli lineari indipendenti $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ dei quali i due primi reali, i restanti immaginari puri: sia ω la corrispondente matrice dei periodi di u_1, u_2 . L'integrale doppio di prima specie $J = \iint du_1 du_2$ risulterà anch'esso reale.

Mediante un algoritmo dovuto a LEFSCHETZ, ad ogni coppia di cicli lineari γ, δ della V relativa ad F , si può associare un ciclo bidimensionale, che qui verrà indicato con (γ, δ) ⁽²²⁾; ed il relativo periodo di J , è il determinante dei periodi di u_1, u_2 lungo γ, δ . Con tale algoritmo si deducono dai γ_i sei cicli bidimensionali (indipendenti) $(\gamma_1, \gamma_2) (\gamma_3, \gamma_4); (\gamma_1, \gamma_3) (\gamma_1, \gamma_4) (\gamma_2, \gamma_3) (\gamma_2, \gamma_4)$

⁽²¹⁾ Cfr. LEFSCHETZ, 10, e i miei lavori 2, n. 7 e 7, pag. 133, 3.

⁽²²⁾ LEFSCHETZ, 12, II₁, § 2. Quando γ, δ possono inserirsi in una base minima il ciclo (γ, δ) resta associato ad una ben determinata faccia bidimensionale del relativo parallelepipedo dei periodi (uscante da un vertice prefissato); nel caso generale la definizione può darsi esprimendo γ, δ in termini d'una base minima, ed attribuendo al simbolo (γ, δ) carattere di-

che danno per J , 2 periodi reali, e 4 immaginari puri ⁽²³⁾. Dunque τ , che per la 1^a delle (11) è ≥ 1 , non può essere che 2 od 1.

Ogni relazione lineare a coefficienti interi tra i sei periodi predetti, è per la ω una *relazione riemanniana alternata*, e la corrispondente combinazione lineare dei (γ_i, γ_k) è un ciclo algebrico, perchè il relativo periodo di J è nullo. Dunque, come del resto è ben noto, $\rho = \chi + 1$ essendo χ l'indice di singolarità della ω , e siccome $\chi \leq 3$, così $\rho \leq 4$.

D'altronde se $\rho = 1$ è evidentemente $\bar{\rho} = 1$, quindi $\tau = 2$ ⁽²⁴⁾, e se $\rho = 4$ i periodi indipendenti si riducono a 2, quindi deve essere $\tau = 1$ altrimenti tutti i periodi di J sarebbero reali. Sono pertanto possibili i casi $\rho = 1, \tau = 2, \rho = 2, 3, \tau = 1, 2, \rho = 4, \tau = 1$ che, per il tramite della (32) conducono ai valori (31').

Sorvoliamo sulla questione di effettiva esistenza dei tipi, che involgerebbe qualche minuzia e che del resto il LEFSCHETZ e più recentemente il CHERUBINO (20) hanno già appurata.

8. - Nei casi precedentemente considerati il numero τ dei periodi reali degl'integrali doppi reali di prima specie si è potuto determinare direttamente, in base ad espressioni effettive, ed alla precisa identificazione dei cicli bidimensionali. Non verificandosi circostanze così favorevoli ad una valutazione diretta, può soccorrere allo scopo la relazione (6), semprechè si possano valutare direttamente i valori dei caratteri R_2, Z e $\rho - \bar{\rho}$.

Le condizioni per un'applicazione in questo senso si verificano per gli otto tipi reali delle *superficie di KUMMER* ⁽²⁵⁾.

tributivo rispetto all'addizione: $(\gamma + \gamma', \delta) = (\gamma, \delta) + (\gamma', \delta)$. Si prova facilmente che (γ, δ) è indipendente dalla base minima di riferimento, e ne segue che se una trasformazione biunivoca S di V in sè muta γ in γ' e δ in δ' , essa muta (γ, δ) in (γ', δ') .

⁽²³⁾ Effettivamente, come può dedursi dall'ultima osservazione della precedente nota, anche i cicli (γ_1, γ_2) (γ_3, γ_4) son reali, e gli altri immaginari puri; qui però non è strettamente necessario tenerne conto.

⁽²⁴⁾ In tal caso l'unica forma riemanniana alternata di ω , essendo principale, dà un ciclo immaginario puro (lega i soli periodi immag. puri di J). Cfr. nota ⁽¹⁵⁾.

⁽²⁵⁾ Per i particolari della classificazione appresso considerati, rinvio alla mia Memoria 3, n. 25.

Per una superficie F di KUMMER di ha $p_g = 1$, $\rho = 17$, $R_2 = 22$ ⁽²⁶⁾, quindi dalla (6) si ricava

$$(33) \quad \tau = \bar{\rho} - 6 - \frac{1}{2} Z.$$

Una base (complessa) della F si può formare aggregando ad una sezione piana i 16 intorni dei punti doppi; quando F è reale, lo è anche la sezione piana, e se, tra i punti doppi, α sono reali, e 2β a due a due coniugati, essi danno $\alpha + \beta$ curve reali indipendenti (gli α intorni reali e le somme delle coppie d'intorni coniugati) che, unitamente alla sezione piana, porgono una base reale. Dunque $\bar{\rho} = \alpha + \beta + 1$.

Per la determinazione di Z occorre considerare, direttamente e separatamente, i vari tipi, in base alla classificazione del mio ricordato lavoro:

Classe I. — La F ha una sola falda, e può avere 16, 8 o 4 punti doppi reali, a seconda che il relativo carattere λ vale 0, 1, 2 (nell'ultimo caso si presenta una distinzione fra il tipo diasimmetrico e quello ortosimmetrico, che qui non interessa); quindi risp. $\bar{\rho} = 17, 13, 11$. Per la determinazione di Z devesi tener presente che l'unica falda di F risulta dall'insieme d'un certo numero (risp. 8, 4, 2) di regioni o zone collegate attraverso ai punti singolari ⁽²⁷⁾; ciascuna di esse ne contiene quattro (reali) e si può in un primo tempo reticolare come un tetraedro, ponendo in quei punti i vertici delle quattro faccie triangolari.

Una tal reticolazione non si confà però al calcolo di Z , in quanto (a parte il fatto che se i punti doppi reali si considerano come *punti* la falda risulta *non omogenea*) quel carattere dev'essere calcolato *come se le singolarità fossero risolte*, cioè in relazione ad una trasformata reale di F priva di punti doppi e di curve eccezionali, il che porta a sostituire ad ogni punto

⁽²⁶⁾ SEVERI, 18, nn. 8, 9.

⁽²⁷⁾ Ogni punto doppio reale è comune a 2 regioni, e due regioni o non hanno punti doppi comuni, o ne hanno 2λ . Nella citata Memoria 3, per una svista materiale di trascrizione è detto "un punto singolare", in luogo di " 2λ punti singolari",.

doppio un circuito reale. Topologicamente ciò equivale a sostituire all'attacco di due regioni il collegamento ottenuto *smussando* ciascun tetraedro in ogni vertice mediante una sezione piana abbastanza prossima, ed identificando poi i punti corrispondenti dei due contorni triangolari che ogni punto doppio così produce ⁽²⁸⁾. Dopo ciò ogni regione continua a restar divisa in 4 facce che da triangolari sono divenute esagonali, quindi il numero delle facce è il quadruplo di quello delle regioni, il numero degli spigoli è triplo di quello delle facce, il numero dei vertici, triplo di quello dei punti doppi reali. Con tali elementi, si calcola subito, mediante la *formula di EULERO* (7) il valore di Z , e si trova risp. $Z = 18, 10, 6$; dopo di che la (33), porge in ogni caso $\tau = 2$.

Classe II. - F non ha punti doppi reali, quindi $\bar{\rho} = 9$, ed ha una ($\lambda = 1$) o due ($\lambda = 2$) falde, ciascuna delle quali è immagine simultanea di due falde d'una *superficie di JACOBI* reale in corrispondenza (2, 1) con F , risultando con ciascuna di esse in corrispondenza di omeomorfismo. Pertanto (cfr. n° prec.) ogni falda di F ha la connessione del toro, quindi $Z = 2$, ed infine, per la (33), $\tau = 2$.

Classe III. - F non ha punti reali, nè ordinari ($Z = 2$) nè singolari ($\bar{\rho} = 9$); dunque, come prima, $\tau = 2$.

Classe IV. - F è ancora priva di punti semplici reali ($Z = 2$) ma possiede 4 punti doppi reali (isolati), talchè $\bar{\rho} = 11$. In questo caso la (33) dà per τ il valore 4.

Tenendo conto che $\tau' = 5 - \tau$ si conclude in definitiva che:

L'integrale doppio di prima specie reale d'una superficie di KUMMER reale, ammette, salvo un'eccezione, 2 periodi indipendenti reali e 3 periodi immaginari puri. L'eccezione è offerta dal tipo privo di punti semplici reali e con 4 punti doppi reali (isolati); allora si hanno 4 periodi reali ed un solo periodo immaginario puro.

(28) Corrispondenti nel senso in cui lo sono, sulle due basi d'una biperamide triangolare, le coppie di punti che appartengono ad una stessa generatrice.

BIBLIOGRAFIA

- 1 - **Comessatti A.** *Sulla connessione delle superficie razionali reali.* Annali di Matematica (3), T. 23 (1914) pp. 215-284.
- 2 - — *Sulle varietà abeliane reali I.* Ibid. (4), T. 2 (1924-25) pp. 67-106.
- 3 - — *Sulle varietà abeliane reali II.* Ibid. (4), T. 3 (1925-26) pp. 27-71.
- 4 - — *Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche.* Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, T. 85 (1925-26), pp. 471-474.
- 5 - — *Sulle riemanniane algebriche.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. 53 (1929) pp. 283-309.
- 6 - — *Sulla connessione delle superficie algebriche reali.* Annali di Matematica (4), T. 5 (1927-28) pp. 299-317.
- 7 - — *Reelle Fragen in der algebraischen Geometrie.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker - Vereinigung, Bd. 41 (1931) pp. 107-134.
- 8 - **Hodge W. V. D.** *On multiple integrals attached to an algebraic variety.* Journal of the London mathematical Society, T. 5 (1930) pp. 283-290.
- 9 - **Kähler E.** *Sui periodi degl' integrali multipli sopra una varietà algebrica.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. 56 (1932) pp. 69-74.
- 10 - **Lefschetz S.** *On the real folds of abelian varieties.* Proceedings of the National Academy of Sciences, T. 5 (1919) pp. 103-106.
- 11 - — *Real hypersurfaces contained in abelian varieties.* Ibid, T. 5 (1919) pp. 296-298.
- 12 - — *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties I.* Transactions of the American mathematical Society, T. 22 (1921) pp. 327-406.
- 13 - — *L' Analysis situs e la Géométrie algébrique.* Paris, Gauthier Villars 1922.
- 14 - — *Correspondences between algebraic curves.* Annals of mathematics (2), T. 28 (1927) pp. 342-354.
- 15 - *Topology* (American mathematical Society Colloquium Publications XX), New-York (1930).

- 16** – **Scorza G.** *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. 41 (1916), pp. 263-380.
- 17** – **Severi F.** *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti d'una curva algebrica.* Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, T. 38 (1902-03).
- 18** – — *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique.* Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Paris, T. 25 (1908) pp. 449-468.
- 19** – — *Osservazioni a proposito della Nota di E. KÄHLER "Sui periodi degl' integrali multipli sopra una varietà algebrica",.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. 56 (1932) pp. 75-81.
- In bozze, completo l'elenco precedente, ricordando la recentissima nota di
- 20** – **Cherubino S.** *Sulla classificazione delle superficie iperellittiche dal punto di vista reale.* Rendiconti della R. Accad. Naz. dei Lincei, T. 16 (1932) pp. 285-290.
-