Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

G. Sansone

Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari del terzo ordine e sopra due classi di equazioni del terzo ordine le quali ammettono infiniti autovalori tutti reali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 3 (1932), p. 128-140

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1932__3__128_0>

SUGLI AUTOVALORI PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL TERZO ORDINE E SOPRA DUE CLASSI DI EQUAZIONI DEL TERZO ORDINE LE QUALI AMMETTONO INFINITI AUTOVALORI TUTTI REALI

di G. SANSONE a *Firenze*.

In una nota precedente inserita in questi Rendiconti [1] l'A. ha studiato l'equazione

$$(1) \qquad [\Theta(x) y'(x)]'' + \lambda [A(x) y(x)]' + \lambda B(x) y(x) = 0$$

nelle ipotesi $\Theta''(x)$, $A'(x)$, $B(x)$ continue in (a, b), $\Theta(x) > 0$ in (a, b), ed ha stabilito in casi molto generali un teorema di esistenza di valori del parametro λ (autovalori) ai quali corrispondono integrali $y(x)$ dell'equazione (1) i quali soddisfano le condizioni

$$(2) \qquad y(a) = y(c) = y(b) = 0 \qquad \text{con} \quad a < c < b.$$

In questa nota, con la nuova ipotesi che $B'(x)$ sia continua in (a, b) l'A. perfeziona nel § 1 il teorema di esistenza degli autovalori e nel § 2 assegna due classi di equazioni le quali ammettono infiniti autovalori tutti reali.

[1] G. SANSONE. - *Sugli autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee del terzo ordine*. [Questi Rendiconti I (1930) pp. 164-183].

§ 1.

Comportamento assintotico degli autovalori dell'equazione (1) quando essi sono in numero infinito. Condizione necessaria e sufficiente perchè non esistano autovalori.

1. - *a) Sia data l'equazione*

$$[\Theta(x)\,y'(x)]'' + \lambda[A(x)\,y(x)]' + \lambda\,B(x)\,y(x) = 0 \tag{1}$$

con $\Theta''(x)$, $A'(x)$, $B'(x)$ *funzioni continue in* (a, b); $\Theta(x) > 0$ *in* (a, b); c *un punto interno ad* (a, b), *e supponiamo che esistano infiniti valori del parametro* λ *(autovalori) ai quali corrispondano integrali dell'equazione* (1) *tali che*

$$y(a) = y(c) = y(b) = 0\,, \qquad a < c < b. \tag{2}$$

Indicando con $\{\lambda_n\}$ *la successione degli autovalori disposti per modulo non decrescente, vogliamo dimostrare che si ha*

$$\lim_{n \to \infty} n^{\frac{3}{2} - \varepsilon} \Big/ |\lambda_n| = 0\,, \tag{3}$$

ove ε *è un numero positivo arbitrario.*

Consideriamo nel piano (x, t) il quadrato Q di lati $x = a$, $x = b$; $t = a$, $t = b$, e le quattro regioni in cui Q è diviso dalle rette $x = t$, $t = c$; indichiamo poi con I e III i trapezi formati dai punti (x, t) le cui coordinate soddisfano rispettivamente le condizioni

$$\text{I} \quad x \leq t;\ c \leq t \qquad\qquad \text{III} \quad x \geq t,\ c \geq t$$

e con II e IV i due triangoli formati dai punti (x, t) le cui coordinate soddisfano rispettivamente le condizioni

$$\text{II} \quad x \leq t \leq c \qquad\qquad \text{IV} \quad x \geq t \geq c.$$

Nella nota citata ([2]) abbiamo visto che se $y(x)$ è un integrale dell'equazione (1) per il quale sono verificate le (2), $y(x)$ è una soluzione dell'equazione integrale

$$y(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\, y(t)\, dt \tag{4}$$

dove il nucleo $k(x, t)$ ha nelle quattro regioni I, II, III, IV rispettivamente l'espressione

$$k_{\mathrm{I}}(x, t) = \frac{1}{H(c)} \alpha_1(x) \tau(b, t) \qquad x \leq t;\ c \leq t, \tag{5$_1$}$$

$$k_{\mathrm{II}}(x, t) = \frac{1}{H(c)} \alpha_1(x) \tau(b, t) + \frac{H(x)}{H(c)} \tau(c, t) \qquad x \leq t \leq c, \tag{5$_2$}$$

$$k_{\mathrm{III}}(x, t) = -\frac{1}{H(c)} \alpha_3(x) \tau(a, t) \qquad x \geq t;\ c \geq t, \tag{5$_3$}$$

$$k_{\mathrm{IV}}(x, t) = -\frac{1}{H(c)} \alpha_3(x) \tau(a, t) - \frac{H(x)}{H(c)} \tau(c, t) \qquad x \geq t \geq c, \tag{5$_4$}$$

essendo le funzioni $H(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_3(x)$, $\tau(x, t)$ definite mediante le funzioni date $\Theta(x)$, $A(x)$, $B(x)$ dalle seguenti relazioni:

$$\int_a^x \frac{d\xi}{\Theta(\xi)} = \varphi(x), \qquad \int_t^b \frac{\xi}{\Theta(\xi)}\, d\xi = \omega(t) \tag{6}$$

$$H(x) = \omega(a)\varphi(x) + \omega(x)\varphi(b) - \omega(a)\varphi(b) \tag{7}$$

$$\alpha_1(x) = [\omega(c) - \omega(a)]\,\varphi(x) - [\omega(x) - \omega(a)]\,\varphi(c) \tag{8}$$

$$\alpha_3(x) = [\varphi(b) - \varphi(x)]\,\omega(c) - [\varphi(b) - \varphi(c)]\,\omega(x) \tag{9}$$

$$\tau(x, t) = [\varphi(x) - \varphi(t)]\,[A(t) - tB(t)] - [\omega(x) - \omega(t)]\,B(t). \tag{10}$$

([2]) Cfr. G. Sansone, not. cit. ([1]), p. 173.

Per le ipotesi fatte, le funzioni $H(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_3(x)$ sono funzioni continue di x in (a, b) insieme alle loro derivate del primo ordine, e la continuità di $A'(t)$, $B'(t)$ in (a, b) porta che $\tau(x, t)$ è nel quadrato Q una funzione continua insieme alle sue derivate parziali del primo ordine.

Dalle $(5)_1$, $(5)_2$, $(5)_3$, $(5)_4$ segue pure che il nucleo $k(x, t)$ dell' equazione integrale (4) è una funzione continua nel quadrato Q.

Il nucleo $k(x, t)$ è inoltre lipscitziano del primo ordine rispetto alla variabile t, cioè qualunque siano i punti (x, t_1) (x, t_2) del quadrato Q si ha

$$(11) \qquad |k(x, t_1) - k(x, t_2)| < A\,|t_1 - t_2|$$

dove A è una costante opportuna. Questa circostanza segue dal fatto che il nucleo $k(x, t)$ è continuo in Q e ammette derivata parziale rispetto a t continua in ciascuna delle quattro regioni I, II, III, IV in cui è diviso il quadrato Q.

Dalla (11) segue che se $D(\lambda)$ è il determinante di *Fredholm* dell'equazione (4), $D(\lambda)$ è una trascendente intera di genere nullo ([3]), e se $D(\lambda)$ ha infiniti zeri dati dalla successione $\{\lambda_n\}$ [autovalori dell'equazione (1)] si avrà

$$D(\lambda) = \prod_n^{1\ldots\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right);$$

inoltre l'esponente di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^\sigma}$ non supera 2/3 e vale perciò la (3).

b) Se $D(\lambda)$ ammette soltanto un numero finito n di zeri si avrà

$$D(\lambda) = \prod_i^{1\ldots n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)$$

e perciò se l' equazione integrale (1) non ammette autovalori

([3]) Cfr. T. Lalesco. – *Introdution à la théorie des équations intégrales.* [Paris, A. Hermann; 1912] pp. 87-89.

deve essere $D(\lambda) = 1$, cioè debbono essere nulle tutte le tracce del nucleo $k(x, y)$ (4), ossia dovrà aversi

$$(12)_1 \qquad A_n = 0 \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots$$

dove

$$(12)_2 \qquad A_n = \underbrace{\int_a^b \ldots \int_a^b}_{(n)} k(s_1, s_2) \ldots k(s_n, s_1)\, ds_1 \ldots ds_n .$$

Abbiamo quindi dimostrato che *la condizione necessaria e sufficiente perchè la* (1) *non ammetta autovalori è che siano nulle tutte le traccie del nucleo.*

2. - *Teoremi di esistenza degli autovalori.*

a) Teor. 1° - *Se nell'equazione*

$$(1) \qquad [\Theta(x)\, y'(x)]'' + \lambda [A(x)\, y(x)]' + \lambda [B(x)\, y(x)] = 0 ,$$

$\Theta''(x)$, $A'(x)$, $B'(x)$ *sono continue in* (a, b), *e si ha inoltre* $A(x) \geq 0$ *in* (a, b), $B(x) \leq 0$ *in* (a, c), $B(x) \geq 0$ *in* (c, b) *con* $a < c < b$, *oppure* $A(x) \leq 0$ *in* (a, b), $B(x) \geq 0$ *in* (a, c), $B(x) \leq 0$ *in* (c, b), *esiste allora almeno un autovalore* λ *cui corrisponde un integrale dell'equazione* (1) *che si annulla in* a, c, b.

Infatti per la prima traccia A_1 del nucleo, in virtù della $(12)_2$ abbiamo:

$$H(c)\, A_1 = H(c) \int_a^c k(x, x)\, dx + H(c) \int_c^b k(x, x)\, dx$$

$$= \int_a^c \alpha_3(x)\, \varphi(x) A(x)\, dx + \int_c^b \alpha_1(x) [\varphi(b) - \varphi(x)]\, A(x)\, dx +$$

(4) Cfr. È. Goursat. - *Cours d'Analyse Mathématique.* [3ième édition, Paris, 1923] T. III, p. 374.

$$+\int_a^c \alpha_3(x)\,[-\omega(x)+\omega(x)-x\,\varphi(x)]\,B(x)\,dx\,+$$

$$+\int_c^b \alpha_1(x)\,\big[\omega(x)-x\,\{\varphi(b)-\varphi(x)\}\big]\,B(x)\,dx$$

e poichè in $(a,\ b)$ ([5])

$$H(c)>0\,,\qquad \varphi(x)>0\,,\qquad \varphi(b)-\varphi(x)>0\,,$$
$$-\,\omega(x)+\omega(a)-x\,\varphi(x)<0\,,\qquad \omega(x)-x\,\{\varphi(b)-\varphi(x)\}>0$$
$$\alpha_3(x)>0\quad \text{in}\quad (a,\ c)\,;\qquad \alpha_1(x)>0\quad \text{in}\ (c,\ b)$$

ne viene dalle nostre ipotesi rispettivamente $A_1>0$, $A_1<0$ e perciò per il teorema dimostrato nel n° 1, b) il nucleo $k(x,\ t)$ ammette almeno un autovalore.

b) Teor. 2° - *Se nell'equazione*

$$[\Theta(x)\,y'(x)]''+\lambda\,[\{A(x)+\varepsilon\}\,y(x)]'+\lambda\,[B(x)\,y(x)]=0$$

λ *è un parametro,* ε *costante, e* $\Theta''(x)$, $A'(x)$, $B'(x)$ *sono continue in* $(a,\ b)$, *allora fissato un punto qualunque* c *interno ad* $(a,\ b)$, *eccettuato al più un valore della costante* ε, *esistono dei valori del parametro* λ *ai quali corrispondono integrali dell'equazione nulli in* $a,\ c,\ b$.

Infatti l'annullarsi della prima traccia del nucleo dell'equazione integrale (4) corrispondente porta

$$\varepsilon\left[\int_a^c \alpha_3(x)\,\varphi(x)\,dx+\int_c^b \alpha_1(x)\,[\varphi(b)-\varphi(x)]\,dx\right]+$$

$$+\int_a^c \alpha_3(x)\,\varphi(x)\,A(x)\,dx+\int_c^b \alpha_1(x)\,[\varphi(b)-\varphi(x)]\,A(x)\,dx\,+$$

([5]) Cfr. G. Sansone, loc. cit. ([1]), pp. 174-175, 177.

$$+\int_a^c \alpha_3(x)\,[-\omega(x)+\omega(a)-x\,\varphi(x)]\,B(x)\,dx+$$

$$+\int_c^b \alpha_1(x)\big[\omega(x)-x\,\{\varphi(b)-\varphi(x)\}\big]\,B(x)\,dx=0$$

e poichè il coefficiente di ε in questa equazione è positivo, essa è soddisfatta da un solo valore di ε, e quindi in virtù di 1 b) al più per un solo valore di ε l'equazione differenziale proposta non ammette autovalori.

§ 2.

Classi di equazioni del terzo ordine le quali ammettono infiniti autovalori (tutti reali).

3. – Supponiamo che nell'equazione

$$(1)\qquad [\Theta(x)\,y'(x)]''+\lambda\,[A(x)\,y(x)]'+\lambda\,[B(x)\,y(x)]=0$$

si abbia

$$(13)_1\qquad B(t)=[\varphi(t)-\varphi(c)]\,\Phi(t)\,,\qquad \varphi(x)=\int_a^x \frac{d\xi}{\Theta(\xi)}$$

con $\Phi(t)$ funzione continua in (a, b), dello stesso segno, ad es.

$$\Phi(t)\geq 0$$

ed ivi derivabile e posto $\int_t^b \xi\,/\,\Phi(\xi)\,d\xi=\omega(t)$ sia inoltre

$$(13)_2\qquad A(t)=[[t\,\varphi(t)-\varphi(c)]+[\omega(c)-\omega(t)]]\,\Phi(t)\,;$$

con le notazioni del n° 1 a) si troverà allora che

$$\tau(c, t)=0,\qquad \tau(a, t)=\alpha_1(t)\,\Phi(t),\qquad \tau(b, t)=-\alpha_3(t)\,\Phi(t),$$

e per il nucleo dell'equazione integrale (4) si ha:

$$k_{\mathrm{I}}(x, t) = k_{\mathrm{II}}(x, t) = -\frac{1}{H(c)}\,\alpha_1(x)\,\alpha_3(t)\,\Phi(t)$$

$$k_{\mathrm{III}}(x, t) = k_{\mathrm{IV}}(x, t) = -\frac{1}{H(c)}\,\alpha_3(x)\,\alpha_1(t)\,\Phi(t).$$

Il nucleo dell'equazione (4) è quindi un nucleo di Schmidt nel quadrato Q (6) e i suoi autovalori, a meno del fattore costante $-H(c)\operatorname{sgn}\Phi(t)$ coincidono con quelli del nucleo simmetrico

$$k_1(x, t) = \alpha_1(x)\,\alpha_3(t)\sqrt{\Phi(x)\,\Phi(t)} \qquad \text{per } a \leq x \leq t \leq b$$

$$k_1(x, t) = \alpha_3(x)\,\alpha_1(t)\sqrt{\Phi(x)\,\Phi(t)} \qquad \text{per } a \leq t \leq x \leq b.$$

Un tale nucleo ammette autovalori soltanto reali, e noi proveremo ora che essi sono in numero infinito. Ammettiamo per assurdo che essi siano in numero di n: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; indicando con

$$\sqrt{\Phi(x)}\,u_1(x), \quad \sqrt{\Phi(x)}\,u_2(x), \ldots, \sqrt{\Phi(x)}\,u_n(x);$$

$$\int_a^b \Phi(x)\,u_i^2(x) = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

le autofunzioni corrispondenti, le $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ sono autofunzioni dell'equazione (4) (7), sono perciò derivabili del terzo ordine e si annullano in a, c, b; inoltre per $x \geq t$ si ha (8)

$$\alpha_1(t)\,\alpha_3(x) = \frac{u_1(x)\,u_1(t)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{u_n(x)\,u_n(t)}{\lambda_n}$$

e in particolare per qualunque x di (a, b)

(6) Cfr. É. Goursat, loc. cit. (4), p. 457.

(7) Cfr. É. Goursat, loc. cit. (4), p. 459 [si ha qui $A(x) = 1$].

(8) Cfr. É. Goursat, loc. cit. (4), p. 442, form. (3).

$$\alpha_1(x)\,\alpha_2(x) = \frac{u_1^2(x)}{\lambda_1} + \dots + \frac{u_n^2(x)}{\lambda_n}; \tag{14}$$

$$u_i(a) = u_i(b) = u_i(c) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dalla (14) derivando rispetto ad x viene

$$\alpha_1'(x)\,\alpha_2(x) + \alpha_1(x)\,\alpha_2'(x) = 2\sum_1^n{}_i \frac{u_i(x)\,u_i'(x)}{\lambda_i}$$

e per $x = a$

$$\alpha_1'(a)\,\alpha_2(a) = 0\,;$$

quest' ultima è però impossibile perchè

$$\alpha_1'(a) < 0, \quad \alpha_2(a) = H(c) > 0 \ \text{[9]}.$$

Abbiamo così dimostrato il teorema: *Data l'equazione*

$$[\Theta(x)\,y'(x)]'' + \lambda\,[A(x)\,y(x)]' + \lambda\,B(x)\,y(x) = 0 \tag{1}$$

con $\Theta''(x)$ *continua in* (a, b), $\Theta(x) > 0$ *in* (a, b), *posto*

$$\varphi(x) = \int_a^x \frac{d\xi}{\Theta(\xi)}, \qquad \int_t^b \frac{\xi}{\Theta(\xi)}\,d\xi = \omega(t)$$

quando sia

$$\begin{aligned} A(t) &= [\,t\,\{\varphi(t) - \varphi(c)\} + \{\omega(c) - \omega(t)\}]\,\Phi(t)\,, \\ B(t) &= [\varphi(t) - \varphi(c)]\,\Phi(t) \end{aligned} \tag{15}$$

con $\Phi(t)$ *funzione continua e dello stesso segno in* (a, b) *e ivi derivabile, esistono infiniti autovalori* (reali) *del parametro* λ *ai quali corrispondono integrali dell'equazione* (1) *che soddisfano la condizione*

[9] Cfr. G. Sansone, loc. cit. [1], p. 175.

$$y(a) = y(c) = y(b) = 0, \qquad a < c < b.$$

4. – *Un'altra classe di equazioni differenziali del terzo ordine la quale ammette infiniti autovalori reali.*

Vogliamo ancora dimostrare il teorema: *Data l'equazione*

$$\text{(1)} \qquad [\Theta(x)\, y'(x)]'' + \lambda [A(x) y(x)]' + \lambda\, B(x)\, y(x) = 0$$

con $\Theta''(x)$ *continua in* (a, b), $\Theta(x) > 0$ *in* (a, b), *posto*

$$\varphi(x) = \int_a^x \frac{d\xi}{\Theta(\xi)}, \qquad \int_t^b \frac{\xi}{\Theta(\xi)}\, d\xi = \omega(t)$$

quando sia

$$\text{(16)} \quad A(t) = \left[t \{\varphi(b) - \varphi(t)\} - \omega(t)\right], \quad B(t) = [\varphi(b) - \varphi(t)]\Phi(t)$$

con $\Phi(t)$ *funzione continua e dello segno in* (a, b) *e ivi derivabile, esistono infiniti autovalori* (reali) *del parametro* λ *ai quali corrispondono integrali dell'equazione* (1) *che soddisfano la condizione*

$$y(a) = y(c) = y(b) = 0, \qquad a < c < b.$$

Con le ipotesi (16) si ha infatti

$$\tau(b, t) = 0, \qquad \tau(a, t) = H(t)\Phi(t), \qquad \tau(c, t) = -\alpha_3(t)\Phi(t)$$

e per il nucleo $k(x, t)$ dell'equazione integrale (4) abbiamo

$$\text{(17)} \qquad k_{\mathrm{I}}(x, t) = 0, \qquad k_{\mathrm{II}}(x, t) = -\frac{H(x)}{H(c)}\alpha_3(t)\Phi(t),$$

$$k_{\mathrm{III}}(x, t) = -\frac{H(t)}{H(c)}\alpha_3(x)\Phi(t),$$

$$k_{\mathrm{IV}}(x, t) = \left[-\alpha_3(x)\frac{H(t)}{H(c)} + \frac{H(x)}{H(c)}\alpha_3(t)\right]\Phi(t).$$

Indicando al solito con $k^{(n)}(x, y)$ l'n^{esimo} nucleo iterato di $k(x, y)$, posto cioè

$$k^{(n)}(x, y) = \underbrace{\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b}_{(n-1)} k(x, \xi_1)\, k(\xi_1, \xi_2) \ldots k(\xi_{n-1}, y)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}$$

è facile verificare le due relazioni

$$(18)_1 \qquad k^{(n)}(x, x) = 0 \qquad \text{per} \quad x > c$$

$$(18)_2 \quad k^{(n)}(x, x) = \underbrace{\int_a^c \int_a^c \ldots \int_a^c}_{(n-1)} k(x, \xi_1)\, k(\xi_1, \xi_2) \ldots k(\xi_{n-1}, x)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}$$

$$\text{per} \quad a \leq x \leq c.$$

Si osservi infatti che se $x > c$ può essere $k(\xi_{n-1}, x) \neq 0$ soltanto per $\xi_{n-1} > x$, analogamente $k(\xi_{n-2}, \xi_{n-1})$ può essere diverso da zero soltanto per $\xi_{n-2} > \xi_{n-1}$ e così continuando abbiamo che può aversi $k(\xi_1, \xi_2) \ldots k(\xi_{n-1}, x) \neq 0$ soltanto per $\xi_1 > \xi_2 > \ldots$ $\ldots > \xi_{n-1} > x$ ma questo porta $k(x, \xi_1) = 0$ e perciò per $x > c$ tutti gli elementi dell'integrale $k^{(n)}(x, x)$ sono nulli e vale quindi la $(18)_1$.

Se poi è $x \leq c$ può aversi $k(x, \xi_1) \neq 0$ soltanto per $\xi_1 < c$ e analogamente $k(\xi_1, \xi_2) \neq 0$ soltanto per $\xi_2 \leq c$ e così continuando si trova che l'elemento $k(x, \xi_1)\, k(\xi_1, \xi_2) \ldots k(\xi_{n-1}, x)\, d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_{n-1}$ può essere diverso da zero soltanto se le $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ variano tra a e c, è vera quindi la $(18)_2$.

Dalle $(18)_1$, $(18)_2$ segue che tutte le traccie del nucleo $k(x, t)$ nel quadrato Q coincidono con le tracce del nucleo $k_1(x, t)$ definito nel quadrato di lato $c - a$ con le relazioni

$$(19) \quad \begin{aligned} k_1(x, t) &= -H(x)\, \alpha_3(t)\, \Phi(t) / H(c) \quad \text{per } a \leq x \leq t \leq c; \\ k_2(x, t) &= -H(t)\, \alpha_3(x)\, \Phi(t) / H(c) \quad \text{per } c \geq x \geq t \geq a, \end{aligned}$$

tale coincidenza porta l'uguaglianza dei determinati di FREDHOLM dell'equazione integrale (4) e dell'equazione

$$z(x)=\lambda\int_a^c k_1(x,\,t)\,z(t)\,dt, \tag{20}$$

inoltre per le (17) si ha in $(a,\,c)$ $z(x)=y(x)$ e perciò $z(x)$ ammette derivate del terzo ordine e $z(a)=z(c)=0$.

Avendo supposto poi che $\Phi(t)$ abbia sempre le stesso segno in $(a,\,b)$ gli autovalori dell'equazione integrale (20), a meno del fattore costante $-H(c)\,\mathrm{sgn}\,\Phi(t)$, coincidono con gli autovalori dell'equazione integrale a nucleo simmetrico

$$u(v)=\lambda\int_a^c k_2(x,\,t)\,u(t)\,dt \tag{21}$$

con

$$k_2(x,\,t)=H(x)\,\alpha_3(t)\sqrt{\Phi(x)\,\Phi(t)} \qquad \text{per } a\leq x\leq t\leq c\,;$$

$$k_2(x,\,t)=H(t)\,\alpha_3(x)\sqrt{\Phi(x)\,\Phi(t)} \qquad \text{per } c\geq x\geq t\geq a.$$

Il nucleo simmetrico $k_2(x,\,t)$ ammette autovalori soltanto reali. Essi sono in numero infinito, perchè ammesso che essi siano in numero di n: $\lambda_1,\,\lambda_2,\ldots,\,\lambda_n$, indicando con

$$\sqrt{\Phi(x)}\,u_1(x),\quad \sqrt{\Phi(x)}\,u_2(x),\ldots,\quad \sqrt{\Phi(x)}\,u_n(x),$$

$$\int_a^c \Phi(x)\,u_i^2(x)\,dx=1, \qquad i=1,2,\ldots,n$$

le autofunzioni corrispondenti si dovrebbe avere

per $\qquad a\leq x\leq t\leq c,$

$$H(x)\,\alpha_3(t)=\sum_1^n{}_i\,\frac{u_i(x)\,u_i(t)}{\lambda_i},$$

e in particolare per qualunque x di (a, c)

$$H(x)\,\alpha_3(x) \leq \sum_1^n{}_i \frac{u_i^2(x)}{\lambda_i}.$$

Da questa derivando e facendo $x = a$ si ricava

$$H'(a)\,\alpha_3(a) + H(a)\,\alpha_3'(a) = 0,$$

e questa è assurda perchè $\alpha_3(a) = H(c) \neq 0$, $H'(a) > 0$, $H(a) = 0$ (10).

Il teorema enunciato è così dimostrato.

(10) Cfr. G. Sansone, loc. cit. (1) pp. 174-175.