Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Salvatore Cherubino

Su le forme associate ai polinomi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 2 (1931), p. 80-107

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1931__2__80_0>

SU LE FORME ASSOCIATE AI POLINOMI

Nota di SALVATORE CHERUBINO

In un recente lavoro, inserito negli Atti del R. Istituto Veneto, (1), il Prof. SANSONE ha assegnate due interessanti espressioni, funzioni dei primi $2m$ coefficienti dati di un polinomio $f(x)$ di grado $2m$, con le quali il termine noto del polinomio stesso si può maggiorare in modo che $f(x)$ risulti non negativo, su tutto l'asse reale delle x. Queste espressioni sono state applicate dall'A. a tre particolari polinomi a coefficienti numerici, ottenendone tre coppie di valori pel termine noto, molto più elevati del minimo che sarebbe stato desiderabile raggiungere.

Poichè il problema interessa le applicazioni, credo sia opportuno costruire altre espressioni che, mercè calcoli numerici non soverchiamente faticosi, facciano conseguire valori possibilmente migliori (cioè più bassi) pel termine che si vuol maggiorare.

Espressioni dirette a questo scopo, possono certamente ottenersi, sotto svariate forme, dalle mie recenti ricerche (2) sui polinomi definiti o semidefiniti, bastando utilizzare opportunamente i parametri arbitrari che compaiono nelle formole ivi trovate. Qui ne assegno alcune che mi sembrano raccomandabili per la loro semplicità di impiego e generalità di applicazione. A mezzo di esse, ho anche potuto indicare alcune classi di polinomi definiti o semidefiniti di grado (pari) qualunque ed, in particolare, dei gradi 4, 6, 8, che non credo siano state mai indicate.

Profittando di questa occasione, che mi ha fatto ritornare

(1) Tomo XC, parte seconda (1930-1931) pp. 205-215.

(2) *Sui polinomi definiti o semidefiniti* [Rend. Acc. Sc. Napoli, s. 4ª vol. 35 (1929)].

su ricerche precedenti, ho dato risposta a due domande che nei riguardi di esse si presentano naturalmente al lettore.

La prima è questa: che interesse o che significato possono avere, in rapporto con l'enumerazione delle radici reali, la massima o la minima caratteristica e l'indice d'inerzia delle forme quadratiche associate ad un polinomio $f(x)$? Qui vien facilmente rilevato che il significato più notevole si ha quando esistano forme connesse al polinomio $f(x)$, che ne risulta definito o semidefinito, e ci si limiti a considerare solo forme connesse, caso largamente studiato nel gruppo di lavori che si riconnettono alla Mem. cit. (2). Nel caso generale delle forme associate non manca qualche enunciato d'interesse: per essi il cortese lettore vorrà consultare il § 1 del testo. Le osservazioni quivi sviluppate trovano anche applicazione nel problema di maggiorazione sopra indicato.

La seconda domanda è suggerita dalle interessanti proposizioni del Fujwara (3) e dell'Okada (4) su la teoria dei polinomi definiti o semidefiniti, le quali si ricollegano alla suggestiva quistione trattata dallo Hurwitz (5) ed al bel teorema di questo A., su tali polinomi. Poichè quest'ultimo teorema è stato riottenuto, con qualche altro risultato e con diversi esempi (di Hermite, Remak, Hausdorff, Stridsberg e di Hurwitz stesso) dal punto di vista della mia Mem. poco fa richiamata, è lecito domandarsi se i teoremi del Fujwara e dell'Okada possono anche essi inquadrarsi in questo stesso schema e, in esso, facilmente stabilirsi.

Questa domanda riceve risposta rapida e pienamente affermativa, ciò che potrà giovare a l'ulteriore sviluppo dei problemi che si riattaccano a quello di Hurwitz.

La portata di una delle proposizioni mentovate ne riesce ulteriormente ampliata ed, inoltre, aggiungo due osservazioni che, benchè di deduzione quasi immediata, mi sembrano degne di nota (nè mi constano altrove già segnalate).

(3) *Ueber definite Polinome* [Tōhoku Math. Journ. 6 (1914-1915)] pp. 20-26.

(4) *Note on Definite Polinomials* [Japanese Journ. of. Math. vol. 1, nn. 1-2] pp. 23-25.

(5) *Ueber definite Polinome* [Math. Ann., 73 (1913)] pp. 173-176.

§ 1. - Le forme associate.

1. Dato un polinomio di grado pari

$$f(x) = a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \dots + a_{2m-1} x + a_{2m} \,,$$

si dice che la forma quadratica

$$\Phi(y) = \Phi(y_0, y_1, \dots, y_m) = \sum_{ks}^{0,1,\dots,m} a_{ks} y_k y_s \,, \quad a_{sk} = a_{ks} \,,$$

è *associata* ad $f(x)$, quando hanno luogo le relazioni

$$(1) \qquad a_i = \sum_{k+s=i} a_{ks} \qquad k, s = 0, 1, \dots, m;\; i = 0, 1, \dots, 2m \,,$$

ossia quando ha luogo l'identità

$$(2) \qquad f(x) = \Phi(x^m, x^{m-1}, \dots, x, 1) \,.$$

Applicando alla forma $\Phi(y)$ il noto metodo di riduzione a forma normale, dovuto al Lagrange, si ottiene un'identità del tipo

$$(3) \qquad \Phi(y) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r (e_{rr} y_r + e_{rr+1} y_{r+1} + \dots + e_{rm} y_m)^2$$

dalla quale, causa la (2), si passa all'altra

$$(4) \qquad f(x) = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r (e_{rr} x^{m-r} + e_{rr+1} x^{m-r-1} + \dots + e_{rm})^2 \,.$$

Viceversa, da questa, mediante la (3), può subito passarsi alla (2). Ciò mostra che la ricerca delle forme associate ad $f(x)$ coincide con quella delle decomposizioni di $f(x)$ in combinazioni lineari di $m+1$ polinomi del tipo

$$\chi_r(x) = e_{rr} x^{m-r} + e_{r,\,r+1} x^{m-r-1} + \dots + e_{rm} \,, \quad r = 0, 1, \dots, m \,.$$

Questi polinomi, qualora si supponga $e_{rr} \neq 0$, $r = 0, 1, \ldots, m$, sono linearmente indipendenti, cioè la matrice dei loro coefficienti è di caratteristica massima, mentre i coefficienti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ possono anche non essere tutti diversi da zero. Se $p+1 \leqq m+1$ è il numero di questi coefficienti che non sono nulli, la teoria delle forme quadratiche ci assicura, riferendosi alla (3), che la caratteristica di $\Phi(y)$ è $p+1$, e *viceversa.*

Più generalmente [6], se $f(x)$ è combinazione lineare, a coefficienti tutti diversi da zero, di $p+1$ polinomi linearmente indipendenti, di grado non superiore ad m, ad $f(x)$ è associata una forma quadratica su $m+1$ variabili, di caratteristica $p+1$; e *viceversa.*

Per estensione, si dirà anche *associata* ad $f(x)$ ogni forma equivalente ad una una forma come $\Phi(y)$. Sia

$$\Phi_1(z) = \sum_{rh}^{0,1,\ldots,m} b_{rh} z_r z_h \qquad (b_{rh} = b_{hr})$$

una forma equivalente a $\Phi(y)$, e si passi da quella a questa mediante la sostituzione lineare propria

$$(5) \qquad z_r = c_{r0} y_0 + c_{r1} y_1 + \ldots + c_{rm} y_m \qquad (r = 0, 1, \ldots, m).$$

Ponendo

$$\pi_r(x) = c_{r0} x^m + c_{r1} x^{m-1} + \ldots + c_{rm}, \qquad (r = 0, 1, \ldots, m)$$

questi $m+1$ polinomi saranno linearmente indipendenti e soddisferanno all'identità

$$(2)^* \qquad f(x) = \sum_{rh}^{0,1,\ldots,m} b_{rh} \pi_r(x) \cdot \pi_h(x)$$

la quale non è altro che la trasformata della (2), mediante la (5).

Se $\Phi(y)$ è di caratteristica $p+1$, nella sua matrice discriminante $a = \| a_{rs} \|$ esisterà un minore principale, di ordine $p+1$, a determinante diverso da zero. Se questo è quello contenuto

[6] Cioè considerando polinomi anche non del tipo dei $\chi_r(x)$: ad. es. tutti dello stesso grado m.

nelle prime $p+1$ righe e colonne, $\Phi(y)$ è equivalente alla forma

$$\psi(z) = \sum_{k,s}^{0,1,\ldots,p} a_{ks} z_k z_s ,$$

e, tenendo conto della sostituzione ([7]) che fa passare da $\psi(z)$ a $\Phi(y)$, la $(2)^*$, si scrive

$$f(x) = \sum_{ks}^{0,1,\ldots,p} a_{ks} \sigma_k(x) \sigma_s(x), \tag{6}$$

dove i $\sigma_k(x)$ sono $p+1$ polinomi linearmente indipendenti. del tipo

$$\sigma_k(x) = x^{m-k} + \lambda_{k,1} x^{(m-p)-1} + \lambda_{k,2} x^{(m-p)-2} + \ldots + \lambda_{k,m-p} . \tag{7}$$

2. Se $f(x)$ è un polinomio definito o semidefinito ([8]), fra le sue forme associate ve n' è almeno una ad esso connessa, cioè definita o semidefinita come $f(x)$, quindi ad indice d' inerzia ([9]) eguale alla sua caratteristica. Il massimo di questa, diminuita di uno, dà il numero ([10]) delle coppie di radici complesse coniugate di $f(x)$.

Vogliamo esaminare se anche alla massima o alla minima caratteristica delle forme associate ad $f(x)$ ed ai rispettivi indici d' inerzia possa attribuirsi un significato.

Cominciamo con l' osservare che se fra le forme associate ad $f(x)$ ve n' è una di caratteristica uno, $f(x)$ è quadrato di un altro polinomio, cioè le sue radici sono tutte di molteplicità pari ; e viceversa.

Dopo di che, cade opportuno di domandarsi subito : esiste sempre qualche forma di caratteristica due ?

([7]) *Un' applicazione del calcolo...* [Rend. Ist. Lomb., vol. 62 (1929)] n. 1.

([8]) *Sulle decomposizioni...* [Rend. Ist. Lomb., vol. 62, (1929)], § 2, n. 6.

([9]) Per indice d' inerzia intendiamo la differenza, in valore assoluto. fra il numero delle radici positive e quello delle radici negative dell' equazione caratteristica della forma.

([10]) Nota cit. (8) § 3, n. 8.

Se $f(x)$ è definito o semidefinito e le sue radici non sono tutte reali, esso è certo somma di due quadrati a basi linearmente indipendenti ([11]), cioè fra le forme ad esso connesse ve n' è almeno una di caratteristica due, e viceversa. Ma inoltre:

Se $f(x)$ possiede due radici distinte non complesse coniugate, esso è differenza dei quadrati di due polinomi linearmente indipendenti, cioè fra le sue forme associate ve n' è almeno una di caratteristica due ed indice d' inerzia zero. E viceversa.

Invero, diciamo $2p (\geqq 0)$ il numero delle radici imaginarie, a coppie coniugate, di $f(x)$, e poniamo $p = p' + p''$, con $2p' \leqq m$, $2p'' \leqq m$, ciò che è possibile perchè $2p \leqq 2m$. Distribuiamo le p coppie di radici imaginarie coniugate in due gruppi, uno di p' coppie, l'altro di p'' coppie, ed aggreghiamo a ciascuno di essi rispettivamente $m - 2p'$ ed $m - 2p''$ delle $2(m - p)$ radici reali di $f(x)$. Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ i due polinomi di grado m che hanno per radici ordinatamente quelle dei due gruppi. Si potrà scrivere ([12])

$$f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x) \tag{8}$$

e ponendo

$$\chi_1(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x)], \quad \chi_2(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) - \psi(x)]. \tag{9}$$

risulterà

$$f(x) = \chi_1(x)^2 - \chi_2(x)^2 ; \tag{10}$$

Se $f(x)$ ha almeno due radici distinte, non complesse coniugate, si potrà fare in modo che i 2 gruppi di radici differiscano almeno per un elemento, sicchè $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ differiranno almeno per una radice, quindi saranno linearmente indipendenti, poichè sarà impossibile una identità del tipo

$$a \cdot \varphi(x) + b \cdot \psi(x) = 0$$

([11]) Nota cit. (8) § 1, n. 1.

([12]) I coefficienti di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ essendo determinati a meno di un fattore costante, la identità (8) può sempre verificarsi.

con a e b costanti non entrambe nulle. Da ciò segue facilmente che sono linearmente indipendenti anche $\chi_1(x)$ e $\chi_2(x)$ ed il teorema diretto è dimostrato.

Viceversa, dalla identità (10), mediante le (9), si risale alla (8) e dall'indipendenza lineare dei polinomi $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ si risale a quella di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, quindi questi due polinomi differiranno almeno per una radice, e queste radici distinte, per la realtà dei coefficienti di $\varphi(x)$ e di $\psi(x)$, potranno sempre ritenersi non complesse coniugate.

3. *Ogni polinomio $f(x)$, di grado $2m$, è sempre combinazione lineare dei quadrati di m o di $m+1$ polinomi di gradi rispettivi m, $m-1, \ldots, 1$, 0 ed i segni dei coefficienti della combinazione si possono fissare tutti ad arbitrio, meno i due estremi. Cioè a dire, ad $f(x)$ è sempre associata qualche forma di caratteristica m od $m+1$, le cui radici della equazione caratteristica, meno una o due secondochè la caratteristica è m od $m+1$, hanno segni che si possono prefissare ad arbitrio.*

La (4) si scinde nelle relazioni

$$\text{(I)} \qquad a_i = \sum_{r=0}^{m} \alpha_r (e_{r0} e_{ri} + e_{r1} e_{ri-1} + \ldots + e_{ri} e_{r0}), \quad i = 0, 1, \ldots, 2m,$$

ove bisogna porre $e_{rs} = 0$, per $s = 0, 1, \ldots r-1$ ed $e_{rm+s} = 0$, per $s > 0$.

Queste (I) si scrivono anche

$$\text{(I)}^* \left\{ \begin{array}{c} a_0 = \alpha_0 e_{00}^2, \qquad a_1 = 2\alpha_0 e_{01}^2 \\ a_i = \alpha_0 (e_{00} e_{0i} + e_{01} e_{0i-1} + \ldots + e_{0i} e_{00}) + \\ + \alpha_1 (e_{11} e_{1i-1} + e_{12} e_{1i-2} + \ldots + e_{1i-1} e_{11}) + \ldots + \beta_i, \\ (i = 2, 3, \ldots, m) \\ a_{m+i} = \alpha_0 (e_{0i} e_{0m} + e_{0i+1} e_{0m-1} + \ldots + e_{0m} e_{0i}) + \\ + \alpha_1 (e_{1i} e_{1m} + e_{1i+1} e_{1m-1} + \ldots + e_{1m} e_{1i}) + \ldots + \gamma_i, \\ (i = 1, 2, \ldots, m-1) \end{array} \right.$$

dove

$$\beta_i = \begin{cases} \alpha_k \cdot e_{kk}^2 & \text{per } i = 2k \leqq m \\ 2\alpha_k \cdot e_{kk} e_{kk+1} & \text{per } i = 2k+1 \leqq m \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 2\alpha_h \cdot e_{hh} e_{hh+1} & \text{per } m+i = 2h+1 \leq 2m-1 \\ \alpha_h \cdot e_{hh}^2 & \text{per } m+i = 2h \leqq 2m \end{cases}$$

infine

$$\text{(I)}^{**} \qquad a_{2m} = \alpha_0 e_{0m}^2 + \alpha_1 e_{1m}^2 + \ldots + \alpha_m e_{mm}^2 .$$

In queste relazioni è facile riconoscere che:

a) Scelto $\alpha_0 \cdot e_{00} \neq 0$, e lasciando arbitrari tutti gli e_{rs}, $r > 0$, e gli α_s, $s > 0$, i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_m$ di $f(x)$ ed i parametri $e_{01}, e_{02}, \ldots, e_{0m}$, si determinano linearmente gli uni per gli altri, mediante le prime $m+1$ relazioni (I)*;

b) Scelto $\alpha_r \cdot e_{rr} \neq 0$ $(r = 1, 2, \ldots, m-1)$, mentre tutti gli altri parametri restano arbitrari, mediante le rimanenti relazioni (I)*, si determinano reciprocamente, in modo lineare, i coefficienti $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{2m-1}$ di $f(x)$ ed i termini noti dei polinomi $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_{m-1}(x)$, cioè i parametri $e_{1m}, e_{2m}, \ldots, e_{m-1,m}$;

c) Scegliendo $e_{mm} \neq 0$, la relazione (I)** determina l' uno per l' altro, linearmente, il termine noto a_{2m} di $f(x)$ ed il parametro α_m, purchè $e_{m,m} \neq 0$.

Inoltre α_0 è del segno di a_0, mentre α_m può anche riuscire nullo. I parametri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ restano arbitrari in valore ed in segno, purchè diversi da zero: tutti gli altri parametri e_{rs}, sopra non nominati, restano del tutto arbitrari.

Con ciò, la proposizione enunciata è pienamente stabilita.

Osservazione. La proposizione ora dimostrata può completarsi osservando che: *Se $f(x)$ è privo di radici reali coincidenti esso ammette (almeno) una forma associata di caratteristica* $m+1$. Per convincersene, basta imitare il ragionamento che è stato fatto altrove [13] per dimostrare che la stessa caratteristica si ha quando $f(x)$ è privo di radici reali. Ne segue che: *se la*

[13] Nota cit. (8), § 2 n. 5.

massima caratteristica delle forme associate ad $f(x)$ è m, il polinomio possiede (almeno) una radice reale multipla ([14]).

4. Se si pone $m = 2\mu$, oppure $m = 2\mu + 1$, secondo che m è pari o dispari, nelle relazioni (I) è possibile prendere $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{\mu-1} = 0$. In tal caso: se $\alpha_0 \cdot e_{00} \neq 0$, si determinano reciprocamente, come poco fa, i coefficienti $a_1, \ldots, a_m$ ed i parametri $e_{01}, \ldots, e_{0,n}$: supponendo $\alpha_\mu \cdot e_{\mu\mu} \neq 0$, si determinano anche, sempre linearmente e gli uni mediante gli altri, i coefficienti $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{m+\mu}$ ed i parametri $e_{\mu,m+1-\mu}, e_{\mu,m+2-\mu}, \ldots, e_{\mu,m}$; scegliendo $\alpha_{\mu+i-1} \cdot e_{\mu+i-1,\mu+i-1} \neq 0$, per $i = 2, 3, \ldots, m-\mu$, i coefficienti $a_{m+\mu+1}, a_{m+\mu+2}, \ldots, a_{2m-1}$ determinano linearmente i parametri $e_{\mu+1,m}, e_{\mu+2,m}, \ldots, e_{m-1,n}$, e questi determinano quelli; infine la (I)** determina l'uno mediante l'altro linearmente, il termine noto a_{2n} di $f(x)$ ed il parametro α_m, purchè $e_{m,m} \neq 0$. I rimanenti parametri restano completamente arbitrari ed $\alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_{n-1}$ sono soltanto tenuti a non essere nulli. Perciò:

Ad ogni polinomio di grado $2m$, con $m = 2\mu$ od $m = 2\mu + 1$, è sempre associata almeno una forma di caratteristica $m - \mu + 1$ od $m - \mu + 2$, le cui radici dell'equazione caratteristica hanno segni che si possono fissare ad arbitrio, meno quelli di una o due radici, secondo che la caratteristica della forma è $m - \mu + 1$ od $m - \mu + 2$.

Precisamente, si ha

$$f(x) = \alpha_0 \chi_0(x) + \alpha_\mu \chi_\mu(x) + \ldots + \alpha_{n-1} \chi_{m-1}(x) + \alpha_m$$

e ponendo

$$f_1(x) = f(x) - \alpha_0 \cdot \chi_0(x)$$

([14]) Questa proprietà non è invertibile. Basta considerare l'esempio

$$\beta \neq 0: \quad f(x) = [(x-\alpha)^2 - \beta^2]^2 = (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)^2 - 2\beta^2 (x-\alpha)^2 + \beta^4$$

nel quale $f(x)$ possiede due radici reali doppie ed una forma associata di caratteristica $m + 1 = 3$.

si ha che $f_1(x)$ è di grado $2(m-\mu)$, cioè di grado m od $m+1$, secondo che m è pari o dispari.

Operando su $f_1(x)$ come su $f(x)$, e via di seguito, è possibile, in generale, abbassare ancora il numero dei quadrati di cui $f(x)$ risulta combinazione lineare, cioè la caratteristica delle forme associate ad $f(x)$, sempre facendo in modo che i coefficienti di $f(x)$ e certi parametri α_r ed e_{rs} si individuino gli uni mediante gli altri, con relazioni lineari, mentre i rimanenti parametri restano arbitrari.

5. Le osservazioni dei due numeri precedenti provano intanto che il massimo della caratteristica delle forme associate ad $f(x)$ è privo di significato, in confronto della realtà o meno delle radici di $f(x)$. Al massimo dello indice d'inerzia di una forma associata può invece attribuirsi significato nel senso che una forma ad indice d'inerzia massimo (cioè eguale alla caratteristica) è *connessa* ad $f(x)$ ed $f(x)$ è definito o semidefinito. Sotto la condizione dell'indice d'inerzia massimo, ossia quando e solo quando si considerino esclusivamente forme connesse, quindi $f(x)$ è definito o semidefinito, il massimo della caratteristica assume il notevole significato già noto.

Al minimo della caratteristica delle forme associate, può attribuirsi significato interessante per le radici del polinomio, soltanto quando tale minimo è zero (polinomio identicamente nullo) oppure uno (polinomio a radici tutte di molteplicità pari). In ogni altro caso il minimo è due ed è sempre raggiunto.

Le osservazioni predette hanno interesse anche perchè dimostrano la possibilità di risolvere con sole operazioni lineari il problema della rappresentazione di $f(x)$ con combinazioni lineari di quadrati. Tale possibilità non può verificarsi se non scegliendo opportunamente il numero di questi quadrati (a basi linearmente indipendenti).

Questo numero ammette un minimo, poichè, se $m>1$, il numero stesso è certo >2. Di ciò è facile persuadersi considerando, ad es., il caso di un polinomio di 4° grado.

Invero, se si pone

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=(x^2+e_{01}x+e_{02})^2+\alpha_1(x+e_{12})^2$$

è possibile determinare, con operazioni lineari, i parametri e_{01}, e_{02}, e_{12} in funzione dei coefficienti a_1, a_2, a_3 e del parametro α_1. Ma poichè questo non figura solo nella ultima relazione, come invece accade nei due casi considerati nei nn. 3 e 4, la relazione che lega α_1 ai coefficienti di $f(x)$ non è lineare.

§ 2. - I teoremi di Hurwitz, Fujwara ed Okada.

6. Sia $f(x)$ un polinomio di grado $2m$ e

$$\varphi(y) = \varphi(y_0, y_1, \ldots, y_p) = \sum_{ij}^{0\ldots p} a_{ij} y_i y_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

una forma ad esso associata, di caratteristica $p+1$. Avrà luogo l'identità

$$f(x) = \sum_{ij}^{0\ldots p} a_{ij} \chi_i(x) \chi_j(x)\,,$$

con $\chi_0(x), \chi_1(x), \ldots, \chi_p(x)$ $p+1$ polinomi linearmente indipendenti di grado non superiore od m (ad es. coi gradi rispettivi m, $m-1, \ldots, 1$, 0).

Consideriamo il polinomio di grado $2m$

$$F(x) = \mu_0 f(x) + \mu_1 f'(x) + \ldots + \mu_{2m} f^{(2m)}(x), \qquad \mu_0 \neq 0$$

combinazione lineare di $f(x)$ e delle sue derivate.

Ponendo

$$\mu_{rs} = \binom{r+s}{r} \mu_{r+s} = \binom{s+r}{r} \mu_{s+r} = \mu_{sr} \qquad (r, s = 0, 1, \ldots, m)$$

si avrà la forma quadratica

$$\psi(y) = \sum_{r,s}^{0\ldots m} \mu_{rs} y_r y_s\,,$$

la cui caratteristica diciamo $q+1 \leqq m+1$, mentre con $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_q$ indichiamo le radici non nulle della sua equazione caratteristica.

Altrove ([15]) abbiamo dimostrato che ha luogo l'identità

$$(11) \qquad F(x) = \sum_k^{0\ldots q} \rho_k \cdot \varphi(\chi_{0k}, \chi_{1k}, \ldots, \chi_{2k}) = \sum_k^{0\ldots q} \rho_k \cdot \varphi(\chi_{ik})$$

dove i χ_{ik} sono polinomi in x, combinazioni lineari convenienti dei polinomi χ_i e delle loro derivate, ottenute con coefficienti che dipendono esclusivamente dei numeri μ_{rs}.

I polinomi $\varphi(\chi_{ik})$ sono dunque polinomi di grado $\leqq 2m$, che sono tutti associati alla stessa forma $\varphi(y)$, associata ad $f(x)$.

Dunque:

$F(x)$ è una combinazione lineare di non più di $m+1$ polinomi di grado non superiore a $2m$, a ciascuno dei quali sono associate tutte le forme quadratiche associate ad $f(x)$.

Se $f(x)$ è definito o semidefinito con (almeno) $p+1$ coppie di radici imaginarie complesse coniugate, la forma $\varphi(y)$ associata ad esso, può supporsi definita. Allora l'osservazione ora fatta, come già si è osservato altrove ([16]) fa dedurre facilmente:

I. *Se $f(x)$ si conserva non negativo (cioè semidefinito positivo) per ogni x reale, succede altrettanto per $F(x)$, quando la forma quadratica $\psi(y) = \sum_{rs}^{0\ldots m} \mu_{rs} y_r y_s$ sia non negativa* (cioè definita o semidefinita positiva):

II. *Nella stessa ipotesi di* I, *affinchè $F(x)$ si conservi positivo (negativo) è sufficiente che $\psi(y)$ sia definita positiva (negativa);*

III. *Se $f(x)$ è addirittura sempre positivo, si conserverà positivo (negativo) anche $F(x)$, quando $\psi(y)$ sia non negativa*

([15]) Mem. cit. (2), n. 7, pag. 16.

([16]) Ibidem. La proposizione I è parte della *a*) del n. 8. La II e la III coincidono, rispettivamente, con la *b*) e la *e*) e la IV non è che l'Osservazione dello stesso num. 8.

(non positiva) cioè definita o semidefinita del segno che si vuole per $F(x)$.

IV. *Se $f(x)$ varia a piacere, nello insieme dei polinomi soddisfacenti alle ipotesi specificate nelle proposizioni* I - II - III, *le condizioni enunciate in ciascuna di queste proposizioni, oltrechè sufficienti, sono anche necessarie.*

Le proposizioni I, II e III, completate con la IV, ciascuna nella parte che ad essa si riferisce, coincidono ordinatamente con due del FUJWARA e con quella dello HURWITZ.

7. Come si è osservato nel n. 9 della Mem. più volte cit., affinchè $\varphi(y)$ sia semidefinita positiva di caratteristica $q+1$ - definita, se $q=m$ - occorre e basta che esistano dei numeri reali ν_{rk}, $r=0, 1, \ldots, m$, $k=0, 1, \ldots, q$ tali che la matrice $\nu = \| \nu_{rk} \|$ abbia caratteristica $q+1$ e risulti

$$\sum_{k=0}^{q} \nu_{rk} \nu_{sk} = \mu_{rs}. \qquad (r, s=0, 1, \ldots, m) \tag{12}$$

Orbene, se si pone

$$\mu_r = e_r \cdot h^r; \qquad r=0, 1, \ldots, m \tag{13}$$

con h quantità reale arbitraria, non nulla, (anche variabile) ed e_r costanti opportune, si ha

$$\mu_{rs} = \binom{r+s}{r} \mu_{r+s} = \binom{r+s}{r} e_{r+s} \cdot h^{r+s},$$

quindi, per la (12),

$$\binom{r+s}{r} e_{r+s} = \sum_{k=0}^{q} \nu_{rk} h^{-r} \cdot \nu_{sk} h^{-s} \tag{14}$$

onde, se si pone

$$e_{rs} = \binom{r+s}{r} e_{r+s}, \qquad \nu'_{rk} = \nu_{rk} h^{-r}, \tag{15}$$

la (14) diventa

$$(12)^* \qquad e_{rs} = \sum_{k=0}^{q} \nu'_{rk} \cdot \nu'_{sk}$$

e ci dice che la forma quadratica

$$(16) \qquad E(y) = \sum_{r,\, s}^{0 \dots m} e_{rs}\, y_r\, y_s\,, \qquad e_{rs} = e_{sr}$$

è, insieme a $\psi(y)$, semidefinita positiva (o negativa) di caratteristica $q+1$ [17].

Viceversa, dalle (12)*, mercè le (15), si ritorna alle (12), cioè le (12) - (12)* sono l'una conseguenza dell'altra, causa la (13). Dunque:

V. *Se $f(x)$ è non negativo per ogni x reale, affinchè sia tale anche*

$$F_1(x) = e_0 f(x) + e_1 h f'(x) + e_2 h^2 f''(x) + \dots + e_{2m} h^{2m} f^{(2m)}(x)\,,$$
$$e_0 \neq 0\,,$$

dove la h è una quantità reale arbitraria, non nulla, è sufficiente che la forma (16) *sia semidefinita positiva;*

V *a*) *Con la stessa ipotesi, se $E(y)$ è definita positiva (negativa), $F_1(x)$ si conserva positivo (negativo);*

V *b*) *Se $f(x)$ si conserva positivo per ogni x, ed $E(y)$ è non negativa (non positiva) $F_1(x)$ si conserva anch'esso positivo (negativo).*

V *c*) *Le condizioni enunciate diventano anche necessarie, se $f(x)$ varia a piacere nello insieme dei polinomi che soddisfanno a ciascuna delle ipotesi sopra indicate.*

Queste proposizioni contengono come corollari quelle dell'Okada, le quali ultime si ottengono supponendo che h sia un polinomio in x. In queste proposizioni fa eccezione, pel teorema

[17] Dalla matrice $\nu' = \| \nu'_{rk} \|$ si passa alla $\nu = \| \nu_{rk} \|$ moltiplicando la prima, a sinistra, per la matrice che si ottiene dalla unitaria di ordine $m+1$ sostituendo gli elementi della diagonale principale con $1, h, h^2, \dots, h^{m+1}$. Quindi ν e ν' hanno la stessa caratteristica $q+1$.

V a), il caso in cui $h = h(x)$ abbia radici reali comuni con $f(x)$ e, pel teorema V b), quello in cui $E(y) = e_{2n} \cdot (2n)!\, y_n^2$ ed $h(x)$ abbia qualche radice reale.

Alla considerazione della forma $E(y)$ si può sostituire quelle della forma equivalente

$$E^*(x) = \sum_{r,\,s}^{0 \dots m} (r+s)!\, e_{r+s} x_r x_s .$$

Così pure la forma $\psi(y)$, di cui al n. 6, si può sostituire con la sua equivalente

$$\psi^*(x) = \sum_{r,\,s}^{0 \dots m} (r+s)!\, \mu_{r+s} x_r x_s .$$

La equivalenza è manifesta poichè, ad es. in quest'ultimo caso, dalle forme $\psi(y)$ si passa alla $\psi^*(x)$ ponendo $y_k = k!\, x_k$ $(k = 0, 1, \dots, m)$.

8. Fermo restando $f(x)$, consideriamo il polinomio

$$G(x) = c_0 \cdot a_0 x^{2m} + c_1 \cdot a_1 x^{2m-1} + \dots + c_{2m} \cdot a_{2m}\,, \qquad c_0 \cdot a_0 \neq 0 .$$

Questo, con opportuna scelta dei coefficienti μ_i, risulta del tipo di $f(x)$, cioè combinazione lineare di $f(x)$ e delle sue derivate.

Dopo di che, si riconosce facilmente, con OKADA ([18]), che le condizioni perchè $\psi(y)$ sia definita o semidefinita di caratteristica $q+1$ coincidono con quelle perchè sia tale l'altra forma

$$C(z) = \sum_{r,\,s}^{0 \dots m} c_{r+s} z_r z_s .$$

Ne segue che:

VI - VI a) - VI b) - VI c). *Pei polinomi $G(x)$ valgono le stesse proposizioni* I - II - III - IV *con la sola sostituzione di $F(x)$ con $G(x)$ e di $\psi(y)$ con $C(z)$. Fanno eccezione, per la* II, *il caso $a_{2m} = 0$ e, per la* III, *il caso $C(z) = c_0 \cdot z_0^{2m}$.*

([18]) Nota cit. (4).

Più generalmente, invece di $G(x)$ si può considerare uno dei due polinomi

$$G_1(x) = c_0 a_0 h^{2m} \cdot x^{2m} + c_1 a_1 h^{2m-1} x^{2m-1} + \ldots + c_{2m} a_{2m}$$

$$G_2(x) = c_0 a_0 x^{2m} + c_1 a_1 h \cdot x^{2m-1} + \ldots + c_{2m} a_{2m} h^{2m}$$

dove h è una quantità arbitraria, purchè non nulla. Ciò è del tutto ovvio, sia perchè si potrebbe ripetere il ragionamento che precede, per $c_r = c'_r \cdot h^r$, sia perchè basta eseguire su $G(x)$ una trasformazione a radici multiple.

Queste interessanti proposizioni sono state segnalate dal FUJWARA insieme a quelle mentovate poco fa.

Qui ci permetteremo solo di aggiungere che per ottenere una $C(z)$ definita, poichè la sua matrice discriminante è

$$\left\| \begin{matrix} c_0 & c_1 \ldots\ldots & c_m \\ c_1 & c_2 \ldots\ldots & c_{m+1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ c_m & c_{m+1} \ldots\ldots & c_{2m} \end{matrix} \right\|$$

basta scegliere convenientemente i soli parametri c_i, ad indici pari, mentre i rimanenti possono assegnarsi ad arbitrio. Ad es., i c_i ad indici dispari possono scegliersi in modo che $G(x)$ venga ad acquistare, nei termini di grado dispari, coefficienti prefissati ad arbitrio.

Dunque: [19]

1. *I coefficienti dei termini di grado dispari nei polinomi definiti possono prefissarsi ad arbitrio.*

Analogamente, nella matrice discriminante

$$\left\| \mu_{rs} \right\| = \left\| \binom{r+s}{r} \mu_{r+s} \right\|$$

[19] Questa proposizione è contenuta nella $e)$ di cui al n. 3 della Mem. cit. (2).

della forma $\psi(y)$, possono fissarsi a piacere i μ_i ad indici dispari, quindi.

2. *Nelle combinazioni lineari di $f(x)$, polinomio non negativo, e delle sue derivate, possono scegliersi ad arbitrio (ad es. nulli) i moltiplicatori delle derivate di ordine dispari, continuando ad ottenere polinomi $F(x)$ positivi.*

Purchè, beninteso, i rimanenti coefficienti (dei termini di grado pari o delle derivate di ordine pari) siano scelti opportunamente, in relazione con quelli che si sono prefissati ad arbitrio.

3. Due ulteriori osservazioni ci sembrano particolarmente degne di attenzione.

Consideriamo la matrice simmetrica di ordine $m+1$

$$\left\Vert \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array} \right\Vert$$

ed osserviamo che essa può essere assunta come matrice caratteristica di una forma quadratica, su $m+1$ variabili, semidefinita positiva di caratteristica due. Facendo coincidere con questa la $C(z)$ e tenendo presenti i teoremi VI e VI *b*), si ha:

VII. *Un polinomio definito (semidefinito) si conserva tale sopprimendo tutti i termini di grado dispari.*

Se la forma predetta si fa coincidere con $C^*(y)$, cioè se si suppone

$$\mu_{2i+1} = 0 \quad , \quad \mu_{2i} = \frac{1}{(2i)!} \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

si ha ancora che:

VIII. *Se $f(x)$ è un polinomio definito (semidefinito) è definito anche* [20]

$$F_2(x) = f(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(x) + \dots + \frac{h^{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}(x).$$

dove h è una quantità reale arbitraria, non nulla.

§ 3. - Alcune classi di polinomi definiti o semidefiniti.

9. Dato il polinomio privo di termine noto

$$g(x) = a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \dots + a_{2m-1} x \quad , \quad a_0 > 0$$

esiste ed è funzione dei coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{2m-1}$ un numero q_0 tale che per ogni $q \geqq q_0$ si abbia

$$f(x) = g(x) + q \geqq 0$$

per tutti i valori reali di x, mentre ciò non accade prendendo $q < q_0$. Se anzi si sceglie $q > q_0$, il polinomio $f(x)$ risulterà (definito) positivo, e poichè $g(0) = 0$, sarà certo $q \geqq 0$. Se dunque si vuole che $f(x)$ sia definito, sarà certo $q > 0$, quindi il minimo di q, cioè q_0, è un numero positivo o nullo.

Poichè la determinazione di questo minimo è un problema algebrico non lineare (è di grado $2m - 1$, come l'ha mostrato il prof. Sansone [21]) interessa assegnare, in funzione dei coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{2m-1}$, delle espressioni atte a maggiorare q, cioè delle espressioni ognuna delle quali fornisce un valore tale che scegliendo q non inferiore ad esso, $f(x) = g(x) + q$ risulti definito o semidefinito.

Basandoci sullo studio da noi fatto nelle Memorie mentovate ed utilizzando anche le osservazioni contenute nel primo § di questa Nota, daremo alcune espressioni e metodi atti a raggiungere questo scopo.

[20] Questo caso non sembra sia stato già da altri osservato.

[21] Nella Nota cit. (1), n. 1.

10. Nel discriminante Δ della generica forma quadratica associata ad un polinomio $f(x)$, di grado $2m$, compaiono $\frac{m(m-1)}{2}$ parametri λ_{ik}; $i, k = 1, 2, \ldots, m-1$; $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$, dei quali basta scegliere opportunamente i soli λ_{ii}, per poter conseguire, se esiste, una forma definita, mentre i rimanenti λ_{ik}, $i \neq k$, restano del tutto arbitrari [22].

Per ridurre a forma abbastanza semplice le condizioni da soddisfare, supporremo $\lambda_{ik} = 0$, $i \neq k$, e porremo $\lambda_{ii} = \lambda_i$. Posto allora

$$c_0 = a_0 > 0, \quad c_{2k-1} = \frac{1}{2} a_{2k-1}, \quad c_{2k} = \frac{1}{2}(a_{2k} - \lambda_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, m-1 \tag{17}$$

le condizioni perchè una forma associata ad $f(x)$ sia definita positiva, si scrivono

$$\delta_i = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_i \\ c_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_2 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_i & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{vmatrix} > 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{m-1} & c_m \\ c_1 & \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & c_{m+1} \\ c_2 & 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & c_{m+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ c_{m-1} & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{m-1} & c_{2m-1} \\ c_m & c_{m+1} & c_{m+2} & \ldots & c_{2m-1} & q \end{vmatrix} > 0,$$

e si trasformano facilmente nelle seguenti:

[22] Cfr. la mia Mem. cit. (2), § III.

$$(18) \qquad \lambda_i > \frac{c_i^2}{c_0 - \sum\limits_r^{1\ldots i-1} \frac{c_r^2}{\lambda_r}} \qquad i = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$(18)^* \quad q \geqq \frac{c_m^2 + \sum\limits_i^{1,\ldots,m-1} \frac{c_{m+i}(c_0 c_{m+i} - 2c_m c_i)}{\lambda_i} - \sum\limits_{i<j}^{1,\ldots,m-1} \frac{(c_{m+i}c_j - c_{m+j}c_i)^2}{\lambda_i \lambda_j}}{c_0 - \sum\limits_r^{1,\ldots,m-1} \frac{c_r^2}{\lambda_r}}$$

Scegliendo il segno $>$, il polinomio è certo positivo; scegliendo il segno inferiore, $f(x)$ *può* anche essere non negativo (semidefinito) ma in tal caso avrà una sola coppia di radici reali (coincidenti).

11. Se nel polinomio $g(x)$ i coefficienti dei termini di grado pari sono tutti positivi e se inoltre

$$(19) \quad \left| \begin{array}{l} a_2 > \dfrac{a_1^2}{4a_0}, \quad a_6 > \dfrac{a_3^2}{4a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_2}}, \quad a_{10} > \dfrac{a_5^2}{4a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_2} - \dfrac{a_3^2}{a_6}} \\ a_{14} > \dfrac{a_7^2}{4a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_2} - \dfrac{a_3^2}{a_6} - \dfrac{a_5^2}{a_{10}}}, \quad \ldots\ldots \end{array} \right.$$

allora si può scegliere $\lambda_i = a_{2i}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, con che le (18) sono soddisfatte e la (18)* si semplifica, perchè risulta $c_{2i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Si ottengono così i seguenti enunciati particolari:

1. *Un polinomio di quarto grado i cui coefficienti* a_0, a_2, *sono positivi, ed inoltre* $a_2 > \dfrac{a_1^2}{4a_0}$, *risulta non negativo sempre che:*

$$(20) \qquad q = a_4 \geqq \frac{\dfrac{a_0 a_3^2}{a_2}}{4a_0 - \dfrac{a_1^2}{a_2}} = \frac{a_0 a_3^2}{4a_0 a_2 - a_1^2}$$

2. *Un polinomio di sesto grado i cui coefficienti* a_0, a_2, a_4 *sono positivi, ed inoltre* $a_2 > \frac{a_1^2}{4a_0}$, *risulta non negativo sempre che:*

$$(21)\qquad q = a_6 \gtreqless \frac{a_3^2 + \frac{a_0 a_5^2}{a_4} - \frac{a_1^2 a_5^2}{a_2 a_4}}{4a_0 - \frac{a_1^2}{a_2}} = \frac{a_2 a_4 a_3^2 + a_0 a_2 a_5^2 - a_1^2 a_5^2}{4a_0 a_2 a_4 - a_1^2 a_4}$$

3. *Un polinomio di ottavo grado i cui coefficienti* a_0, a_2, a_4, a_6 *sono positivi, ed inoltre* $a_2 > \frac{a_1^2}{4a_0}$, $a_6 > \frac{a_3^2}{4a_0 - \frac{a_1^2}{a_2}}$, *risulta non negativo sempre che:*

$$(22)\qquad q = a_8 \gtreqless \frac{\frac{a_0 a_5^2}{a_2} + \frac{a_0 a_7^2}{a_4} - \frac{(a_5 a_3 - a_7 a_1)^2}{a_2 a_6}}{4a_0 - \frac{a_1^2}{a_2} - \frac{a_3^2}{a_4}} =$$

$$= \frac{a_0 a_4 a_6 a_5^2 + a_0 a_2 a_6 a_7^2 - a_4 (a_5 a_3 - a_7 a_1)^2}{4a_0 a_2 a_4 a_6 - a_4 a_6 a_1^2 - a_2 a_6 a_3^2}$$

Se nelle (20) - (21) - (22) si prende il segno superiore, il polinomio che si considera risulta certo (definito) positivo, mentre col segno inferiore può possedere una coppia di radici reali (coincidenti) ma una sola.

12. Altre espressioni maggioranti di q si possono ottenere dalle decomposizioni di $f(x)$ in somme di quadrati, di cui alla solita nostra Memoria.

Per comodità del lettore, ci riferiremo alle osservazioni contenute nel § 1, che sostanzialmente non differiscono da quelle richiamate.

Senza venir meno alla generalità, nelle (I) - (I)* può supporsi

$e_{00} = e_{11} = \ldots = e_{mm} = 1$ ed anche $a_0 = 1$, quindi $\alpha_0 = 1$. Per ottenere espressioni abbastanza semplici, ai parametri arbitrari e_{rs}, $r \neq s$, salvo per $r = 0$ ed $s = m$, daremo valori tutti nulli, con che le (I)* diventano

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
a_1 &= 2e_{01} \\
a_2 - \alpha_1 &= 2e_{02} + e_{01}^2 \\
a_3 &= 2(e_{03} + e_{01}\, e_{02}) \\
a_4 - \alpha_2 &= 2e_{04} + 2e_{01}\, e_{03} + e_{02}^2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{2m-1} &= 2e_{0m-1} \cdot e_{0m} + 2\alpha_{m-1} \cdot e_{m-1,m} \\
a_{2m-2} - \alpha_{m-1} &= 2e_{0,m-2}\, e_{0,m} + e_{0,m-1}^2 + 2\alpha_{m-2} \cdot e_{m-2,m} \\
a_{2m-3} &= 2(e_{0,m-3} \cdot e_{0,m} + e_{0,m-2} \cdot e_{0,m-1}) + 2\alpha_{m-3} \cdot e_{m-3,m} \\
a_{2m-4} - \alpha_{m-2} &= 2e_{0,m-4} \cdot e_{0,m} + 2e_{0,m-3} \cdot e_{0,m-1} + e_{0,m-2}^2 + \\
&\quad + 2\alpha_{m-4} \cdot e_{m-4,m} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

mentre la (I)** si scrive

$$
(24)\qquad a_{2m} - \alpha_m = e_{0,m}^2 + \alpha_1 e_{1,m}^2 + \ldots + \alpha_{m-1} e_{m-1,m}^2 .
$$

Se, nelle formole sopra riportate, ad $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ si danno valori positivi arbitrari e si eliminano i parametri $e_{0,m}, e_{1,m}, \ldots, e_{m-1,m}$ che figurano nell'ultima relazione, questa dà la espressione desiderata, che risulta del tipo

$$
(25)\qquad q \geqq \Phi(a_1, a_2 - \alpha_1, a_3, a_4 - \alpha_2, \ldots)
$$

con Φ simbolo di funzione razionale.

Anche qui, scegliendo il segno $>$, il polinomio $f(x)$ è (definito) positivo, mentre scegliendo il segno $=$, il polinomio stesso *può* invece risultar (semidefinito) non negativo: in questo caso, avrà una sola coppia di radici reali (coincidenti).

Sviluppando i calcoli pel caso $m = 3$, ossia pei polinomi di sesto grado, si ha

$$
\begin{aligned}
q \gtreqless & \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}a_1(a_2-\alpha_1)+X\right]^2+ \\
(26) \qquad & +\frac{1}{4\alpha_1}\left[(a_4-\alpha_2)-\frac{1}{4}(a_2-\alpha_1)^2+\frac{3}{8}a_1^2(a_2-\alpha_1)+Y\right]^2+ \\
& +\frac{1}{4\alpha_2}\left[\frac{1}{4}a_1(a_2-\alpha_1)^2+Z(a_2-\alpha_1)+U\right]^2
\end{aligned}
$$

dove si è posto

$$
(26)^* \quad \left\{
\begin{aligned}
& X = a_3+\frac{1}{8}a_1^3 \; ; \quad Y = -\frac{1}{2}a_1\left(a_3+\frac{5}{32}a_1^3\right) \; ; \\
& Z = -\frac{1}{2}\left(a_3+\frac{1}{4}a_1^3\right) \; ; \quad U = a_5+\frac{1}{64}a_1^5+\frac{1}{8}a_1^2a_3 .
\end{aligned}
\right.
$$

In questa (26) i parametri α_1 ed α_2 hanno valori positivi arbitrari. Se a_2 ed a_4 sono positivi, si potrà scegliere $\alpha_1 = a_2$ ed $\alpha_2 = a_4$, e si ha l'enunciato:

Se $f(x)$ è un polinomio di sesto grado coi coefficienti a_0, a_2 ed a_4 positivi, prendendo

$$
\begin{aligned}
q = a_6 \gtreqless & \frac{1}{4}\left(a_3+\frac{1}{8}a_1^3\right)^2+\frac{a_1^2}{16a_2}\left(a_3+\frac{5}{32}a_1^3\right)^2+ \\
& +\frac{1}{4a_4}\left(a_5+\frac{1}{64}a_1^5+\frac{1}{8}a_1^2a_3\right)^2
\end{aligned}
$$

il polinomio risulterà non negativo. Se vale il segno superiore $f(x)$ riesce certamente (definito) positivo, mentre se vale quello *inferiore* $f(x)$ *può riescire semidefinito positivo, con una sola coppia di radici reali (coincidenti).*

13. Anche dalle osservazioni contenute nel n. 4 può dedursi una espressione abbastanza comoda, per maggiorare q. La calcoleremo pel caso $m=4$, cioè per il polinomio di ottavo grado, che è il minimo grado pel quale si ha un'espressione distinta da quella ottenuta sul n. precedente: il metodo è valevole per $f(x)$ di grado qualunque.

Nel caso $m=4$, si ha $\mu=2$ onde nelle (I)* deve prendersi $\alpha_1=0$. Senza limitare la generalità, può porsi $a_0=\alpha_0=e_{00}=1$ ed anche $e_{22}=e_{33}=e_{44}=1$, dopo di che le (I)* diventano

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 &= 2e_{01} \\ a_2 &= 2e_{02}+e_{01}^2 \\ a_3 &= 2e_{03}+2e_{01}e_{02} \\ a_4-\alpha_2 &= 2e_{04}+2e_{01}e_{03}+e_{02}^2 \\ a_5 &= 2e_{01}e_{04}+2e_{02}e_{03}+2\alpha_2 e_{23} \\ a_6-\alpha_3 &= 2e_{02}e_{04}+e_{03}^2+\alpha_2(2e_{24}+e_{23}^2) \\ a_7 &= 2e_{03}e_{04}+2\alpha_2 e_{23}e_{24}+2\alpha_3 e_{34} \\ q &\geqq e_{04}^2+\alpha_2 e_{24}^2+\alpha_3 e_{34}^2\,. \end{aligned}\right.$$

Eliminando i parametri e_{04}, e_{24}, e_{34} quest'ultima diventa

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} q \geqq{} & \frac{1}{4}\left[(a_4-\alpha_2)-C\right]^2+ \\ &+\frac{1}{4\alpha_2}\left[(a_6-\alpha_3)+E(a_4-\alpha_2)^2+F(a_4-\alpha_2)+G\right]^2+ \\ &+\frac{1}{2\alpha_3}\big[H(a_6-\alpha_3)+K(a_4-\alpha_2)^3+I(a_4-\alpha_2)^2+ \\ &+J(a_4-\alpha_2)+L(a_4-\alpha_2)(a_6-\alpha_3)+M\big]^2 \end{aligned}\right.$$

dove si è posto,

$$
(28)^* \quad \left|\begin{array}{c}
A=a_2-\frac{1}{4}a_1^2, \quad B=a_3-\frac{1}{2}a_1A, \quad C=\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{2}a_1B \\
D=a_5+\frac{1}{2}a_1C-\frac{1}{2}AB, \quad E=-\frac{a_1^2}{16\alpha_2}, \\
F=\frac{a_1}{4\alpha_2}D-\frac{1}{2}A, \quad G=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{4}B^2-\frac{D_1^2}{4\alpha_2}, \\
H=-\frac{D}{2\alpha_2}, \quad K=\frac{a_1}{4\alpha_2}E, \quad I=\frac{1}{2\alpha_2}\left(\frac{1}{2}a_1F-ED\right), \\
J=\frac{a_1G--2FD}{4\alpha_2}-\frac{1}{2}B, \quad L=\frac{a_1}{4\alpha_2}, \\
M=a_7+\frac{1}{2}BC-\frac{DG}{2\alpha_2}
\end{array}\right.
$$

con α_2 ed α_3 parametri positivi arbitrari.

Se a_4 ed a_6 sono positivi, si potrà porre $\alpha_2=a_4$ ed $\alpha_3=a_6$, sicchè la (28) si semplifica assai e si ha che:

Affinchè un polinomio di ottavo grado, con $a_0=1$ ed a_4, a_6 positivi, sia non negativo, è sufficiente che si abbia

$$
(29) \qquad q=a_8 \geqq \frac{1}{4}C^2+\frac{1}{4\alpha_2}G^2+\frac{1}{2\alpha_3}M^2
$$

dove C, G, M sono date dalle (28)* *per $\alpha_2=a_4$ ed $\alpha_3=a_6$. Se in questa* (29) *ha luogo il segno $>$, il polinomio è (definito) positivo; se ha luogo il segno $=$ può riescire (semidefinito) non negativo ed avrà, al più, due coppie di radici reali (coincidenti).*

14. Facciamo un' applicazione dei criteri espressi dalle formole (18) - (18)* e (26) - (26)* agli esempi del Prof. Sansone.

1°) Sia $f_1(x)=x^6+2x^5-4x^3-3x^2+2x+q$.

Con le (18) si vede che può prendersi $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$, [23]

[23] Per semplificare i calcoli, abbiamo adottato per α_1 ed α_2 valori interi. Assegnando a α_1 e α_2 valori opportuni potremmo ottenere valori di q ancora più bassi.

dopo di che la (18)* fornisce subito

$$q \geqq \frac{51}{8} = 6,375 .$$

Adoperando le formole (26)-(26)* convien scegliere, per comodità di calcolo, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e si ottiene subito

$$q \geqq \frac{13}{4} = 3,25 .$$

Con le sue espressioni il Prof. SANSONE ha calcolato rispettivamente $q \geqq \left(\frac{5}{3}\right)^6 200 \cdot 000 > 4 \cdot 000 \cdot 000$ e

$$q \geqq \frac{1}{3} \cdot \frac{101 + \sqrt{409}}{6} \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{409}}{6}\right)^4 > 1706 .$$

2°) Sia $f_2(x) = x^6 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{7}{16} x^2 + q$.

Dalle (18) si vede che può prendersi $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{16}$, con che la (18)* dà rapidissimamente

$$q \geqq \frac{1}{8} = 0,125 .$$

Mediante le (26)-(26)*, poichè queste ultime danno valori tutti nulli per X, Y, Z, U, si ottiene ancor più rapidamente, per $\alpha_1 = 1$ ed $\alpha_2 = \frac{1}{16}$

$$q \geqq \frac{9}{256} = 0,035 \ldots .$$

Il Prof. SANSONE ha calcolato $q \geqq 64$ e $q \geqq 2$.

3°) Sia $f_3(x) = x^6 + \frac{1}{6}x^5 - \frac{1}{48}x^3 - \frac{3}{256}x^2 + \frac{1}{1536}x + q$.

Le (18) ci permettono di assumere $\lambda_1 = \frac{1}{16}$, $\lambda_2 = \frac{9}{256}$, con che la (18)* ci fa calcolare

$$q \geqq 0{,}0006 .$$

Il calcolo mediante le (26) - (26)* riesce molto laborioso: per non renderlo più penoso, abbiamo preso $\alpha_1 = 1$, cioè $a_2 - \alpha_1 = -1$, e poi posto $\alpha_2 = \frac{1}{16}$ ed abbiamo ottenuto ([24])

$$q \geqq 0{,}0258$$

Il Prof. SANSONE ha calcolato $q \geqq 0{,}47$ e $q \geqq 0{,}084$.

15. Consideriamo infine un quarto esempio, nel polinomio di ottavo grado

$$f_4(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + q$$

pel quale è notorio che basta $q \geqq 1$ per avere un polinomio definito. In questo caso, è applicabile la formula (29), perchè $a_0 = 1$ ed i coefficienti a_4 ed a_6 sono positivi. Si porrà $\alpha_2 = a_4 = 1$ ed $\alpha_3 = a_6 = 1$ ottenendo, senza troppo grave fatica

$$q \geqq 0{,}455 \text{ ([25])}$$

([24]) Qui abbiamo posto meno cura nella scelta dei volori di α_1 ed α_2 non sembrandoci valesse la pena di affrontare un calcolo più faticoso. Poichè dalla (26) si vede che il valore di α_2 ha scarsa influenza su q, sarebbe stato opportuno, per ottenere un miglior valore di q, calcolare com'era facile fare, i 3 minimi dei 3 termini a secondo membro (trascurando $a_4 - \alpha_2$) e prendere per α_1 un valore prossimo ai 3 valori così calcolati.

([25]) Per $q = 0{,}5$ si ha $2f_4(x) = x^8 + (x^6 + x^4 + x^2 + 1)(x + 1)^2$, cosicchè $f_4(x)$ è già definito, quindi somma di 5 quadrati a basi linearmente indipendenti.

E poichè $f_4(x)$ soddisfa anche alle condizioni del n. 12, è applicabile la (22), che ci dà immediatamente

$$q \geqq 1 .$$

Ricorrendo alle espressioni del Prof. Sansone si sarebbe invece ottenuto:

col teorema I, b): $q \geqq \frac{7^{15}}{8^8} > 200\cdot000$

col teorema II, b): $q \geqq \rho^6 \cdot \frac{\rho+12}{8} > 564$, essendo $\rho = \frac{7+\sqrt{1201}}{16}$.