RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENEA BORTOLOTTI

Nuova esposizione, su basi geometriche, del calcolo assoluto generalizzato del vitali, e applicazione alle geometrie riemanniane di specie superiore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 2 (1931), p. 1-48

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1931__2__1_0>

NUOVA ESPOSIZIONE, SU BASI GEOMETRICHE, DEL CALCOLO ASSOLUTO GENERALIZZATO DEL VITALI, E APPLICAZIONE ALLE GEOMETRIE RIEMANNIANE DI SPECIE SUPERIORE.

di Enea Bortolotti *a Cagliari*

Introduzione

In un gruppo di ricerche svoltesi fra il 1900 e il 1910 il Prof. Pascal, come è noto, ha costruito una interessante teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque ([1]), basata sull'uso di certe formazioni a carattere invariantivo, che in parte sono generalizzazioni dei simboli di Christoffel per le forme differenziali quadratiche. Per fare di questa teoria un vero e proprio " calcolo differenziale assoluto ,, restava però a compiere un passo essenziale: la costruzione di un algoritmo che potesse tenere il luogo della *derivazione covariante* del Ricci. Questo passo ha potuto compiere recentemente (ponendosi in ipotesi meno generali circa la forma assunta come fondamentale) il Vitali ([2]); il quale, guidato da vedute geometriche (a cui avrò più innanzi occasione d'accennare: n. 5, fine) e valendosi di appropriate notazioni, particolarmente di un geniale artificio: di rappresentare con una sola lettera un intero gruppo d'indici, è riuscito a costruire un calcolo assoluto del tutto analogo a quello classico di Ricci, ma sostanzialmente basato, anzichè su di una forma differenziale quadratica del primo ordine, più in generale

([1]) Ved. **3**, 1909 (Il numero si riferisce all' Indice Bibliografico: l' avvertenza valga anche pel seguito).

([2]) Ved. **32** (1927), **34**, **36** e spec. **65** e **80**. Ved. anche **21**.

sulla forma quadratica d'ordine m qualunque $(m = 1, 2, \ldots)$ (3) che esprime, su di una V_n riemanniana in ambiente euclideo, il quadrato scalare del differenziale m-esimo, $d^m P$, del punto variabile (4).

Di questo calcolo il VITALI stesso e la sua fiorente Scuola hanno indicato numerose e interessanti applicazioni alla geometria delle varietà riemanniane; i più notevoli di questi risultati si trovano esposti nell'opera, già ben nota, " *Geometria nello spazio hilbertiano* ", (**65**, già cit.) dello stesso Autore.

Già da alcune delle applicazioni ideate dal VITALI (ad es.: dalla rappresentazione analitica delle quasi-asintotiche $\gamma_{2,3}$: **34**, pp. 427-428) appariva come lo strumento analitico da lui costruito dovesse prestarsi bene allo studio delle proprietà differenziali d'ordine > 1 di una V_n, e particolarmente, delle proprietà invarianti in quelle trasformazioni che secondo il BOMPIANI vengono dette "deformazioni (metriche) di specie superiore", della varietà (**11**, 1916, p. 628). Condizione preliminare per una tale applicazione sistematica era però il liberarsi dall'ipotesi restrittiva, cui il calcolo del VITALI era soggetto, che ciascuno dei successivi spazi osculatori alla varietà nel punto generico dovesse avere sempre *la massima dimensione possibile*: mentre i casi così esclusi, in cui (come si dice) la varietà rappresenta una o più equazioni a derivate parziali, appaiono essere proprio quelli di maggiore interesse, sia nell'aspetto analitico che in quello geometrico (5).

Partendo da una conveniente (e assai naturale) estensione del trasporto parallelo secondo LEVI-CIVITA, per la quale non occorre alcuna speciale ipotesi circa le dimensioni degli spazi oscu-

(3) A proposito di ordine e di grado di una forma differenziale mi riferisco alle definizioni del PASCAL (**3**, p. 23 e seg.).

(4) Cfr. **34**, pp. 413, 421; e ved. il n. 9 del presente lavoro.

(5) Un gruppo cospicuo di ricerche proiettivo- e metrico-differenziali del BOMPIANI si volge appunto allo studio di tali varietà, cioè a quella che potrebbe dirsi una " teoria geometrica delle equazioni a derivate parziali ". Nell'Indice Bibliografico unito al presente lavoro sono rammentate soltanto le ricerche (del BOMPIANI) attinenti al problema delle deformazioni di specie superiore. Una estesa memoria sull'argomento, dello stesso A., è in corso di pubblicazione.

latori, ho potuto ad un tempo affrancare il calcolo del Vitali dalla restrizione sopra accennata, e ottenere rappresentazioni geometriche espressive dei relativi operatori differenziali. M'è sembrata non priva d'interesse la ricostruzione, su basi prettamente geometriche, che così si consegue pel calcolo del Vitali: ad essa ho dedicato la parte I del presente lavoro. Naturalmente mi sono limitato alle linee generali e a quegli sviluppi che potevano presentare qualche carattere di novità, tralasciando in genere tutto quanto si trova già esposto (se pure sotto altra forma, e relativamente al caso in cui le ipotesi restrittive dette poco sopra s'intendono soddisfatte: "caso normale") nel libro o in altri lavori del Vitali. A proposito della forma dell'esposizione: non mi sono valso qui della *rappresentazione funzionale* del Vitali (il quale, come è noto, riguarda la varietà riemanniana come un ente di uno spazio funzionale: lo *spazio hilbertiano*); bensì dell'ordinario calcolo vettoriale per gli R_n euclidei, che del resto ne è, in sostanza, un caso particolare, e ne può tenere, sotto ogni riguardo, il luogo quando ci si limiti a considerare varietà a un numero finito di dimensioni [6].

La II Parte di questo lavoro contiene l'applicazione dei risultati analitici della I Parte allo studio della geometria riemanniana coi mezzi e secondo le vedute poco sopra accennati: in complesso mi sembra che lo scopo propostomi, cioè di fissare le basi di uno studio delle proprietà d'ordine > 1 di una V_n che proceda in modo (per quanto è possibile) analogo a quello, classico, delle proprietà d'ordine 1, sia raggiunto in modo soddisfacente.

Ma verrò ora ad una esposizione un pò più dettagliata del contenuto del lavoro. La prima Parte consta di tre Capitoli. Nel 1° Cap. dopo il richiamo di alcune nozioni preliminari (n. 1) svolgo gli elementi dell'*Algebra tensoriale* per quei sistemi assoluti, ad uno o più indici di classe qualunque, definiti su V_n, che io chiamo "tensori specializzati come V_n" (n. 3): soggetti a certe condizioni nei riguardi degli indici di covarianza, e dotati di una certa arbitrarietà nei riguardi di quelli di controva-

(6) Ho invece utilizzato la rappresentazione funzionale in una esposizione schematica dei più essenziali risultati della presente ricerca, in corso di pubblicazione negli "Atti Istituto Veneto" (92).

rianza. Prima però prendo in considerazione i casi particolari del *tensore fondamentale* della metrica (n. 2) e dei *vettori* (n. 3): che oltre ad essere i casi più interessanti, sono di per sè già sufficienti ad illuminarci nei riguardi del caso generale.

Nel Cap. 2° mi volgo alla Analisi tensoriale dei tensori, specializzati come V_n, a indici di classe qualunque (soffermandomi, anche qui, sul caso più semplice, quello dei vettori): pervengo ad essa (come sopra ho accennato) per via geometrica, mediante una opportuna estensione della nozione di equipollenza (e parallelismo) di Levi-Civita (n. 4), che dà luogo appunto (e in ipotesi più generali di quelle dell' A.) alle derivate covarianti del Vitali (nn. 5, 7). In relazione col " differenziale assoluto ,, (il differenziale che corrisponde alla derivata covariante ora detta) di un vettore ho l' occasione d' introdurre (n. 5) il *tensore di curvatura euleriana* di specie m (già sotto altra forma presentatosi anche al Vitali); tensore che avrà poi svariate applicazioni nel seguito. Studio in modo particolare (al n. 6) i " simboli di Christoffel generalizzati ,, mostrando come sia possibile esprimere tutti i simboli *di classe m* per le componenti del tensore fondamentale di specie m e le loro derivate prime: il che ha notevole interesse geometrico. Dalle formule di Christoffel generalizzate, che esprimono il modo di trasformarsi dei simboli ora detti, ricavo una interessante costruzione ricorrente dei coefficienti, $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}$, delle formule di trasformazione dei tensori.

Nel Cap. 3° espongo (n. 8, 9) vari risultati particolari di differenziazione: che riguardano il differenziale (assoluto) di specie $m+1$ di un vettore di σ_m (cioè: dello spazio m-osculatore), i differenziali successivi di un vettore di σ_1, e i differenziali $\delta^m u^\alpha$, " differenziali m-esimi del Pascal ,, che sono in semplicissima relazione con certe espressioni differenziali $\delta^{(m)}_{r_1 r_2 \ldots r_h}$ introdotte appunto dal Pascal. Mediante le $\delta^m u^\alpha$ (l' indice α essendo *di classe m*), e il tensore fondamentale di specie m, si può costruire la forma fondamentale completa (Φ_m) di specie m della V_n, che è il quadrato scalare di $d^m P$; la conoscenza di questa forma, sufficiente per costruire il calcolo assoluto dei tensori ad indici di classi $\leq m$, vale anche a determinare quella che chiamo *geometria intrinseca* (tangenziale) *di specie m* della V_n: geometria delle proprietà invarianti per deformazioni o applicabilità di specie m secondo il Bompiani.

A questa geometria è dedicato il Cap. 1° della Parte II, ove anzitutto stabilisco (n. 10) gli elementi sufficienti ad individuare una varietà nel gruppo delle deformazioni di specie m ora dette: la forma fondamentale completa di specie m, oppure un sistema di m forme del 1° ordine e dei gradi $2, 4, \ldots, 2m$, assai semplicemente definite per mezzo dei tensori di curvatura euleriana: le quali non differiscono che per fattori numerici dalle forme L^2_ν introdotte in altro modo (per le superficie) dal Bompiani. La geometria intrinseca di specie m (cioè la corrispondente forma Φ_m) può assegnarsi a priori, indipendentemente dall' esistenza di un ambiente euclideo d' immersione, come nel caso notissimo $m = 1$? Non sono ancora in grado di dare una risposta esauriente a tale questione; ho stabilito (n. 11) un gruppo di relazioni *certo necessarie* fra i coefficienti di Φ_m per l'esistenza di una V_n corrispondente: resta a vedere se esse siano, o no, anche *sufficienti*. Ho esposto (al n. 12) lo studio di alcune più essenziali nozioni e proprietà invarianti per le deformazioni di specie m, fra le quali segnalo la nozione di m-parallelismo, che contiene in particolare quella delle m-geodetiche, dovuta al Bompiani; e un cenno sul tensore di curvatura riemanniana di specie m, qui definito mediante considerazioni geometriche affatto analoghe a quelle che si seguono usualmente pel caso $m = 1$ (basate sul trasporto ciclico per parallelismo). Mi limito a un breve cenno (n. 13) su quella che può chiamarsi la *geometria intrinseca normale* di specie m di una varietà riemanniana.

Infine nel Cap. 2° della II Parte studio brevemente le più essenziali proprietà d'ordine m di una V_n che *non hanno carattere intrinseco di specie m;* le quali cioè non ammettono una enunciazione in cui soltanto intervengano le lunghezze d' arco e le prime $m - 1$ curvature (scalari) delle curve tracciate su V_n. Nell'espressione analitica di queste proprietà figura invece in modo essenziale il tensore di curvatura euleriana di specie m, mediante il quale ad es. si stabiliscono agevolmente le rappresentazioni analitiche di quelli che io chiamo sistemi quasi-coniugati $\varkappa_{m,\,m+1}$, in particolare delle linee quasi-asintotiche $\gamma_{m,\,m+1}$ del Bompiani, e della forma angolare di specie m, che esprime l'angolo fra due σ_m infinitamente vicini (n. 14); e le condizioni per l'esistenza di una V_n, di data geometria intrinseca (tangenziale e normale) di specie m in un ambiente R_N, che generalizzano le classiche equazioni di Gauss, di Codazzi, di Kühne (n. 15).

PARTE I^a

IL CALCOLO ASSOLUTO GENERALIZZATO DEL VITALI

Cap. 1° - Nozioni preliminari - Algebra tensoriale

1. - *Generalità, notazioni. Sistemi assoluti a indici di classi qualunque.* Sia $P = P(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ un punto variabile su di una V_n (varietà riemanniana) di R_N (spazio euclideo), sulla quale le u^r ($r, s, t, \ldots = 1, 2, \ldots, n$ ora e nel seguito) sono coordinate curvilinee. Supponiamo che gli indici $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ varino nella totalità delle combinazioni con ripetizione delle classi 1, 2,..., m di 1, 2,..., n ($m \geq 1$ qualunque). Se $\alpha = r_1 r_2 \ldots r_h$ (ove $r_1 r_2 \ldots r_h$ è una qualunque delle combinazioni ora dette, e quindi $1 \leq h \leq m$), chiamiamo *rango* di α, e indichiamo con ρ_α (**65**, p. 155) il numero (h) delle *cifre* di α; per α variabile, chiamiamo *classe* di α il numero massimo (m) delle cifre da cui α può essere costituito. Supposto sempre $\alpha = r_1 r_2 \ldots r_h$, ($h = \rho_\alpha$), poniamo

$$(1) \qquad P_\alpha = \frac{\partial^h P}{\partial u^{r_1}\, \partial u^{r_2} \ldots \partial u^{r_h}}.$$

I vettori P_α, con $\rho_\alpha \leq m$, determinano la giacitura dello *spazio m-osculatore* alla V_n nel punto P generico (7); spazio che designeremo sempre, secondo VITALI, con σ_m (**65**, p. 211). In generale, μ dei vettori $P\alpha$ saranno fra loro indipendenti, con

$$(2)\qquad n \leq \mu \leq \nu = n + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+m-1}{m} = \binom{n+m}{m} - 1\,,$$

(e, naturalmente, anche $\mu \leq N$, perchè la V_n si pensa immersa in un R_N). Diciamo per brevità *caso normale* il caso in cui è $\mu = \nu$, cioè i ν vettori $P\alpha$ *sono tutti indipendenti* (o ancora: il σ_m generico è un S_ν); in effetto è questo il caso più generale *quando sia* $N \geq \nu$.

I valori o stati di un indice α di classe m si possono coordinare ai numeri $1, 2, \dots, \nu$ $\left(\nu = \binom{n+m}{m} - 1\right)$; e ciò può farsi in ν! modi diversi; ma vi è una *legge naturale di coordinamento* (8) a cui ci riferiremo quando occorra.

Per un cambiamento

$$(3)\qquad u^r = u^r(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^n)$$

delle coordinate curvilinee in V_n i vettori $P\alpha$ subiscono una

(7) cioè: dello spazio proiettivo di minima dimensione contenente l'intorno d'ordine m del punto P sulla V_n; o ancora, dello spazio d'appartenenza degli S_m osculatori in P a tutte le curve delle varietà uscenti da P. La denominazione: *spazio m–osculatore* (o $S(m)$, o $S(m, 0)$) è quella adottata dal BOMPIANI, mentre altri parla di *spazio m–tangente* (TERRACINI, VITALI) o $(m+1)$*–tangente* (DEL PEZZO). Ved. **1**, **5**, **29**, **34**.

(8) Siano β, γ due stati dell'indice variabile α di classe m; intenderemo che β preceda γ se $\rho_\beta < \rho_\gamma$, oppure, ove sia $\rho_\beta = \rho_\gamma$, se, disposte entro β e γ le cifre in ordine tale che ciascuna sia $\leq$ della successiva, la prima cifra di β che non è uguale alla corrispondente di γ è minore di questa. Cfr. VITALI, **65**, p. 154. Diremo allora che gli stati di α sono disposti *nell'ordine naturale*.

trasformazione lineare *invertibile* [9]; i cui coefficienti si indicheranno, secondo VITALI (**65**, p. 156) con $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}$; per $\rho_\alpha = \rho_\beta = 1$, ed $\alpha = r$, $\beta = s$, essi in effetto si riducono alle derivate parziali $\frac{\partial \bar{u}^r}{\partial \bar{u}^s}$. Abbiamo dunque

$$(4) \qquad \bar{P}_\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta} P_\alpha, \qquad P_\beta = \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta} \bar{P}_\alpha, \qquad (\rho_\alpha, \ \rho_\beta \leq m)$$

ove le $\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}$ sono naturalmente i coefficienti della sostituzione inversa; onde segue

$$(5) \qquad \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\gamma} \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\beta} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\gamma} = \delta^\alpha_\beta \qquad [10]$$

Le espressioni effettive di questi coefficienti $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}$ $\left(\text{e } \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\right)$ per ρ_α e ρ_β qualunque per ora non ci occorrono [11]. Osserviamo soltanto che è certamente

(9) Ved. **65**, p. 160, e 172. La cosa è geometricamente prevedibile, perchè la dimensione μ del σ_m non può dipendere dal sistema di riferimento scelto.

(10) S' intende bene che $\alpha = \beta$ $[\alpha \neq \beta]$ vorrà dire che α e β sono [o non sono] la stessa combinazione con ripetizione di 1, 2, ..., n. Nelle (4), (5) e sempre nel seguito adottiamo, estesa al caso attuale degli indici composti, la *convenzione di sommazione:* intendiamo cioè che *rispetto ad ogni indice che in una espressione monomia è ripetuto due volte si debba eseguire la somma dei termini che si ottengono dal monomio supposto facendo percorrere a quell' indice il campo di variabilità che gli è assegnato.* Nel nostro caso il campo è definito dalla condizione $\rho_\alpha \leq m$, o $\rho_\gamma \leq m$; cioè l' indice α o γ deve percorrere tutte le combinazioni con ripetizione delle classi 1, 2, ..., m di 1, 2, ..., n.

(11) E del resto avremo occasione d' indicarle nel seguito, insieme ad un procedimento per calcolarle. Ved. n. 6. Ved. anche **65**, pp. 156-165, e cfr. PASCAL, **3** pp. 17–23.

$$(6)\qquad \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \bar u^\alpha}{\partial u^\beta} = 0 \quad \text{per } \rho_\alpha > \rho_\beta$$

perchè $\overline{P}_\beta\,[\,P_\beta\,]$ è combinazione lineare di derivate rispetto alle u^r [alle $\bar u^r$] d'ordine ovviamente non maggiore di ρ_β. (Cfr. **65**, p. 157).

Siano ξ_α, η^α sistemi semplici a un indice di classe m, che per effetto delle (3) si trasformino secondo le formule

$$(7)\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \bar\xi_\beta = \dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}\,\xi_\alpha\,, & \xi_\beta = \dfrac{\partial \bar u^\alpha}{\partial u^\beta}\,\bar\xi_\alpha\,, \\[2ex] \bar\eta^\beta = \dfrac{\partial \bar u^\beta}{\partial u^\alpha}\,\eta^\alpha\,, & \eta^\beta = \dfrac{\partial u^\beta}{\partial \bar u^\alpha}\,\bar\eta^\alpha\,; \end{array} \right.$$

diremo che ξ_α è un *sistema assoluto covariante*, e η^α, *controvariante, a un indice di classe m.* Analogamente si definiranno i sistemi assoluti covarianti, controvarianti, misti *d'ordine qualunque*, a indici di classi qualunque e anche diverse pei differenti indici di uno stesso tensore. (Ved. **65**, p. 166 e seg.). Si verificherà agevolmente che per questi sistemi assoluti e per le operazioni elementari dell'*Algebra tensoriale* su di essi sussistono tutte le proprietà formali relative agli usuali tensori del calcolo di Ricci. Tutti gli sviluppi più essenziali a questo riguardo sono del resto già dati nel libro del Vitali (**65**, p. 174 e seg.) e sarebbe superfluo ripeterli. Avvertiamo soltanto che gli enti che introdurremo (n. 3) quali *tensori*, in relazione alla V_n, *solo nel caso normale* si identificano coi sistemi assoluti ora accennati.

Si estendono anche, in modo ovvio, la nozione di tensori *a più serie d'indici* (che nel caso attuale potranno essere gli indici composti corrispondenti a più serie di indici semplici) e le proprietà relative ([12]).

2. - *Il tensore fondamentale di specie m.* Poniamo (cfr. Vitali, **65**, p. 181), λ e μ essendo di classi qualunque,

([12]) Pei tensori a due serie d'indici di classe 1 ved. R. Lagrange, **26** e la mia Nota **33**.

$$P_\lambda \times P_\mu = a_{\lambda,\mu} \,. \quad (= a_{\lambda,\mu}) \tag{8}$$

Nel caso delle *superficie* gli elementi di questo sistema $a_{\lambda,\mu}$ del VITALI non differiscono che per la notazione dai simboli $I_{hk,\, h_1 k_1}$ di E. E. LEVI (**2**, p. 8) o $[h\,k\,h_1 k_1]$ del BOMPIANI

$$\left(= \frac{\partial^{h+k} P}{\partial (u^1)^{h+k}} \times \frac{\partial^{h_1+k_1} P}{\partial (u^2)^{h_1+k_1}}\right),$$

(**11**, p. 629) che giuocano appunto, nelle teorie del LEVI e del BOMPIANI, un ruolo fondamentale.

In particolare le $a_{\alpha,\beta}$ (supposto sempre ρ_α, $\rho_\beta \leq m$) sono manifestamente le componenti di un sistema assoluto covariante, simmetrico, a due indici di classe m. Questo sistema può dirsi, per una ragione che vedremo fra breve (n. seg.) *tensore fondamentale di specie m della V_n*. La caratteristica della matrice $\| a_{\alpha,\beta} \|$ è uguale al numero μ di dimensioni del σ_m osculatore (**65**, p. 211). Ciò è ovvia conseguenza del fatto che, se fra i ν vettori P_α $(\rho_\alpha \leq m)$ sussistono le $q = \nu - \mu$ relazioni lineari indipendenti

$$\underset{m}{k}{}^{\alpha}_{a} \, P_\alpha = 0 \,, \quad (\rho_\alpha \leq m \,; \;\; a, b, c = 1, 2, \ldots, q = \nu - \mu) \tag{9}$$

per le (8) si ha anche

$$\underset{m}{k}{}^{\alpha}_{a} \, a_{\alpha,\beta} = 0 \,, \tag{10}$$

e viceversa, se fra le righe (o colonne) della matrice $\| a_{\alpha\beta} \|$ sussistono le q relazioni lineari e indipendenti (10), per le (8) si ha $\underset{m}{k}{}^{\alpha}_{a} P_\alpha \times P_\beta = 0$, cioè, per ciascun valore di a, il vettore $\underset{m}{k}{}^{\alpha}_{a} P_\alpha$, appartenente al σ_m osculatore, è normale a tutti i vettori di σ_m, e quindi nullo ([13]).

([13]) Veramente potrebbe presentarsi un caso d' eccezione, cioè $\underset{m}{k}{}^{\alpha}_{a} P_\alpha$, pure normale a tutti i vettori di σ_m, potrebbe anche *non essere nullo*; ma ciò soltanto se il σ_m fosse tangente all' assoluto dello spazio R_N. Questo caso potrà escludersi supponendo la V_n *generica* nei riguardi del suo comportamento con l' assoluto; o addirittura *supponendo la V_n reale.*

Nel caso normale ($\mu = \nu$, $q = 0$), e allora soltanto, per ciascun valore di m si può determinare, in relazione con $a_{\alpha,\beta}$ (ρ_α, ρ_β, ρ_γ, $\rho_\delta \leq m$, ora e nel seguito) un corrispondente sistema simmetrico controvariante $\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}$, tale che si abbia

$$\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}. \tag{11}$$

Ciò equivale a dire, come è ben noto e ovvio, che le $\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}$ sono gli elementi reciproci delle $a_{\alpha,\beta}$ nel determinante $|a_{\alpha,\beta}|$ [14].

Però le (11) equivalgono, se $\mu = \nu$, a queste altre equazioni nelle $\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}$:

$$\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\gamma}\, a_{\beta,\delta} = a_{\gamma,\delta}, \tag{12}$$

e queste ultime, a differenza delle (11), *formano sempre, anche se* $\mu < \nu$, *un sistema compatibile.* E infatti: se fra le righe o colonne della matrice $\left(\text{quadrata, simmetrica, d'ordine } \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)$ dei coefficienti delle $\underset{m}{a}^{\alpha,\beta}$ nelle (12) sussiste una qualunque relazione lineare

$$\underset{m}{H}^{\gamma,\delta}\, a_{\alpha,\gamma}\, a_{\beta,\delta} = 0 \qquad \left(\underset{m}{H}^{\gamma,\delta} = \underset{m}{H}^{\delta,\gamma}\right) \tag{13}$$

ne segue anzitutto, ogni relazione lineare fra le $a_{\alpha,\beta}$ dovendo essere conseguenza lineare delle (10),

$$\underset{m}{H}^{\gamma,\delta}\, a_{\alpha,\gamma} = \lambda^{a}_{\alpha}\, \underset{m}{k}^{\delta}_{a} \qquad (a = 1, 2, \ldots, q) \tag{14}$$

con opportuni valori dei coefficienti λ^{a}_{α}. Dalle (10), (14) ricaviamo che deve essere

$$\lambda^{a}_{\alpha}\, \underset{m}{k}^{\delta}_{a}\, \underset{m}{k}^{\alpha}_{b} = 0. \quad [15] \tag{15}$$

[14] Per precisare il valore di questo determinante supporremo (ad es.) che gli stati di α, β siano disposti *nell' ordine naturale* (ved. [8]).

[15] È superfluo qui avvertire che rispetto all' indice m, che ha un valore fisso, *non va eseguita alcuna sommazione.*

Ma per l'ipotesi che le k^α_a, $a = 1, 2, \ldots, q$ siano *linearmente indipendenti*, dalle (15) abbiamo

$$\lambda^a_\alpha \underset{m}{k^\alpha_b} = 0 , \tag{16}$$

e in particolare, tenendo presenti le (14),

$$\lambda^a_\alpha \underset{m}{k^\alpha_a} = \underset{m}{H^{\gamma, \delta}} a_{\gamma, \delta} = 0 . \tag{17}$$

Ciò prova quanto volevamo. Le (12) essendo dunque *sempre compatibili*, determinano *o un solo sistema di soluzioni* $\underset{m}{a^{\alpha, \beta}}$ (nel caso normale, e allora soltanto), *o una totalità di infinite soluzioni* (in ogni altro caso): ad ogni modo se $\underset{m}{a^{* \, \alpha, \beta}}$ è un particolare sistema di soluzioni, la soluzione più generale è

$$\underset{m}{a^{\alpha, \beta}} = \underset{m}{a^{* \, \alpha, \beta}} + \chi^{\alpha, a} \underset{m}{k^\beta_a} + \chi^{\beta, a} \underset{m}{k^\alpha_a} , \tag{18}$$

le $\chi^{\alpha, a}$ essendo coefficienti arbitrari. In ogni caso riguarderemo ciascun sistema di soluzioni $\underset{m}{a^{\alpha, \beta}}$ delle (12) come un sistema di componenti del tensore fondamentale di specie m, che diremo componenti *controvarianti* (e le $a_{\alpha, \beta}$, componenti *covarianti*); avvertendo però che se $\mu < \nu$, ciò non va inteso nel significato usuale della parola: ma soltanto in questo senso, che se le $\underset{m}{a^{\alpha, \beta}} [u]$ sono componenti del tensore fondamentale nel sistema coordinato u^r, le $\frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} \underset{m}{a^{\alpha, \beta}} [u]$ ne sono componenti nel sistema $\bar{u}^r$. *Gli infiniti sistemi di valori delle componenti controvarianti del tensore fondamentale nei due sistemi coordinati si possono coordinare in coppie, per le quali sussistono le usuali formule di trasformazione per controvarianza.* Se due sistemi di componenti $a^{\alpha, \beta} [u]$, $\bar{a}^{\gamma, \delta} [\bar{u}]$ si suppongono noti, non si potrà affermare senz'altro che sia $\underset{m}{\bar{a}^{\gamma, \delta}} [\bar{u}] = \frac{\partial \bar{u}^\gamma}{\partial u^\alpha} \frac{\partial \bar{u}^\delta}{\partial u^\beta} \underset{m}{a^{\alpha, \beta}} [u]$, ma soltanto

$$(19)\qquad \left(\bar a_{m}^{\gamma,\delta}[\bar u] - \frac{\partial \bar u^\gamma}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar u^\delta}{\partial u^\beta}\, a_{m}^{\alpha,\beta}[u]\right)\bar a_{\gamma,\varepsilon}\,\bar a_{\delta,\iota} = 0\,.$$

$$(\rho_\alpha,\ \rho_\beta,\ \rho_\gamma,\ \rho_\delta,\ \rho_\varepsilon,\ \rho_\iota \leq m)\,.$$

Si potranno anche formare *componenti miste* del tensore fondamentale di specie m, le quali saranno caratterizzate dal soddisfare al sistema di equazioni

$$(20)\qquad a_{m\gamma}^{\beta}\ a_{\beta,\delta} = a_{\gamma,\delta}\,.$$

Nel caso normale si avrà anche, evidentemente,

$$(21)\qquad a_{m\gamma}^{\beta} = a_{m}^{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\gamma}\,;$$

mentre nel caso generale ($\mu < \nu$) si potrà soltanto dire che le (21) dànno una classe di valori delle $a_{m\gamma}^{\beta}$, ma non la più generale. Le (20) mostrano in particolare che un sistema di valori delle $a_{m\gamma}^{\beta}$ (nel caso normale l'*unico* sistema di valori) è costituito dalle δ_γ^β ($=1$ se $\beta=\gamma$; $=0$ se $\beta \neq \gamma$). (Si noti che se $\mu < \nu$, tale sistema di valori *non è compreso* nella form. (21)).

3. - *Vettori e tensori di* σ_m; *vettori normali a* σ_m. Sia ora ξ un vettore di R_N che pensiamo applicato a un punto P di V_n e giacente nello spazio ivi m-osculatore, σ_m: lo diremo brevemente *un vettore di* σ_m. Se $m=1$ il vettore, giacente nell'R_n tangente, si dirà anche *un vettore di* V_n in P. Per m qualunque, e, corrispondentemente, μ qualunque ([16]), dato un vettore ξ di σ_m in P risulteranno sempre determinate (rispetto al supposto sistema di coordinate curvilinee u^r) le ν quantità

$$(22)\qquad \xi_\alpha = \xi \times P_\alpha\,,$$

che manifestamente formano (per le (4), (7)) gli elementi di un sistema covariante a un indice di classe m; le diremo dunque

([16]) Rammentiamo che μ è il numero di dimensioni del σ_m.

σ_m*-componenti covarianti* (nel sistema u) del vettore ξ. Le σ_1-componenti si diranno anche V_n-componenti. Si noti che le σ_m-componenti covarianti di un vettore di σ_m, escluso il caso normale $\mu = \nu$, *non si possono assegnare ad arbitrio;* dalle (9), (22) segue infatti che esse debbono essere legate dalle $q\,(=\nu-\mu)$ relazioni lineari

$$k^{\alpha}_{\underset{m}{a}}\ \xi_\alpha = 0\,; \tag{23}$$

queste sono necessarie e sufficienti perchè le ξ_α (componenti di un sistema covariante a un indice di classe m) siano le σ_m-componenti covarianti di un vettore di σ_m.

Siano dunque date ν quantità soddisfacenti alle (23), cioè, sia ancora dato un vettore ξ di σ_m. Le condizioni

$$a_{\alpha,\,\beta}\ \xi^\beta = \xi_\alpha\,, \tag{24}$$

formando per le (23), (10) un sistema lineare *sempre compatibile* nelle ξ^β, determineranno un sistema (se $\mu=\nu$) o infiniti sistemi (se $\mu<\nu$) di soluzioni ξ^β. Tali quantità ξ^β ([17]), soddisfacenti alle (24), si diranno σ_m*-componenti controvarianti* del vettore ξ. Esse dunque *nel solo caso normale* sono univocamente determinate, per qualunque vettore di σ_m, e si possono allora anche esprimere nel modo seguente:

$$\xi^\alpha = \underset{m}{a}^{\alpha,\,\beta}\ \xi_\beta\,. \tag{25}$$

È interessante però osservare che anche nel caso generale le (25) conservano significato, e dànno allora, *sotto la sola condizione che il supposto vettore* ξ *non sia nullo,* un *qualunque* sistema di σ_m-componenti controvarianti di ξ, cioè, di soluzioni delle (24), quando al posto delle $\underset{m}{a}^{\alpha,\,\beta}$ s'intenda posto un qualunque sistema (18) di soluzioni delle (12). La verifica è immediata, bastando osservare che, se $\xi^{*\,\alpha}$ è un particolare sistema di soluzioni delle (24), la soluzione più generale è

([17]) che veramente andrebbero indicate con $\underset{m}{\xi}^\beta$, perchè, a differenza delle ξ_α, dipendono anche dal valore di m.

$$\xi^\alpha = \xi^{*\alpha} + \lambda^a \underset{m}{k}{}^\alpha_a : \tag{26}$$

le λ^a essendo coefficienti arbitrari; cosicchè, tenendo presenti le (18), vediamo che anche mediante le (25), *purchè le* ξ_β *non siano tutte nulle*, si può esprimere tale soluzione generale. *Nel caso del vettore nullo* le (25) dànno per esso il solo sistema di componenti controvarianti $\xi^\alpha = 0$, ma le (26) mostrano che anche le $\lambda^a \underset{m}{k}{}^\alpha_a$ sono componenti del vettore nullo; in particolare le k^α_a stesse, per $a = 1, 2, \ldots, q$, costituiscono q sistemi linearmente indipendenti di σ_m-componenti controvarianti (non tutte nulle) del vettore nullo.

Siano le ξ^α delle σ_m-componenti controvarianti di un vettore di σ_m: è ovvio che si ha

$$\xi = \xi^\alpha P_\alpha ; \tag{27}$$

in effetto per le (8), (24) è $(\xi^\alpha P_\alpha) \times P_\beta = \xi_\beta$. Viceversa, se ξ è un vettore di σ_m, sarà sempre possibile decomporlo in vettori paralleli ai ν vettori P_α: in modo unico nel caso normale, altrimenti in infiniti modi. In ogni caso se le (27) dànno una di queste decomposizioni, le ξ^α sono σ_m-componenti controvarianti di ξ.

Un sistema di quantità ξ^α assegnate ad arbitrio si potrà sempre considerare costituito da σ_m-componenti controvarianti di un vettore di σ_m: il vettore $\xi^\alpha P_\alpha$. Due sistemi ξ^α, η^α sono σ_m-componenti controvarianti *di uno stesso vettore* di σ_m allora e solo che

$$(\xi^\alpha - \eta^\alpha) P_\alpha = 0 , \quad \textit{oppure} \ (\xi^\alpha - \eta^\alpha) a_{\alpha, \beta} = 0 . \tag{28}$$

In particolare se le $\underset{m}{a}{}^\alpha_\beta$ sono componenti miste del tensore fondamentale, per ogni vettore ξ di σ_m si ha

$$(\xi^\alpha - \underset{m}{a}{}^\alpha_\beta \, \xi^\beta) \, a_{\alpha, \gamma} = 0 , \tag{29}$$

il che esprimerà dunque che *le* ξ^α *e le* $\underset{m}{a}{}^\alpha_\beta\,\xi^\beta$ *sono* σ_m*-componenti dello stesso vettore.* Notiamo anzi che se le $\xi^{*\alpha}$ sono componenti di un vettore *non nullo, il più generale* sistema di componenti controvarianti di questo può anche così esprimersi: $\underset{m}{a}{}^\alpha_\beta\,\xi^{*\beta}$. Osserviamo ancora che si ha, invece, senz'altro,

$$\xi_\alpha = \underset{m}{a}{}^\beta_\alpha\,\xi_\beta\,. \tag{30}$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè le quantità $\xi^\alpha[u]$, $\bar{\xi}^\alpha[\bar{u}]$ siano, nei due sistemi u^r e $\bar{u}^r$, σ_m-componenti controvarianti di uno stesso vettore, è che si abbia

$$\left(\xi^\alpha - \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}\,\bar{\xi}^\beta\right) a_{\alpha,\gamma} = 0\,; \tag{31}$$

queste relazioni tengono il luogo delle usuali formule di trasformazione per controvarianza. Ciò può anche esprimersi (cfr. n. prec.) dicendo che le "σ_m-componenti controvarianti" di un vettore di σ_m formano un sistema (lineare, $(q-1)$-dimensionale) di sistemi assoluti *controvarianti* nel significato usuale della parola; due qualunque dei quali sono legati dalle (28).

Dati due vettori $\xi = \xi^\alpha P_\alpha$, $\eta = \eta^\alpha P_\alpha$ di σ_m si ha, per le (8), (12), (24)

$$\xi \times \eta = a_{\alpha,\beta}\,\xi^\alpha\,\eta^\beta = \underset{m}{a}{}^{\alpha,\beta}\,\xi_\alpha\,\eta_\beta = \xi_\alpha\,\eta^\alpha = \xi^\alpha\,\eta_\alpha\,, \tag{32}$$

qualunque siano, nel caso d'indeterminazione ($\mu < \nu$) le σ_m-componenti controvarianti scelte per ξ, per η e pel tensore fondamentale. In particolare il quadrato del modulo di un vettore ξ si esprimerà:

$$\xi^2 = a_{\alpha,\beta}\,\xi^\alpha\,\xi^\beta = \underset{m}{a}{}^{\alpha,\beta}\,\xi_\alpha\,\xi_\beta = \xi_\alpha\,\xi^\alpha\,; \tag{33}$$

tutto come nel caso, ben noto, $m = 1$. Dunque, come in questo caso, così in generale il sistema assoluto $a_{\alpha,\beta}$ dato dalle (8) (intendendosi sempre ρ_α, $\rho_\beta \leq m$) ha appunto il ruolo di *tensore fondamentale della metrica.*

Dal caso dai *vettori* di σ_m si passa molto semplicemente ai *tensori* qualunque di σ_m, che non sono (escluso il caso normale) tutti i possibili sistemi assoluti a indici di classe m; come non ogni tensore covariante del 1° ordine ξ_α ci dà un *vettore* di σ_m. Se chiamiamo, secondo le vedute di Boggio e Burali-Forti ([18]), *tensore d'ordine* $h+1$ di σ_m ogni operatore lineare fra h-uple ordinate di vettori di σ_m e vettori di σ_m (o anche: fra $(h+1)$-uple di vettori di σ_m e scalari) vediamo subito che tale "tensore" ammette delle componenti covarianti, ad $h+1$ indici di classe m, perfettamente determinate rispetto ad un assegnato sistema di coordinate curvilinee; e componenti miste e controvarianti, che sono del tutto determinate nel caso normale, e ad ogni modo si possono ottenere da quelle covarianti col metodo seguito da noi pei vettori e pel tensore fondamentale (che risulta un effettivo *tensore*, nel senso ora precisato) ([19]). Le componenti aventi almeno un indice (di classe m) di covarianza, che designeremo (indicando esplicitamente, degli indici di covarianza, soltanto questo indice), genericamente con $T^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t}_{\ldots\ldots, \alpha, \ldots\ldots}$, soddisfano alle condizioni

$$T^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t}_{\ldots\ldots, \alpha, \ldots\ldots} \, \underset{m}{k}{}^{\alpha}_{a} \, a_{\beta_1, \gamma_1} \, a_{\beta_2, \gamma_2} \ldots a_{\beta_t, \gamma_t} = 0 \,, \tag{34}$$

$$\begin{pmatrix} a = 1, \; 2, \ldots, \; q \\ \rho_\alpha, \; \rho_{\beta_1}, \ldots, \; \rho_{\beta_t}, \; \rho_{\gamma_1}, \ldots, \; \rho_{\gamma_t} \leq m \end{pmatrix}$$

e vicersa, il sussistere di queste relazioni *per ciascun indice di covarianza* del tensore T è condizione sufficiente, oltrechè necessaria, perchè esso sia, nel senso sopra precisato, *un tensore di* σ_m.

([18]) Ved. **78**, **pag.** 150. Veramente il Boggio non parla affatto di *tensori* d'ordine $h+1$, ma di *omografie* d'ordine h (*iperomografie*, se $h > 1$); denominazione che dal suo punto di vista è certo meglio giustificata.

([19]) Dunque anche per un tensore qualunque le componenti covarianti, controvarianti, miste, del tensore fondamentale potranno servire per abbassare o alzare un indice, o per cambiar nome a un indice; però nel caso dell'innalzamento di uno o più indici, se il tensore è di ordine > 1, la moltiplicazione interna pel tensore fondamentale *non dà la più generale determinazione delle componenti cercate.*

Ci si presenteranno anche sistemi assoluti a due o più indici *di classi differenti:* diremo che un tale sistema è un *tensore specializzato come V_n* se si comporta, nei riguardi di ciascuno suo indice di classe $h (h = 1, 2, \ldots)$ come un tensore di σ_h. Per questo è necessario e sufficiente che valgano, per ciascun dei suoi indici di covarianza, le corrispondenti relazioni (34) (ove dovrà ora intendersi che gli indici $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ siano di classi rispettivamente uguali a quelle di $\beta_1, \beta_2, \ldots$).

Tornando dai tensori qualunque ai vettori: ci siamo occupati finora di vettori di V_n o dei σ_m, ma potrà occorrerci di prendere in considerazione anche vettori di R_N applicati a punti di V_n e ivi *ortogonali ai rispettivi* σ_m, che diremo brevemente *vettori normali a* σ_m; oppure, *comunque diretti.* Per questo ci occorre introdurre un opportuno riferimento. Siano $\overset{i}{\underset{m}{X}}$ $(i, j, h, k, l = 1, 2, \ldots, p)$ $p = N - \mu$ campi di vettori unitari, applicati ai punti della V_n e ivi ortogonali fra loro due a due e al corrispondente spazio m-osculatore; allora per ogni vettore normale a σ_m in quel punto, posto

$$\xi_i = \xi \times \overset{i}{\underset{m}{X}}, \tag{35}$$

si avrà

$$\xi = \xi_i \overset{i}{\underset{m}{X}} \quad ([20]). \tag{36}$$

Per ogni sostituzione ortogonale, a coefficienti (in generale) funzioni del posto in V_n, sui vettori $\overset{i}{\underset{m}{X}}$, le *componenti* σ_m*-ortogonali* ξ_i subiscono la sostituzione lineare controgrediente, che però *è la sostituzione stessa*, dato che questa si suppone ortogonale. Tali quantità ξ_i si potranno dunque riguardare come le componenti di un *tensore del primo ordine* per quelle sostituzioni ([21]).

([20]) Secondo la convenzione di sommazione (ved. ([10])) qui si dovrà sommare rispetto ad i da 1 a $p = N - \mu$: l'avvertenza valga anche pel seguito.

([21]) Qui, ovviamente, non v'è luogo a distinguere la *covarianza* dalla *controvarianza*.

Naturalmente si potranno considerare anche tensori *d'ordine qualunque* ad indici $i, j, k, \ldots$ (σ_m-ortogonali), e così pure, tensori con indici della serie $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ($\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma, \ldots \leq m$), relativi agli spazi σ_m (anche *per diversi valori di* m), e della serie $i, j, k, \ldots$, relativi al campo degli $R_{N-\mu}$ normali ad essi; è superfluo notare che anche a questi tensori, con opportune avvertenze, si estente tutta l'algebra tensoriale ordinaria.

Sia infine ξ (P) un campo di vettori di R_N applicati ai punti P di V_n, ma comunque diretti. Se ξ', ξ'' sono i vettori componenti di ξ secondo σ_m e normale a σ_m, potremo determinare le corrispondenti componenti scalari

$$(37) \qquad \xi'_\alpha = \xi' \times P_\alpha = \xi \times P_\alpha ; \quad \xi''_i = \xi'' \times \underset{m}{\overset{i}{X}} = \xi \times \underset{m}{\overset{i}{X}} ;$$

indi calcolare un sistema, ξ'^α, di σ_m-componenti controvarianti di ξ'; si avrà infine

$$(38) \qquad \xi = \xi'^\alpha P_\alpha + \xi''_i \underset{m}{\overset{i}{X}} .$$

Questa decomposizione ci sarà utile più innanzi (n. 5).

Cap. 2° - Generalizzazione del trasporto per parallelismo di Levi-Civita, e analisi tensoriale.

4. - *Trasporto per equipollenza (e per parallelismo), relativo a V_n, dei vettori di σ_m e normali a σ_m.* Veniamo ora a introdurre una nozione fondamentale, che ci permetterà poi di giungere in modo geometrico alla derivazione covariante generalizzata del Vitali pei campi di tensori, a indici di classi qualunque, applicati ai punti di una V_n in R_N, e *specializzati come* V_n (n. prec.); anche in ipotesi più generali di quelle del Vitali circa la V_n.

Sia $P = P(t)$ un punto variabile su di una linea γ di V_n, e sia $\xi = \xi(t)$ una serie (o campo 1-dimensionale) di vettori di σ_m applicati ai punti di γ. *Diremo che i vettori* $\xi(t)$ *variano lungo* γ *per equipollenza di specie* m, *relativa a* V_n [$(m, 1)$*–equipollenza*] *se il differenziale* $d\xi(t)$ *lungo* γ *si mantiene costantemente normale a* σ_m, ossia, se le direzioni associate, secondo Bianchi (o prime normali principali associate) alla serie $\xi(t)$ lungo γ in R_N sono normali a σ_m. In altre parole: se nel trasporto lungo un archetto infinitesimo PP^* di γ il vettore $\xi(t)$ conserva inalterati, a meno di quantità infinitesime d'ordine ≥ 2 rispetto a $\bmod(P^*-P)$ preso come infinitesimo principale, il modulo, e l'angolo d'inclinazione su di una qualunque direzione dello spazio σ_m, m–osculatore della V_n in P. Diremo, corrispondentemente, che le *direzioni* dei vettori $\xi(t)$ variano lungo γ *per parallelismo di specie* m, o $(m, 1)$–parallelismo, relativo a V_n. Si noti che le definizioni date *sono affatto indipendenti dalla dimensione* μ *dei* σ_m *osculatori*, e in particolare, dal presentarsi o no del caso normale. Per $m = 1$ si ricade nel caso ben noto del trasporto per equipollenza (o parallelismo) secondo Levi-Civita lungo in V_n, che dal nostro punto di vista è dunque il trasporto di specie 1 ($(1, 1)$-parallelismo).

Analogamente, se $\eta(t)$ è una serie di vettori applicati ai punti di γ e ivi normali ai rispettivi σ_m di V_n, si dirà che *i vettori* η *variano lungo* γ *per equipollenza* (e le loro direzioni, per parallelismo) *di specie* m *relativa a* V_n *se il differenziale* $d\eta(t)$ (o la prima normale principale associata, in R_N, alla serie $\eta(t)$) *lungo* γ *si mantiene costantemente nel corrispondente* σ_m, m–osculatore a V_n. In altre parole: se nel trasporto lungo un archetto infinitesimo PP^* di γ il vettore $\eta(t)$ conserva inalterati, a meno di quantità infinitesime d'ordine ≥ 2 rispetto a $\bmod(P^*-P)$, il modulo, e l'angolo d'inclinazione su di una qualunque direzione normale allo spazio σ_m m-osculatore in P. Per $m = 1$ si ricade nel trasporto parallelo, relativo a V_n, dei vettori normali a una V_n in R_N, da me definito in un lavoro del 1928 [22]; e se, più in particolare, è anche $n = 1$, si ritrova

[22] Ved. **37**, pag. 45. Si vedano anche i miei lavori: **38**, p. 182 e **66**, pp. 13-14.

il trasporto dei vettori normali lungo una curva secondo FERMI ([23]).

Si vede immediatamente che i trasporti dei vettori, sopra definiti, sono *lineari*, cioè portano vettori complanari in vettori complanari; e anzi, *euclidei*, cioè conservano il prodotto scalare di due qualunque vettori trasportati. Per effetto dell' uno o dell'altro dei trasporti ora detti, la stella dei vettori di σ_m, o normali a σ_m, nel punto generico di γ, si sposta lungo γ rigidamente. È evidente come risulti anche intrinsecamente determinato dalla V_n un trasporto rigido (che diremo ancora: trasporto per equipollenza di specie m relativo a V_n) *dell'intera stella di vettori di* R_N applicati a un punto variabile su di una linea γ di V_n: basta porre (cfr. **66**, pp. 14-15 pel caso $m = 1$) la condizione che i componenti secondo σ_m e normale a σ_m del vettore trasportato varîno secondo le rispettive leggi d'equipollenza dei vettori di σ_m e normali a σ_m.

5. – *Rappresentazione analitica dei trasporti per equipollenza di specie m relativi a* V_n*; simboli di* CHRISTOFFEL *generalizzati, differenziale assoluto di specie m di un vettore di* σ_m *o normale a* σ_m. Vediamo ora come, per la rappresentazione analitica dei trasporti dei vettori sopra introdotti, si sia condotti appunto a ritrovare le operazioni differenziali del calcolo assoluto del VITALI.

La condizione pel trasporto di un vettore $\xi(t)$ di σ_m lungo la linea γ, $P = P(t)$, secondo la legge dell'equipollenza di specie m relativa a V_n, si potrà manifestamente esprimere annullando il componente secondo σ_m del differenziale ordinario (cioè, calcolato in R_N) di $\xi(t)$, ossia, annullando le relative σ_m-componenti covarianti:

$$(39)\qquad d\xi \times P_\alpha = 0 .$$

Cioè, per le (22),

$$(40)\qquad d\xi_\alpha - \xi \times dP_\alpha = 0 .$$

([23]) **66**, pag. 15.

Se ξ^β è un qualunque sistema di σ_m-componenti controvarianti del vettore ξ, le precedenti equazioni possono anche scriversi, tenendo presenti le (27),

$$(41)\qquad d\xi_\alpha - \xi^\beta\, P_\beta \times P_{\alpha r}\, du^r = 0\,.$$

Qui potremmo, per le (8), scrivere $a_{\alpha r,\beta}$ al luogo di $P_\beta \times P_{\alpha r}$. Le $a_{\alpha r,\beta}$ rientrano fra le componenti (covarianti) del tensore fondamentale di specie $m+1$, ma si possono d'altra parte anche esprimere (come mostreremo al n. seg.) per le componenti $a_{\alpha\beta}$ del tensore fondamentale di specie m e le loro derivate prime. Sotto tale aspetto, che è quello appunto che qui interessa, le diremo *simboli di* CHRISTOFFEL *generalizzati di prima specie, di classe* m, per la V_n, e le indicheremo con la notazione $C_{\alpha r,\beta}$ [24]. Dunque poniamo

$$(42)\qquad C_{\alpha r,\beta} = P_{\alpha r} \times P_\beta \quad (= a_{\alpha r,\beta} = a_{\beta,\alpha r}) \quad (\rho_\alpha, \rho_\beta \leq m)$$

onde le (41) potranno scriversi

$$(43)\qquad d\xi_\alpha - C_{\alpha r,\beta}\,\xi^\beta\, du^r = 0\,.$$

Ancora: è ovvio che le equazioni nelle $\underset{m}{C}{}^\gamma_{\alpha r}$

$$(44)\qquad \underset{m}{C}{}^\gamma_{\alpha r}\, a_{\beta,\gamma} = C_{\alpha r,\gamma}$$

formano un sistema *sempre compatibile:* le soluzioni sono univocamente determinate nel solo caso normale, mediante le formule

$$(45)\qquad \underset{m}{C}{}^\gamma_{\alpha r} = a^{\gamma,\beta}\, C_{\alpha r,\beta}\,.$$

([24]) I simboli di 1ª specie di classe m sono pure simboli di classe h, con $h > m$ qualunque, e perciò per essi (a differenza di quanto accade pei simboli di 2ª specie) sarebbe superfluo usare una notazione che indicasse anche la classe del simbolo.

Nel caso generale queste dànno una classe infinita di soluzioni delle (44), non però la più generale, che può così esprimersi $\left(\underset{m}{C}{}^{*\gamma}_{\alpha r}\right.$ essendo una soluzione particolare$\left.\right)$:

$$\underset{m}{C}{}^{\gamma}_{\alpha r} = \underset{m}{C}{}^{*\gamma}_{\alpha r} + \lambda^{a}_{\alpha r} \underset{m}{k}{}^{\gamma}_{a}, \tag{46}$$

le $\lambda^{a}_{\alpha r}$ essendo coefficienti arbitrari.

Le $\underset{m}{C}{}^{\gamma}_{\alpha r}$ si diranno *simboli di* Christoffel *generalizzati di seconda specie, di classe m* ([25]). Ci occuperemo di questi simboli (di 1ª e di 2ª specie) al n. seg.; per ora riprendiamo le (43). Introducendovi le $\underset{m}{C}{}^{\gamma}_{\alpha r}$ queste equazioni si scrivono

$$d\xi_\alpha - \underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha r}\, \xi_\beta\, du^r = 0\,. \tag{47}$$

I primi membri delle (39), e quindi anche delle (40), (41), (43), (47), sono le σ_m-componenti covarianti di un vettore di σ_m: il componente secondo σ_m del differenziale ordinario $d\xi$. È facile calcolarne anche delle σ_m–componenti controvarianti: basta notare che le (39) possono anche scriversi

$$d(\xi^\alpha P_\alpha) \times P_\beta = 0\,, \tag{48}$$

cioè

$$d\xi^\alpha \cdot a_{\alpha,\beta} + \xi^\alpha P_{\alpha r} \times P_\beta\, du^r = 0\,; \tag{49}$$

o ancora, introdotto qui pure un sistema di valori dei simboli di Christoffel di seconda specie di classe m,

$$\left(d\xi^\alpha + \underset{m}{C}{}^{\alpha}_{\beta r}\, \xi^\beta\, du^r\right) a_{\alpha,\gamma} = 0\,; \tag{50}$$

([25]) Ved. Vitali, **65**, p. 182

le qualità entro parentesi sono le componenti cercate. Dunque se poniamo

$$(51)\quad \begin{aligned} &a) \quad \overline{d}_{(m)}\xi_\alpha = d\xi_\alpha - \underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha r}\,\xi_\beta\, du^r \\ &b) \quad \overline{d}_{(m)}\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \underset{m}{C}{}^{\alpha}_{\beta r}\,\xi^\beta\, du^r \end{aligned}$$

le equazioni

$$(52)\qquad \overline{d}_{(m)}\xi_\alpha = 0 \qquad \text{oppure} \qquad \overline{d}_{(m)}\xi^\alpha \cdot a_{\alpha,\gamma} = 0$$

ci dànno la cercata rappresentazione analitica del trasporto per equipollenza di specie m, relativo a V_n, dei vettori di σ_m; e indipendentemente poi da ogni ipotesi su $\xi(t)$, le quantità $\overline{d}_{(m)}\xi_\alpha$, $\overline{d}_{(m)}\xi^\alpha$ *definite dalle* (51) *sono le σ_m-componenti covarianti* (nel sistema u^r) e (per ogni scelta dei valori delle ξ^β e $\underset{m}{C}{}^{\alpha}_{\beta r}$) *un sistema di valori delle σ_m-componenti controvarianti di un vettore di σ_m: il componente secondo σ_m di $d\xi$.*

Questo vettore

$$(53)\qquad d'_{(m)}\xi = \underset{m}{a}{}^{\alpha,\beta}\, d\xi \times P_\alpha \,.\, P_\beta = \underset{m}{a}{}^{\alpha,\beta}\, \overline{d}_{(m)}\xi_\alpha \,.\, P_\beta = \overline{d}_{(m)}\xi^\beta \,.\, P_\beta$$

verrà detto, adottando la denominazione introdotta pel caso $m = 1$ dal Boggio, (**75**, pp. 177-178), *differenziale superficiale di specie m,* relativo a V_n, di $\xi(t)$. Diremo invece *differenziazione assoluta di specie m* l'operazione con cui dalle componenti ξ_α o ξ^α di ξ si ricavano, mediante le (51), le componenti $\overline{d}_{(m)}\xi_\alpha$ o $\overline{d}_{(m)}\xi^\alpha$ del vettore $d'_{(m)}\xi$ detto sopra ([26]).

([26]) Si tratta in sostanza di una *differenziazione lineare*, che può farsi rientrare nella generalizzazione di König e Schouten del «differenziale cogrediente» di Hessenberg (il differenziale che corrisponde alla derivata covariante di Ricci). (Ved. la mia Nota **90**, e, per la bibliografia, la stessa Nota e il mio lav. **38**). Si noti che, nei riguardi di questa «differenziazione assoluta», $\xi = \xi^\alpha P_\alpha$ deve riguardarsi come un invariante, cioè $\overline{d}_{(m)}\xi = d\xi$;

Va esplicitamente notato che le $\overline{d}_{(m)}\xi^\alpha$, definite dalla (51) *b*), escluso al solito il caso normale, non comprendono tutti i possibili sistemi di σ_m-componenti controvarianti di $d'_{(m)}\xi$. Ciò non porta alcun incoveniente nel seguito, ma va tenuto presente.

Si può analogamente definire la *derivata superficiale di specie m*, relativa a V^n, di $\xi(t)$, mediante la formula

$$(54) \qquad \underset{(m)}{\nabla'_r}\xi = \underset{m}{a^{\alpha,\beta}} \frac{\partial \xi}{\partial u^r} \times P_\alpha \cdot P_\beta \quad \text{onde } d'_{(m)}\xi = \underset{(m)}{\nabla'_r}\xi \cdot du^r .$$

Cioè: $\underset{(m)}{\nabla'_r}\xi$ è, per ciascun valore di r, il vettore componente secondo σ_m del vettore derivato ordinario $\dfrac{\partial \xi}{\partial u^r}$. Posto, corrispondentemente,

$$(55) \qquad a) \quad \underset{(m)}{D_r}\xi_\alpha = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial u^r} - \underset{m}{C^\beta_{\alpha r}}\xi_\beta , \qquad b) \quad \underset{(m)}{D_r}\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial u^r} + \underset{m}{C^\alpha_{\beta r}}\xi^\beta$$

onde

$$(56) \qquad a) \quad \overline{d}_{(m)}\xi_\alpha = \underset{(m)}{D_r}\xi_\alpha \cdot du^r, \quad b) \quad \overline{d}_{(m)}\xi^\alpha = \underset{(m)}{D_r}\xi^\alpha \cdot du^r ,$$

le $\underset{(m)}{D_r}\xi_\alpha$, $\underset{(m)}{D_r}\xi^\alpha$ si diranno *derivate covarianti*, di specie *m*, relative a V_n, di ξ_α e di ξ^α, rispettivamente. Come le componenti del differenziale superficiale (di specie *m*) sono i differenziali assoluti delle sue componenti, così le componenti della derivata

ciò non consente di identificare $\overline{d}_{(m)}\xi$ con $d'_{(m)}\xi$. In sostanza l'operatore $d'_{(m)}$ corrisponde (per $m=1$) alla «differenziazione in V_n» secondo SCHOUTEN, e $\overline{d}_{(m)}$, alla «differenziazione secondo R. LAGRANGE» per le V_n in V_N da me usata nei miei lavori sulle varietà subordinate. *Finchè si operi sulle componenti*, tali operazioni si identificano; mentre soltanto per $d'_{(m)}$, e non per $\overline{d}_{(m)}$, sussiste il teorema secondo cui «le componenti del differenziale di un vettore sono i differenziali delle sue componenti». Ciò nonostante, appare più utile, pel seguito, l'uso dell'operatore $\overline{d}_{(m)}$, e della corrispondente derivazione covariante, che nel caso normale (come sopra è accennato) si riduce a quella del VITALI.

superficiale del supposto vettore sono le derivate covarianti delle sue componenti.

È agevole verificare come le $\underset{(m)}{D_r}\xi_\alpha$, $\underset{(m)}{D_r}\xi^\alpha$ siano nel caso normale proprio le derivate covarianti generalizzate del Vitali (**65**, p. 184 e seg.); mentre per $m=1$, esse si riducono alle derivate covarianti di Ricci e Christoffel.

Torneremo fra non molto (n. 6, 7) ad occuparci delle operazioni differenziali ora dette, accennandone anche l' estensione a tensori qualunque. Ma indichiamo qui ancora la facile estensione di quanto sopra s' è detto pei vettori di σ_m al caso dei vettori normali a σ_m.

La condizione pel trasporto equipollente di specie m, relativo a V_n (n. prec.) di un vettore $\xi=\xi(t)$ che lungo la curva $P=P(t)$ di V_n si mantenga normale ai σ_m si esprime così:

$$d\xi \times \underset{m}{\overset{i}{X}} = 0\,, \tag{57}$$

cioè, per la (35) (scritto per brevità $\overset{i}{X}$ al luogo di $\underset{m}{\overset{i}{X}}$):

$$d\xi_i - \xi \times d\overset{i}{X} = 0\,; \tag{58}$$

o ancora, per le (36),

$$d\xi_i - \frac{\partial \overset{i}{X}}{\partial u^r} \times \overset{j}{X} \cdot \xi_j du^r = 0\,. \tag{59}$$

Posto [27]

$$\underset{m}{A_{ijr}} = \frac{\partial \overset{i}{X}}{\partial u^r} \times \overset{j}{X} = -\frac{\partial \overset{j}{X}}{\partial u^r} \times \overset{i}{X} \tag{60}$$

le (59) potranno scriversi:

$$d\xi_i - \underset{m}{A_{ijr}} \xi_j du^r = 0\,. \tag{61}$$

([27]) Ved., pel caso $m=1$, i miei lavori cit. ([22]): **37**, p. 45; **38**, p. 182; **66**, p. 13.

I primi membri delle (57), e quindi anche delle (61), sono le componenti σ_m-ortogonali del vettore $d''_{(m)}\xi$, componente di $d\xi$ secondo la p-direzione normale al σ_m (*differenziale normale, di specie* m, del vettore ξ); esse sono, come le ξ_i (e a differenza delle $d\xi_i$) le componenti di un tensore del 1° ordine per le trasformazioni lineari ortogonali sui vettori $\overset{i}{X}$ di riferimento. Diremo che tali espressioni

$$(62) \qquad \bar{d}_{(m)}\xi_i = d\xi_i - \underset{m}{A_{ijr}}\xi_j du^r$$

sono i *differenziali assoluti* di specie m delle ξ_i. Al *differenziale normale* corrisponde *la derivata normale* $\underset{(m)}{\nabla''_r}\xi$, e ai differenziali assoluti le *derivate covarianti* $\underset{(m)}{D_r}\xi_i$ (di specie m, relative a V_n), secondo le formule

$$(63) \qquad d''_{(m)}\xi = \underset{(m)}{\nabla''_r}\xi \cdot du^r, \qquad \bar{d}_{(m)}\xi_i = \underset{(m)}{D_r}\xi_i \cdot du^r,$$

onde

$$(64) \qquad \underset{(m)}{\nabla''_r}\xi = \frac{\partial\xi}{\partial u^r} \times \overset{i}{X}\cdot\overset{i}{X}, \quad \underset{(m)}{D_r}\xi_i = \frac{\partial\xi_i}{\partial u^r} - A_{ijr}\xi_j .$$

Come le equazioni

$$(65) \qquad a)\ \ \bar{d}_{(m)}\xi_\alpha = 0 \qquad b)\ \ \bar{d}_{(m)}\xi_i = 0$$

rappresentano le leggi di trasporto per equipollenza di specie m rispettivamente pei vettori di σ_m e normali a σ_m, così verrà senz'altro rappresentata dal seguente sistema:

$$(66) \qquad a)\ \ \bar{d}_{(m)}\xi'_\alpha = 0, \quad b)\ \ \bar{d}_{(m)}\xi''_i = 0$$

la legge di trasporto per equipollenza di specie m (relativa a V_n) di un vettore di R_N definito su V_n (o lungo una linea di V_n) e comunque diretto; le ξ'_α e ξ''_i indicando (come al n. 3) le σ_m-componenti covarianti, le componenti σ_m-ortogonali dei vettori ξ' e ξ'', componenti di ξ secondo il σ_m e normale ad esso.

Possiamo però ottenere per questo trasporto e per gli altri prima considerati (che ne sono casi particolari) altre rappresentazioni in cui figura il vettore ξ stesso, anzichè delle componenti scalari; questo ci dà l'occasione di introdurre un ente geometrico che ci sarà utile più innanzi, il *tensore di curvatura euleriana di specie m.*

Riprendiamo la form. (38), che dà, per un vettore di R_N applicato in un punto P di V_n, la decomposizione nei suoi componenti secondo σ_m e normale a σ_m. Supposto che tale vettore vari nella serie $\xi(t)$, ricaviamo dalla (38) il differenziale $d\xi(t)$; poi decomponiamo anche questo vettore $d\xi(t)$ nei suoi componenti secondo σ_m e nomale a σ_m. Tenendo presenti le (42), (44), (51), (60), (62), e posto

$$(67) \qquad P_{\alpha r} \times \underset{m}{\overset{i}{X}} = \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}$$

otteniamo:

$$(68) \qquad d\xi = \overline{d}_{(m)}\xi'^{\alpha} \cdot P_\alpha + \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}\xi'^{\alpha} du^r \cdot \overset{i}{X} -$$

$$- a^{\alpha,\beta} \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\beta r} \xi_i'' du^r \cdot P_\alpha + \overline{d}_{(m)}\xi_i'' \cdot \overset{i}{X}.$$

Così è ottenuta per $d\xi$ la richiesta decomposizione, e anzi appare esplicitamente il contributo dei componenti secondo σ_m e normale a σ_m di ξ nel formare i componenti secondo σ_m e normale a σ_m di $d\xi$. Ovviamente di qui si possono di nuovo ricavare, pei trasporti equipollenti di specie m dei vettori di σ_m, normali a σ_m, o comunque diretti, le formule già trovate (65) *a*) e *b*), (66); ma posto

$$(69) \qquad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} = \underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r} \overset{i}{X}$$

abbiamo anche per le tre leggi di trasporto, rispettivamente, le equivalenti formule (in cui figura direttamente il vettore ξ):

$$(70) \qquad d\xi = \underset{m}{a}^{\alpha,\beta} P_\beta \times \xi \cdot \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} du^r \qquad \text{(vett. di } \sigma_m\text{)}$$

(71) $$d\xi = -\underset{m}{a}^{\alpha\cdot\beta} P_\beta \cdot \underset{m}{\Omega}_{\alpha, r} \times \xi \cdot du^r \quad (\text{vett. norm. a } \sigma_m)\cdot$$

(72) $$d\xi = \underset{m}{a}^{\alpha,\beta}\left(P_\beta \times \xi \cdot \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} - \underset{m}{\Omega}_{\alpha r} \times \xi \cdot P_\beta\right) du^r$$

(vett. comunque dir.).

Se introduciamo un sistema di coordinate (cartesiane ortogonali) x^A $(A, B, C, D, \ldots = 1, 2, \ldots, N)$ in R_N, detti $e^{(A)}$ $(A = 1, 2, \ldots, N)$ i vettori fondamentali degli N assi, e indicate con

(73) $$\xi_A = e^{(A)} \times \xi\,, \quad B_\alpha^A = e^{(A)} \times P_\alpha\,, \quad \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdots A} = e^{(A)} \times \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}$$

le R_N-componenti dei vettori (di R_N) ξ, P_α, $\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}$, le (72) (ad es.) si potranno anche scrivere

(74) $$d\xi_A = \underset{m}{a}^{\alpha.\beta}\left(\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A} B_\beta^B - \underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot B} B_\beta^A\right) \xi_B\, du^r\,.$$

Le $\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}^{\cdot\cdot A}$ rappresentano in forma *completamente* scalare (e i vettori $\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}$, in forma *parzialmente* scalare) un tensore che appartiene a R_N per l'indice A, a V_n per l'indice r, a σ_m per l'indice α: questo tensore, che per $m = 1$ si riduce al noto *tensore di curvatura euleriana* ([28]) (mentre allora le $\underset{m}{\overset{i}{\omega}}_{\alpha r}$ si riducono ai coefficienti delle 2ᵉ *forme fondamentali* relative alle congruenze di normali $\overset{i}{X}$) verrà detto, in generale, *tensore di curvatura euleriana di specie m.* Dalle (67), (69) ricaviamo subito che $\underset{m}{\Omega}_{\alpha r}$ *è il componente normale a* σ_m *di* $P_{\alpha r}$ (derivata d'ordine $\leq m + 1$ del punto P). Ma è interessante il fatto che considerando formalmente (come per le (4), (7) è lecito) P_α (nei riguardi dell'indice α) come un tensore covariante, del 1º ordine, di σ_m, e applicando ad esso la derivazione covariante, secondo

([28]) Ved. ad es. il mio lav. **66**, p. 12, e cfr. CARTAN, **23**, p. 43 e seg.

le form. (55), si ha

(75) $$\underset{(m)}{D_r} P_\alpha = P_{\alpha r} - \underset{m}{C^\beta_{\alpha r}} P_\beta ,$$

onde, per le (8), (42), (44),

(76) $$\underset{(m)}{D_r} P_\alpha \times P_\gamma = C_{\alpha r, \gamma} - \underset{m}{C^\beta_{\alpha r}} a_{\beta, \gamma} = 0 ,$$

e infine, proprio

(77) $$\underset{(m)}{D_r} P_\alpha = \underset{m}{\Omega_{\alpha r}} .$$

Per ogni sistema di valori di α, r, i vettori $\underset{m}{\Omega_{\alpha r}}$, cioè $P_{\alpha r} - \underset{m}{C^\beta_{\alpha r}} P_\beta$, sono dunque *vettori di* σ_{m+1} *normali a* σ_m. Dato il significato geometrico è ovvio che si avrà

(78) $$\underset{m}{\Omega_{\alpha r}} = 0 \qquad \text{per} \quad \rho_\alpha < m ,$$

perchè $\underset{m}{\Omega_{\alpha r}}$ è per $\rho_\alpha < m$ componente normale a σ_m di un vettore derivato di P d'ordine $\leq m$ (e quindi giacente in σ_m). La proprietà si verifica subito anche analiticamente, per mezzo delle (75); basta osservare che è, per le (44),

(79) $$\left(\underset{m}{C^\gamma_{\alpha r}} - \delta^\gamma_{\alpha r}\right) a_{\gamma, \beta} = 0 .$$

(Cfr. Vitali, **65**, p. 183). È per questa via che (nel caso normale) la proprietà detta sopra è stata ottenuta dal Vitali (**65**, p. 201 e seg.); questi più in generale ha notato che se I_α, con $\alpha = r_1, r_2, \ldots, r_m$, è la derivata $\dfrac{\partial^m I}{\partial u^{r_1} \ldots \partial u^{r_m}}$ dello scalare I, si ha $\underset{(m)}{D_r} I_\alpha = 0$ per $\rho_\alpha < m$ (loc. cit. p. 200). I termini di $\underset{(m)}{D_r} I_\alpha$ pei quali $\rho_\alpha = m$ costituiscono un tensore a $m + 1$ indici di classe 1, quello che il Vitali chiama l'$(m + 1)$-*esimo ricciano di* I (**65**, p. 201); dunque la proprietà espressa dalle (78) secondo il Vitali si può enunciare dicendo *che gli* $m+1$ *vettori, termini del ricciano* $(m+1)$*-esimo di* P_α, *sono normali a* σ_m.

È appunto cercando, fra i vettori ottenuti togliendo da una derivata $(m+1)$-esima del punto P una combinazione lineare dei vettori derivati d'ordine $\leq m$, *quelli che sono normali al* σ_m, che il VITALI è giunto (nel caso normale), alle sue derivate covarianti generalizzate $\underset{(m)}{D_r}$ ([29]). Svariate, interessanti ricerche del VITALI e della sua Scuola si sono poi orientate verso lo studio delle normali al σ_m nel σ_{m+1} (mediante i vettori $\underset{(m)}{D_r} P_\alpha$; specialmente pel caso $m=1$), e di alcune loro configurazioni notevoli (*sistemi principali di normali* ([30])). Qui invece (o meglio: nella Parte II di questo lavoro) ci varremo di $\underset{m}{\Omega_{\alpha r}}$, come si fa secondo BOMPIANI, SCHOUTEN, CARTAN per $m=1$, per lo studio delle proprietà d'ordine m della varietà in relazione con l'ambiente.

6. - *Proprietà dei simboli di* CHRISTOFFEL *generalizzati di classe* m*: loro espressioni per le* $a_{\alpha\beta}$. *Formule generalizzate di* CHRISTOFFEL. - Facciamo una breve digressione, a proposito dei simboli di CHRISTOFFEL generalizzati, introdotti con le (42), (44). Dimostriamo anzitutto la seguente proprietà, di notevole interesse geometrico (come meglio apparirà più innanzi):

I simboli $C_{\alpha t,\,\beta}$ *(e quindi anche i simboli* $\underset{m}{C^\beta_{\alpha t}}$ ([31])) *si possono esprimere per le* $a_{\alpha,\,\beta}$ *e per le loro derivate prime rispetto alle* u^t.

Premettiamo che ovviamente, in conseguenza delle (8), (42) si ha

$$\frac{\partial a_{\alpha,\,\beta}}{\partial u^t} = a_{\alpha t,\,\beta} + a_{\alpha,\,\beta t} = C_{\alpha t,\,\beta} + C_{\beta t,\,\alpha}. \tag{80}$$

Ciò posto: anzitutto le stesse (8), (42) dànno

$$C_{\lambda t,\,\beta} = a_{\lambda t,\,\beta} \qquad \rho_\lambda \leq m-1, \quad \rho_\beta \leq m. \tag{81}$$

([29]) Ved. VITALI, **34**, p. 411 e seg.; **43**, p. 301.

([30]) Ved. **34**, **41**, **44**, **45**, **46**, **47**, **48**, **49**; **53**, **55**, **57**, **61**, **67**, **70**, **73**, **74**, **77**, **82**, **84**, **85**; e **65**, p. 254 e seg.

([31]) O meglio, in generale, la classe delle loro infinite determinazioni.

Poi per le (80) si ha subito

$$C_{\alpha t,\,\lambda} = \frac{\partial a_{\alpha,\lambda}}{\partial u^t} - a_{\alpha,\,\lambda t} \qquad \rho_\alpha \leq m,\ \rho_\lambda \leq m-1. \tag{82}$$

Infine ci resta a considerare il caso dei simboli $C_{\alpha t,\,\beta}$ pei quali è proprio $\rho_\alpha = \rho_\beta = m$. Poniamo, indicando esplicitamente le cifre di α e di β,

$$\alpha = r_1 r_2 \dots r_m\,, \qquad \beta = s_1 s_2 \dots s_m\,. \tag{83}$$

Abbiamo successivamente, per le (80),

$$C_{r_1 r_2 \dots r_m t,\ s_1 s_2 \dots s_m} + C_{s_1 s_2 \dots s_m t,\ r_1 r_2 \dots r_m} =$$
$$= \frac{\partial a_{r_1 r_2 \dots r_m,\ s_1 s_2 \dots s_m}}{\partial u^t}$$

$$- C_{r_1 r_2 \dots r_m s_1,\ t s_2 \dots s_m} - C_{t s_2 \dots s_m s_1,\ r_1 r_2 \dots r_m} =$$
$$= - \frac{\partial a_{r_1 r_2 \dots r_m,\ t s_2 \dots s_m}}{\partial u^{s_1}}$$

$$C_{s_1 r_2 \dots r_m r_1,\ t s_2 \dots s_m} + C_{t s_2 \dots s_m r_1,\ s_1 r_2 \dots r_m} =$$
$$= \frac{\partial a_{s_1 r_2 \dots r_m,\ t s_2 \dots s_m}}{\partial u^{r_1}}$$

$$- C_{s_1 r_2 \dots r_m s_2,\ t r_1 s_3 \dots s_m} - C_{t r_1 s_3 \dots s_m s_2,\ s_1 r_2 \dots r_m} =$$
$$= - \frac{\partial a_{s_1 r_2 \dots r_m,\ t r_1 s_3 \dots s_m}}{\partial u^{s_2}}$$

$$C_{s_1 s_2 r_3 \dots r_m r_2,\ t r_1 s_3 \dots s_m} + C_{t r_1 s_3 \dots s_m r_2,\ s_1 s_2 r_3 \dots r_m} =$$
$$= \frac{\partial a_{s_1 s_2 r_3 \dots r_m,\ t r_1 s_3 \dots s_m}}{\partial u^{r_2}}$$

. . . .

$$-C_{s_1 \dots s_{m-2} r_{m-1} r_m s_{m-1}, t r_1 \dots r_{m-2} s_m} - C_{t r_1, \dots r_{m-2} s_m s_{m-1}, s_1 \dots s_{m-2} r_{m-1} r_m}$$

$$= -\frac{\partial a_{s_1 \dots s_{m-2} r_{m-1} r_m, \; t r_1 \dots r_{m-2} s_m}}{\partial u^{s_{m-1}}}$$

$$C_{s_1 \dots s_{m-1} r_m r_{m-1}, \; t r_1 \dots r_{m-2} s_m} + C_{t r_1 \dots r_{m-2} s_m r_{m-1}, \; s_1 \dots s_{m-1} r_m}$$

$$= \frac{\partial a_{s_1 \dots s_{m-1} r_m, \; t r_1 \dots r_{m-2} s_m}}{\partial u^{r_{m-1}}}$$

$$-C_{s_1 \dots s_{m-1} r_m s_m, \; t r_1 \dots r_{m-1}} - C_{t r_1 \dots r_{m-1} s_m, \; s_1 \dots s_{m-1} r_m}$$

$$= -\frac{\partial a_{s_1 \dots s_{m-1} r_m, \; t r_1 \dots r_{m-1}}}{\partial u^{s_m}}$$

$$C_{s_1 \dots s_m r_m, \; t r_1 \dots r_{m-1}} + C_{t r_1 \dots r_{m-1} r_m, \; s_1 s_2 \dots s_m}$$

$$= \frac{\partial a_{s_1 s_2 \dots s_m, \; t r_1 \dots r_{m-1}}}{\partial u^{r_m}}.$$

Sommando membro a membro, e tenendo presente che l'ordine delle *cifre* o indici semplici entro l'indice composto è arbitrario, onde in particolare i simboli $C_{\alpha t, \beta}$ (in cui αt può manifestamente riguardarsi, per le (42), come un indice composto di classe $m+1$) sono simmetrici rispetto alle cifre di αt e di β, otteniamo infine

$$\begin{aligned} C_{r_1 r_2 \dots r_m t, \; s_1 s_2 \dots s_m} = \frac{1}{2} \Bigg(& \frac{\partial a_{r_1 r_2 \dots r_m, \; s_1 s_2 \dots s_m}}{\partial u^t} + \\ (84) \qquad & + \sum_1^m {}_h \frac{\partial a_{s_1 \dots s_h r_{h+1} \dots r_m, \; t r_1 \dots r_{h-1} s_{h+1} \dots s_m}}{\partial u^{r_h}} - \\ & - \sum_1^m {}_h \frac{\partial a_{s_1 \dots s_{h-1} r_h r_{h+1} \dots r_m, \; t r_1 \dots r_{h-1} s_{h+1} \dots s_m}}{\partial u^{s_h}} \Bigg). \end{aligned}$$

Queste formule completano le cercate espressioni dei simboli $C_{\alpha t, \beta}$ per la $a_{\alpha, \beta}$; la proprietà poco sopra enunciata è dunque stabilita.

Le (84) comprendono, pel caso $m = 1$, le notissime espressioni di CHRISTOFFEL pei suoi indici $\begin{bmatrix} rs \\ t \end{bmatrix}$, e pel caso $m = 2$, un gruppo di formule stabilite dal VITALI (ved. **32**, Nota II, p. 282; **34**, pp. 414–415). Se $m < 1$, le espressioni (82), (84) pei simboli $C_{\alpha r, \beta}$ *non sono uniche,* variando per sostituzioni sulle $m+1$ cifre di αr, e sulle m cifre di β. Su questo avremo occasione di tornare (n. 11).

Notiamo ancora che in particolare dalle (84), o più semplicemente dalle (80), si ha

$$C_{ar, \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\alpha\alpha}}{\partial u^r}. \qquad (85) \qquad [\textit{non sommare}]$$

Le $\underset{m}{A}_{ijr}$, che nei riguardi dei vettori normali a σ_m hanno la stessa funzione dei simboli $\underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha r}$ pei vettori di σ_m, hanno però assai diverse proprietà; in sostanza, come mostrano le (60), le $\underset{m}{A}_{ijr}$ non sono che dei *coefficienti di rotazione;* esse sono dunque (come è ovvio) *emisimmetriche rispetto ad i, j:*

$$\underset{m}{A}_{ijr} + \underset{m}{A}_{jir} = 0\,; \qquad (86)$$

ma non è possibile esprimerle per gli elementi della metrica di specie m della V_n (cioè: per le $a_{\alpha, \beta}$), nè per quelli della metrica relativa all'R_p normale a σ_m, che, nel sistema $\overset{i}{X}$, ha come tensore fondamentale semplicemente δ_{ij}.

Torniamo ai simboli $C_{\alpha r, \beta}$ e $\underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha r}$; vediamo come ad essi si estendano le note *formule di* CHRISTOFFEL.

Il fatto che i differenziali assoluti $\bar{d}_{(m)}\xi_{\alpha}$, $\bar{d}_{(m)}\xi^{\alpha}$, $\bar{d}_{(m)}\xi_i$ dati dalle (51) *a*) e *b*), e (62), siano *sistemi assoluti*, cogredienti a ξ_{α}, ξ^{α}, ξ_i rispettivamente, è per noi ovvia conseguenza analitica del procedimento geometrico con cui quei differenziali sono stati ottenuti. Naturalmente la proprietà può pure dimostrarsi con considerazioni analitiche dirette, ad es. mediante le *formule di trasformazione* delle $C_{\alpha r, \beta}$, $\underset{m}{C}{}^{\beta}_{\alpha r}$ ed $\underset{m}{A}_{ijr}$ in un cambiamento delle coordinate curvilinee u^r e dei vettori di riferimento $\overset{i}{X}$ pei vettori normali a σ_m. È assai agevole il procurarsi tali formule: per le (4) si ha immediatamente

$$\overline{C}_{\beta r,\,\alpha} = \overline{P}_{\beta r} \times \overline{P}_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^s}\left(P_\gamma \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta}\right) \times P_\delta \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\alpha} \cdot \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^r} \tag{87}$$

ossia

$$\overline{C}_{\beta r,\,\alpha} = C_{\gamma s,\,\delta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\alpha} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^r} + \frac{\partial}{\partial \bar{u}^r}\left(\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta}\right) \cdot \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\alpha} a_{\gamma,\,\delta}\,. \tag{88}$$

Questa formula potrebbe anche ricavarsi direttamente dal fatto che $\overline{C}_{\beta r,\,\alpha}$ è un *sistema assoluto* a un indice di classe $m+1$ e un indice di classe m: il che porta

$$\overline{C}_{\beta r,\,\alpha} = C_{\tau,\,\delta} \frac{\partial u^\tau}{\partial \bar{u}^{\beta r}} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\alpha}\,, \qquad \rho_\tau \leq m+1\,. \tag{89}$$

Le (44), (88) dànno subito, se si tiene conto che

$$\bar{a}_{\alpha,\,\beta} = a_{\gamma,\,\delta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\alpha}\,, \quad \text{onde} \quad \bar{a}_{\alpha,\,\beta} \frac{\partial \bar{u}^\beta}{\partial u^\gamma} = a_{\gamma,\,\delta} \frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\alpha} \tag{90}$$

la legge di trasformazione delle $\underset{m}{C}{}^\alpha_{\beta r}$:

$$\left(\underset{m}{\overline{C}}{}^\alpha_{\beta r} - \underset{m}{C}{}^\delta_{\gamma s} \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\delta} \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^r} - \frac{\partial}{\partial \bar{u}^r}\left(\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta}\right) \frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\gamma}\right) \bar{a}_{\alpha,\,\varepsilon} = 0\,, \quad \rho_\varepsilon \leq m \tag{91}$$

la quale può interpretarsi in questo senso: ad ogni sistema di valori delle $\underset{m}{C}{}^\delta_{\gamma s}\,[u]$ è coordinato un sistema di valori delle $\underset{m}{\overline{C}}{}^\alpha_{\beta r}\,[\bar{u}]$ pel quale si annullano, oltrechè i primi membri delle (91), anche le espressioni entro parentesi.

Infine si trova

$$\underset{m}{\overline{A}}_{hkr} = \underset{m}{A}_{ijs}\, c_{ih}\, c_{jk} \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^r} + \frac{\partial c_{ik}}{\partial \bar{u}^r} c_{ih} \qquad \left(\text{se } \overset{j}{\overline{X}} = c_{ji} \overset{i}{X}\right). \tag{92}$$

Mediante le (88), (91), (92) la verifica analitica del carattere di *cogredienza* pei differenziali assoluti di specie m è agevole, e non occorre insistervi.

Abbiamo accennato poco sopra alla possibilità di dedurre le (88) dalle (89); ciò naturalmente utilizzando le proprietà delle $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}$. Ma qui, essendosi direttamente ricavate sia le (88) che le (89), si può seguire il cammino inverso: cioè, si può dedurre dal confronto delle (88), (89) un interessante procedimento ricorrente pel calcolo delle $\frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\beta}$.

Precisamente: il confronto detto sopra dà senz'altro

$$(93)\quad \left(C_{\sigma,\delta}\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^{\beta r}} - C_{\varepsilon s,\delta}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{u}^\beta}\frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^r} - \frac{\partial}{\partial \bar{u}^r}\left(\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta}\right)a_{\gamma,\delta}\right)\frac{\partial u^\delta}{\partial \bar{u}^\alpha} = 0,$$

$$(\rho_\sigma \leq m+1\,,\ \rho_\alpha\,,\ \rho_\beta\,,\ \rho_\gamma\,,\ \rho_\delta\,,\ \rho_\varepsilon \leq m)$$

onde per le (5), (44),

$$(94)\qquad \left(\underset{m}{C}{}^\gamma_\sigma\frac{\partial u^\sigma}{\partial \bar{u}^{\beta r}} - \underset{m}{C}{}^\gamma_{\varepsilon s}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \bar{u}^\beta}\frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^r} - \frac{\partial}{\partial \bar{u}^r}\left(\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\beta}\right)\right)a_{\gamma,\delta} = 0\,.$$

In particolare se $\beta = \varkappa$, con $\rho_\varkappa < m$, per le (6), (79) le precedenti equazioni si scrivono semplicemente

$$(95)\qquad \left(\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^{\varkappa r}} - S_{\gamma/\lambda s}\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\varkappa}\frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^r} - \frac{\partial}{\partial \bar{u}^r}\left(\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar{u}^\varkappa}\right)\right)a_{\gamma,\delta} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \rho_\gamma\,,\ \rho_\delta \leq m \\ \rho_\lambda\,,\ \rho_\varkappa \leq m-1 \end{pmatrix}$$

ove $S_{\gamma/\lambda s}$ indica la somma dei termini *effettivamente distinti* pei quali si ha $\gamma = \lambda s$ (cioè: l'aggiunta dell'indice r alle cifre della combinazione λ dà luogo alla combinazione γ). Ma osservando che le espressioni entro parentesi *non dipendono affatto* *dalle* $a_{\alpha,\beta}$ (e neppure dalla V_n) possiamo concludere che *esse non possono essere che nulle:*

$$(96) \qquad \frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar u^{\varkappa r}} = \frac{\partial}{\partial \bar u^r}\left(\frac{\partial u^\gamma}{\partial \bar u^\varkappa}\right) + S_{\gamma/\lambda s}\,\frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar u^\varkappa}\,\frac{\partial u^s}{\partial \bar u^r}\,;$$

$$(\rho_\gamma \leq m\,;\ \rho_\lambda,\ \rho_\varkappa \leq m-1)\,.$$

Queste sono le formule cercate, esprimenti le $\dfrac{\partial u^\gamma}{\partial \bar u^{\varkappa r}}$ per le $\dfrac{\partial u^\gamma}{\partial u^\varkappa}$ e le loro derivate prime. Tenendo ancora presenti le (6), mediante le (96) possiamo successivamente calcolare tutte le $\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}$ (ρ_α, $\rho_\beta = m$ qualunque): supposte note, naturalmente, le $\dfrac{\partial u^s}{\partial \bar u^r}$, che sono vere *derivate parziali.* Ad es. le (6) dànno $\dfrac{\partial u^{rs}}{\partial \bar u^t} = 0$; poi le (96) dànno $\dfrac{\partial u^r}{\partial \bar u^{tv}} = \dfrac{\partial^2 u^r}{\partial \bar u^t\, \partial \bar u^v}$, $\dfrac{\partial u^{rr}}{\partial \bar u^{tv}} = \dfrac{\partial u^r}{\partial \bar u^t}\,\dfrac{\partial u^r}{\partial \bar u^v}$ (*non sommare* rispetto ad r) e, per $r \neq s$, $\dfrac{\partial u^{rs}}{\partial \bar u^{tv}} = \dfrac{\partial u^r}{\partial \bar u^t}\,\dfrac{\partial u^s}{\partial \bar u^v} + \dfrac{\partial u^r}{\partial \bar u^v}\,\dfrac{\partial u^s}{\partial \bar u^t}$; così tutte le $\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}$, per ρ_α, $\rho_\beta = 1, 2$ sono determinate. Le (6) dànno poi $\dfrac{\partial u^{rst}}{\partial \bar u^\beta} = 0$ per $\rho_\beta < 3$, e le (96) dànno tutte le rimanenti $\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}$ per ρ_α, $\rho_\beta = 1, 2, 3$; e così via [32].

[32] Mediante le formule ricorrenti (96) si possono anche ricavare per le $\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}$ le espressioni generali date (non proprio per le $\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial \bar u^\beta}$, ma pei suoi simboli $\begin{pmatrix} j_1 \dots j_r \\ h_1 \dots h_s \end{pmatrix}_{u\bar u}$, che ne differiscono soltanto per fattori numerici) dal Pascal (**3**, p. 19, form. (27)). Nelle nostre notazioni si ha

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{\partial u^{r_1 r_2 \dots r_h}}{\partial \bar u^{i_1 i_2 \dots i_k}} = S_r S_i' \sum_{(\rho_1 \rho_2 \dots \rho_h)} \frac{\partial^{\rho_1} u^{r_1}}{\partial(\bar u^i)^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial^{\rho_h} u^{r_h}}{\partial(\bar u^i)^{\rho_h}}\,,$$

7. - *Estensione a tensori qualunque del differenziale assoluto e della derivata covariante generalizzati.* - Non presenta difficoltà l'estendere a tensori d'ordine qualunque, ad una o più serie d'indici, anche di differenti classi, le operazioni della *differenziazione assoluta* e della *derivazione covariante*, introdotte al n. 5 pei vettori di σ_m (o normali a σ_m). In sostanza potremmo limitarci a rimandare al libro del VITALI (**65**, p. 184 e seg.); giacchè la trattazione ivi seguita, sebbene relativa al solo caso normale, può agevolmente adattarsi anche al caso generale, e in particolare la form. (2'), che definisce la derivata covariante di un qualunque tensore, resta valida. Ma diamo le linee più essenziali di una trattazione meglio confacente al punto di vista qui adottato nei riguardi dei vettori.

Sia $H^{\cdots\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ un tensore a $t+s$ indici (che per semplicità supporremo di una stessa serie); supponiamo che l'indice $\alpha_h (h=1, 2,\ldots, s)$ sia di classe m_h, e l'indice $\beta_k (k=1,2,\ldots,t)$ di classe m'_k. Supponiamo naturalmente che il tensore $H^{\cdots\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ sia *specializzato come* V_n (n. 3). Che cosa dovremo intendere dicendo che il tensore $H^{\cdots\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ si mantiene *costante*, o *equipollente a sè stesso*, lungo una linea γ, $P=P(t)$, di V_n? Il modo più naturale di introdurre tale nozione appare questo: essendo $\xi_{(1)}, \xi_{(2)},\ldots,\xi_{(s)}$; $\eta^{(1)}, \eta^{(2)},\ldots, \eta^{(t)}$, $s+t$ vettori qualunque di $\sigma_{m_1}, \sigma_{m_2},\ldots,\sigma_{m_s}$; di $\sigma_{m'_1}, \sigma_{m'_2},\ldots,\sigma_{m'_t}$ rispettivamente, che varino lungo γ secondo le rispettive leggi d'equipollenza, diremo

ove S_r indica la somma dei termini *effettivamente distinti* che si ottengono permutando le $r_1 r_2 \ldots r_h$ in tutti i modi possibili; S'_i indica la somma dei termini che si hanno permutando le $i_1 i_2 \ldots i_k$ in modo che si distribuiscano in gruppi di $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h$ ($\rho_\varkappa \geq 1$, $\varkappa=1, 2, \ldots h$) termini rispettivamente, essendo $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_h=k$. Infine, con $\sum\limits_{(\rho_1\rho_2\ldots\rho_h)}$ si indica la somma estesa a tutte le diverse partizioni di k negli h addendi $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h$, e $\dfrac{\partial^{\rho_\varkappa} u^{r_h}}{\partial(\bar u^i)^{\rho_\varkappa}}$ è la derivata $(\rho_\varkappa)$-esima di u^{r_h} rispetto a tutte le $\bar u^i$ del gruppo $\varkappa$-esimo.

che lungo γ $H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ si mantiene costante se è costante lungo γ lo scalare

$$(97)\qquad H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}\,\xi^{\alpha_1}_{(1)}\ldots\xi^{\alpha_s}_{(s)}\,\eta^{(1)}_{\beta_1}\ldots\eta^{(t)}_{\beta_t}\,,$$

le contrazioni essendo fatte, naturalmente (ved. ([10])) tenendo conto delle classi (sopra precisate) dei vari indici. Ora troviamo agevolmente, tenendo presenti le (51), (52), che la condizione detta sopra equivale all'annullarsi, in ogni punto di γ, del sistema

$$(98)\qquad \bar{d}\,H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$$

ove abbiamo posto

$$(99)\qquad \begin{aligned}\bar{d}H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} &= dH^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} - \\ &- \sum_{1}^{s}{}_h\, \underset{m_h}{C}{}^{\gamma_h}_{\alpha_h r}\, H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{h-1},\gamma_h,\alpha_{h+1},\ldots,\alpha_s}\, du^r + \\ &+ \sum_{1}^{t}{}_k\, \underset{m'_k}{C}{}^{\beta_k}_{\gamma_k r}\, H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_{k-1},\gamma_k,\beta_{k+1},\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}\, du^r .\end{aligned}$$

Ma di più: lo stesso procedimento seguito dà anche senz'altro che il sistema $\bar{d}H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$, il quale contratto coi vettori $\xi_{(1)}, \xi_{(2)},\ldots,\xi_{(s)}$; $\eta^{(1)},\eta^{(2)},\ldots,\eta^{(t)}$ dà un invariante: il differenziale ordinario dello scalare (97), *è un sistema assoluto*, anzi, un tensore, esso stesso *specializzato come* V_n; cogrediente al tensore $H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\beta_s}$ assegnato. Diremo $\bar{d}H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$ *differenziale assoluto* del tensore $H^{\cdot\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}$. Il simbolo $\bar{d}$ adottato è, inevitabilmente, meno completo di quello adottato pei vettori (n. 5); che potrà però sostituirsi a $\bar{d}$ quando gli indici del tensore in considerazione siano tutti di eguale classe m $(m = 1, 2,\ldots)$.

Alla differenziazione assoluta $\bar{d}$ corrisponde una derivazione covariante, il cui simbolo indicheremo semplicemente con D_r;

la notazione è appunto quella usata dal VITALI nel caso normale (**65**, p. 185). Abbiamo dunque

$$
\begin{aligned}
D_r H^{\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} &= \frac{\partial}{\partial u^r} H^{\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} - \\
(100) \qquad & - \sum_1^s{}_k \underset{m_k}{C^{\gamma_k}_{\alpha_k r}} H^{\cdot\cdot\beta_1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\gamma_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_s} + \\
& + \sum_1^t{}_k \underset{m'_k}{C^{\beta_k}_{\gamma_k r}} H^{\cdot\cdot\beta_1,\ldots,\beta_{k-1},\gamma_k,\beta_{k+1},\ldots,\beta_t}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s} .
\end{aligned}
$$

Per gli operatori $\bar{d}$ e D_r valgono inalterate, anche nel caso generale, tutte le proprietà formali degli operatori corrispondenti dell'Analisi tensoriale di RICCI, che sono poi quelle stesse degli operatori d e $\dfrac{\partial}{\partial u^r}$ dell'analisi differenziale ordinaria. Non ci fermeremo su queste verifiche, che del resto, nei riguardi della derivazione (il che è sufficiente) si trovano già sviluppate, nel libro del VITALI, relativamente al caso normale; e allo stesso modo, con ovvie avvertenze, possono farsi pel caso generale.

Notiamo ancora che non presenta alcuna difficoltà l'estendere le operazioni $\bar{d}$ e D_r a tensori che presentino indici di due o più serie $\alpha\beta\gamma\delta\ldots$, $\lambda\mu\nu\tau\ldots$ (cfr. n. 1); e a tensori che abbiano uno o più indici σ_m- ortogonali $i\,j,\ldots$, con valori anche diversi di m (n. 3).

Accenniamo ad alcuni risultati particolari:

1) Si ha (cfr. VITALI, **65**, pp. 193–194):

$$
(101) \quad \bar{d}_{(m)} a_{\alpha,\beta} = 0, \quad \bar{d}_{(m)} \underset{m}{a^{\alpha}_{\beta}} \cdot a_{\alpha,\gamma} = 0, \quad \bar{d}_{(m)} \underset{m}{a^{\alpha,\beta}} \cdot a_{\alpha,\gamma} a_{\beta,\delta} = 0 ;
$$

$$
(102) \qquad \bar{d}_{(m)} \delta^{\alpha}_{\beta} \cdot a_{\alpha,\beta} = 0 ,
$$

intendendo sempre che gli indici α, β, γ, δ siano tutti di classe m.

2) Se gli indici composti, tutti di classe m, $\alpha\beta\gamma\ldots$; $\lambda\mu\nu\ldots$ corrispondono alle due serie di variabili u^r ed $\bar{u}^i$, si ha

$$\bar{d}_{(m)} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \bar{u}^\lambda} \cdot a_{\alpha,\beta} = 0 . \tag{103}$$

Queste non sono che le formule di Christoffel generalizzate ((91) del n. prec.), sotto la forma data, pel caso $m = 1$, da R. Lagrange (**26**, p. 10).

Cap. 3° – Applicazioni: differenziali successivi. Differenziali m-esimi del Pascal.

8 – *Differenziale* $\bar{d}^*_{m+1}$ *per un vettore di* σ_m. *Differenziali successivi.* – Veniamo ad alcune applicazioni della differenziazione assoluta che hanno notevole interesse per gli sviluppi geometrici che seguiranno (Parte II).

Premettiamo che un vettore ξ di σ_m può, ovviamente, riguardarsi anche come un vettore di σ_{m+h}, con $h \geq 1$ intero arbitrario: ciò corrisponde al fatto analitico che se le ξ^α sono componenti di un sistema assoluto del 1° ordine, controvariante a un indice di classe m, posto $\xi^\tau = 0$ per $m + 1 \leq \rho_\tau \leq m + h$ si completa un sistema ξ^τ controvariante a un indice di classe $m + h$. Ciò posto: sia ξ un vettore di σ_m, e quindi anche di σ_{m+1}: siano le ξ^α sue σ_m-componenti controvarianti. Calcoliamo il differenziale $\bar{d}_{(m+1)}$ del vettore ξ ora detto. Per questo basterà valerci della formula generale (51) b), che nelle attuali ipotesi dà

$$\bar{d}_{(m+1)} \xi^\tau = d\xi^\tau + \underset{m+1}{C}{}^{\tau}_{\alpha r}\, \xi^\alpha \, du^r \quad (\rho_\alpha \leq m, \; \rho_\tau \leq m + 1) . \tag{104}$$

Vediamo che fra tutti i possibili sistemi di valori delle

$\overline{d}_{(m+1)}\,\xi^{\tau}$ uno viene a distinguersi, del tutto determinato, quando siano date le ξ^{τ}, in modo indipendente anche dalla V_n:

$$\overline{d}^{*}_{(m+1)}\,\xi^{\tau} = d\xi^{\tau} + S_{\tau/\alpha r}\,\xi^{\alpha}\,du^{r}\,, \tag{105}$$

ove $S_{\tau/\alpha r}$ (cfr. n. 6, form. (95)) è estesa a tutti i termini $\xi^{\alpha}\,du^{r}$ *effettivamente distinti* pei quali $\alpha r = \tau$.

Le (105) dànno in particolare

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{d}^{*}_{(m+1)}\,\xi^{r} = d\,\xi^{r} \\ &\overline{d}^{*}_{(m+1)}\,\xi^{\tau} = S_{\tau/\alpha r}\,\xi^{\alpha}\,du^{r}. \qquad \rho_{\tau} = m+1 \end{aligned}\right. \tag{106}$$

Al precedente risultato si può anche giungere per altra via: basta osservare che nelle attuali ipotesi il vettore $d\xi$ giace in σ_{m+1}, e d'altra parte essendo $\xi = \xi^{\alpha}\,P_{\alpha} = \xi^{\tau}\,P_{\tau}$, si ha

$$d\xi = d\xi^{\tau}\,P_{\tau} + \xi^{\alpha}\,du^{r}\,P_{\alpha r}\,. \tag{107}$$

In particolare per un vettore ξ di σ_1 si avrà

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{d}^{*}_{(2)}\,\xi^{r} = d\xi^{r},\ \overline{d}^{*}_{(2)}\,\xi^{rr} = \xi^{r}\,du^{r} \quad \text{[non somm. risp. ad } r] \\ &\overline{d}^{*}_{(2)}\,\xi^{rs} = \xi^{r}\,du^{s} + \xi^{s}\,du^{r} \qquad \text{per } r \neq s\,; \end{aligned}\right. \tag{108}$$

per un vettore η di σ_2,

$$\left\{\begin{aligned} &\overline{d}^{*}_{(3)}\,\eta^{r} = d\eta^{r},\ \overline{d}^{*}_{(3)}\,\eta^{rr} = d\eta^{rr} + \eta^{r}\,du^{r} \\ &\qquad\qquad \text{[non somm. risp. ad } r] \\ &\overline{d}^{*}_{(3)}\,\eta^{rs} = d\eta^{rs} + \eta^{r}\,du^{s} + \eta^{s}\,du^{r} \qquad \text{per } r \neq s \\ &\overline{d}^{*}_{(3)}\,\eta^{rrr} = \eta^{rr}\,du^{r},\ \overline{d}^{*}_{(3)}\,\eta^{rrs} = \eta^{rr}\,du^{s} + \eta^{rs}\,du^{r} \\ &\qquad\qquad \text{[non somm. risp. ad } r] \\ &\overline{d}^{*}_{(3)}\,\eta^{rst} = \eta^{rs}\,du^{t} + \eta^{st}\,du^{r} + \eta^{rt}\,du^{s} \qquad \text{per } r \neq s \neq t\,, \end{aligned}\right. \tag{109}$$

ecc.

Sia ora ξ un vettore di σ_1. La form. (68) stabilita al n. 5, che in questo caso particolare dà (per le (69), (77)):

(110) $$d\xi = \overline{d}_{(1)}\, \xi^{\alpha_1} \cdot P_{\alpha_1} + \xi^{\alpha_1} \underset{1}{\Omega}_{\alpha_1 r}\, du^r,$$

(ove con α_1 abbiamo indicato un indice variabile della classe 1; mentre α_r designerà un indice variabile della classe r) dà la decomposizione di $d\xi$ nei suoi componenti secondo σ_1 e normale a σ_1, rispettivamente; è agevole ricavare analoghe decomposizioni pei vettori $d^2\xi$, $d^3\xi, \ldots$ Anzitutto (posto $\xi^{\alpha_r} = 0$ per $r > 1$) si ha

(111) $$\xi = \xi^{\alpha_2} P_{\alpha_2}$$

onde, differenziando col simbolo $\overline{d}_{(2)}$ (ved. ([26])):

(112) $$d\xi = \overline{d}_{(2)}\, \xi^{\alpha_2} \cdot P_{\alpha_2};$$

(perchè $\xi^{\alpha_2} = 0$ per $\rho_{\alpha_2} = 2$, mentre $\overline{d}_{(2)} P_{\alpha_2} = 0$ per $\rho_{\alpha_2} = 1$; del resto la (112) esprime una proprietà geometricamente ovvia, che $d'_{(2)}\xi$ coincide con $d\xi$). Differenziando nuovamente, e scrivendo $\overline{d}^{\,2}_{(2)}$ per $\overline{d}_{(2)}\overline{d}_{(2)}$,

(113) $$d^2\xi = \overline{d}^{\,2}_{(2)}\, \xi^{\alpha_2} P_{\alpha_2} + \overline{d}_{(2)}\, \xi^{\alpha_2} \underset{2}{\Omega}_{\alpha_2 r}\, du^r$$

Questa formula dà la decomposizione di $d^2\xi$ nei suoi componenti secondo σ_2, e normale a σ_2, rispettivamente. In particolare, si ha anche il componente di $d^2\xi$ secondo σ_1; è ovvio che questo vettore avrà per σ_1–componenti covarianti le

(114) $$\overline{d}^{\,2}_{(2)}\, \xi_{\alpha_2}$$

per le quali $\rho_{\alpha_2} = 1$. ([33])

([33]) Le ξ_{α_2} sono le σ_2–componenti covarianti di ξ, che si ricaveranno nel modo noto da quelle controvarianti ξ^{α_2} ($= \xi^r$ se $\alpha_2 = r$; $= 0$ se $\rho_{\alpha_2} > 1$). Si noti che per $\alpha_2 = r$ le ξ_{α_2} sono le σ_1–componenti covarianti ξ_r, ma per $\alpha_2 = ts$ le ξ_{α_2} non sono eguali a 0 in generale, bensì a $\xi^r C_{\alpha_2, r} = \xi^r C_{ts, r}$.

Così possiamo proseguire; troviamo in generale che la formula

$$d^m \xi = \overline{d}^{\,m}_{(m)} \xi^{\alpha_m} P_{\alpha_m} + \overline{d}^{\,m-1}_{(m)} \xi^{\alpha_m} \Omega_{\underset{m}{\alpha_m}\, r}\, du^r \tag{115}$$

dà la decomposizione di $d^m \xi$ nei suoi componenti secondo σ_m e normale a σ_m; e che sono le

$$\overline{d}^{\,m}_{(m)} \xi_{\alpha_m} \tag{116}$$

per le quali $\rho_{\alpha_m} = 1$ le σ_l-componenti covarianti del vettore, componente di $d^m \xi$ secondo σ_1.

Il vettore $d^m \xi$ è, naturalmente, un vettore di σ_{m+1}: può dunque riuscire utile conoscere anche le sue σ_{m+1}-componenti. Inteso senz'altro che, qui e nel seguito, $\overline{d}_{(s)} \eta^{\omega}$, se η è un vettore di classe $r < s$, venga costruito ponendo $\eta^{\lambda} = 0$ per $s \geq \rho_{\lambda} > r$, abbiamo subito, analogamente alla espressione

$$\xi = \xi^{\alpha_1} P_{\alpha_1} \tag{117}$$

di ξ quale vettore di σ_1, le seguenti espressioni di $d\xi$, $d^2\xi, \ldots$, $d^m \xi$ quali vettori di $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_{m+1}$ rispettivamente:

$$d\xi = \overline{d}_{(2)} \xi^{\alpha_2} P_{\alpha_2}$$

$$d^2 \xi = \overline{d}_{(3)} \overline{d}_{(2)} \xi^{\alpha_3} \cdot P_{\alpha_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e infine

$$d^m \xi = \overline{d}_{(m+1)} \overline{d}_{(m)} \ldots \overline{d}_{(2)} \xi^{\alpha_{m+1}} \cdot P_{\alpha_{m+1}} \,. \tag{118}$$

In particolare, se al posto di ξ mettiamo il vettore (di σ_1) dP, abbiamo

$$d^{m+1} P = \overline{d}_{(m+1)} \overline{d}_{(m)} \ldots \overline{d}_{(2)} du^{\alpha_{m+1}} . P_{\alpha_{m+1}} \,. \tag{119}$$

Ad ogni successiva differenziazione, di specie r, nelle (118) e

(119), sono nulle tutte le componenti ad indici di rango r (cioè: ad r cifre) del vettore da differenziare ($r = 2, \ldots, m+1$); dunque possiamo intendere che venga sempre usata la particolare differenziazione $\overline{d}^*_{(r)}$ introdotta poco sopra. Presi allora come σ_{m+1}-componenti controvarianti di $d^m \xi$, o in particolare, di $d^{m+1} P$, i corrispondenti coefficienti di $P_{\alpha_{m+1}}$, tali componenti risultano perfettamente determinate, come naturalmente (la metrica essendo *non specializzata* sul σ_1 tangente) lo sono le ξ^r e du^r.

9. – *Differenziali m-esimi del* PASCAL. *Forme fondamentali complete.* Abbiamo dunque (per quanto precede)

$$d^m P = \delta^m u^\alpha \cdot P_\alpha \qquad (\rho_\alpha \leq m) \tag{120}$$

ove s'è posto per brevità

$$\delta^m u^\alpha = \overline{d}^*_{(m)} \overline{d}^*_{(m-1)} \ldots \overline{d}^*_{(2)} du^\alpha . \tag{121}$$

Tali espressioni differenziali $\delta^m u^\alpha$, che diremo (e la ragione apparirà fra breve) *differenziali m-esimi del* PASCAL, si potranno dunque costruire con le formule ricorrenti

$$\delta^{m+1} u^\tau = d(\delta^m u^\tau) + S_{\tau/\alpha r}\, \delta^m u^\alpha \cdot du^r \qquad \begin{matrix} \rho_\alpha \leq m \\ \rho_\tau \leq m+1 \end{matrix} \tag{122}$$

col significato già sopra precisato (n. 6, 8) pel simbolo $S_{\tau/\alpha r}$. Ossia, esprimendo gli indici composti per le loro cifre,

$$\delta^{m+1} u^{r_1 r_2 \ldots r_h} = d(\delta^m u^{r_1 r_2 \ldots r_h}) + \tag{123}$$

$$+ S^* \delta^m u^{r_1 r_2 \ldots r_{h-1}} du^{r_h} ,$$

ove S^* indica la somma dei termini che corrispondono a tutte le possibili distribuzioni di $r_1, r_2, \ldots, r_{h-1}, r_h$ in due gruppi di $h-1$, 1 indici rispettivamente. Nel secondo membro della (123) generica mancherà il primo termine se $h = m + 1$, mancherà l'ultimo termine se $h = 1$. E si ricava anche la formula generale

$$(124) \qquad \delta^m u^{r_1 r_2 \dots r_h} = S \sum_{i_1 \dots i_m} \frac{m!}{i_1! \dots i_h!\, \sigma_1! \dots \sigma_s!} d^{i_1} u^{r_1} \dots d^{i_h} u^{r_h},$$

ove S è estesa a tutte le $\dfrac{h!}{\tau_1! \dots \tau_t!}$ permutazioni *effettivamente distinte* degli indici $r_1, r_2, \dots, r_h$, i quali alla loro volta formano una qualunque combinazione con ripetizione della classe h di $1, 2, \dots, n$, essendo $1 \leq h \leq m$. In generale potremo supporre che degli indici $r_1, r_2, \dots r_h$ soltanto t, $1 \leq t \leq h$, siano fra loro distinti, ed uguali ad $s_1, s_2, \dots, s_t$; con $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t$ indichiamo quanti degli indici $r_1, r_2, \dots, r_h$ sono eguali ad $s_1, s_2, \dots, s_t$ rispettivamente. La somma Σ invece è estesa a tutte le partizioni di m in h addendi interi (≥ 1), $i_1, i_2, \dots, i_h$: dei quali in generale s saranno fra loro distinti ed eguali ad $j_1, j_2, \dots, j_s$; $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$ rappresentano infine, ordinatamente, quanti dei numeri $i_1, i_2, \dots, i_h$ sono eguali ad $j_1, j_2, \dots, j_s$, rispettivamente.

Il nostro simbolo $\delta^m u^{r_1 r_2 \dots r_h}$ è legato da una relazione molto semplice al simbolo $\delta^{(m)}_{r_1 r_2 \dots r_h}$ introdotto dal PASCAL e sistematicamente applicato nella sua teoria delle forme differenziali d'ordine e di grado qualunque (**3**, p. 6 e seg.):

$$(125) \qquad \delta^m u^{r_1 r_2 \dots r_h} = \frac{h!}{\tau_1!\, \tau_2! \dots \tau_t!} \delta^{(m)}_{r_1 r_2 \dots r_h};$$

(e le (124) corrispondono alle form. (4) p. 6 del PASCAL, loc. cit. ([34])). Mi sembra dunque opportuna, trattandosi di espressioni di notevole interesse sia analitico che geometrico, la denominazione poco sopra introdotta ("differenziali m-esimi del PASCAL") per le $\delta^m u^\alpha$.

([34]) ove alle $[i_1 i_2 \dots i_m]^{(r)}$ s' intendano sostituite le loro espressioni date dalle form. (13), p. 11.

Se si osserva che, I essendo uno scalare qualunque, si ha, analogamente alle (120),

$$(126) \qquad d^m I = \delta^m u^\alpha \cdot I_\alpha ,$$

ove, supposto $\alpha = r_1 r_2 \dots r_h$ $(1 \leq h \leq m)$, intendiamo che sia $I_\alpha = \dfrac{\partial^h I}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_h}}$, mentre secondo il Pascal (loc. cit., p. 6, form. (3)) si ha

$$(127) \qquad d^m I = \sum_{h=1}^{m} \sum_{r_1 r_2 \dots r_h} \frac{\partial^h I}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_h}} \delta^{(m)}_{r_1 r_2 \dots r_h} ,$$

ci rendiamo bene conto della presenza dei fattori numerici $\dfrac{m!}{\tau_1! \dots \tau_t!}$ nelle (125): essa è dovuta al fatto che noi estendiamo la somme (secondo il Vitali) alle *combinazioni*, e invece il Pascal alle *disposizioni* con ripetizione delle cifre di $r_1 r_2 \dots r_h$.

I differenziali $\delta^m u^\alpha$ sono manifestamente *indipendenti dalla V_n e dai suoi spazi osculatori;* ma riescono assai utili nello studio delle proprietà d' ordine m qualunque della V_n medesima. In effetto è mediante tali espressioni differenziali che, partendo dal tensore fondamentale di specie m, si può formare una *forma differenziale* invariante, *la forma fondamentale completa di specie m*, che tiene nei riguardi delle proprietà differenziali d' ordine m della varietà proprio il ruolo che ha il ds^2 relativamente alle proprietà del primo ordine. Tale forma ha questa definizione geometrica molto semplice: *è il quadrato scalare del differenziale m-esimo del punto P variabile sulla varietà.* Ne segue subito l' accennata espressione analitica:

$$(128) \qquad \Phi_m = (d^m P)^2 = d^m P \times d^m P = \delta^m u^\alpha \, \delta^m u^\beta \, P_\alpha \times P_\beta$$

onde, per le (8),

$$(129) \qquad \Phi_m = a_{\alpha,\beta} \, \delta^m u^\alpha \, \delta^m u^\beta .$$

Per $m = 1$, si ritrova proprio il ds^2. Per m qualunque, si ha, secondo la terminologia del Pascal, *una forma differenziale quadratica d'ordine m.*

Abbiamo visto al n. 6 come tutti i simboli di Christoffel di classe m, che occorrono per la costruzione dei differenziali assoluti (e derivate covarianti) dei tensori a indici di classi $\leq m$, si possano esprimere per le $a_{\alpha, \beta}$ (ove s' intende, al solito, ρ_α, $\rho_\beta \leq m$); dunque *la forma fondamentale completa di specie m* (che diremo anche: *m–esima forma fondamentale completa*) *è sufficiente alla costruzione del calcolo assoluto pei tensori ad indici di classi $\leq m$.* Che questa proprietà abbia notevoli conseguenze geometriche, è a priori prevedibile; nella Parte II[a] del presente lavoro avremo occasione di precisarle.

(continua)