

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI SANTE DA RIOS

Anelli vorticosi ruotanti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 2 (1931), p. 142-151

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1931__2__142_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1931, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ANELLI VORTICOSI RUOTANTI

di LUIGI SANTE DA RIOS a *Palora*

1. - Vortici piani a movimento rigido rotatorio.

Una linea vorticososa L di forma qualunque esista in un fluido omogeneo e indefinito. Siano: ω la rotazione media o vortice propriamente detto in un punto O di L ; P un punto del fluido; ε la misura del raggio vettore OP ; α, β, γ i coseni direttori di OP col triedro sinistro di riferimento $O(x y z)$ costituito dalla tangente, normale principale e binormale in O ad L , la tangente essendo diretta secondo il vortice ω . Le componenti secondo quel sistema della velocità indotta in P dalla linea vorticososa L a meno di termini che restano finiti rispetto ad $\frac{1}{\varepsilon}$ all'avvicinarsi di P ad O , assumono le espressioni ⁽¹⁾

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \\ v = - \frac{\omega \gamma}{2\pi(1 - \alpha^2)} \\ w = \frac{\omega \beta}{2\pi(1 - \alpha^2)} - \frac{\omega c}{2\pi} \log \varepsilon ; \end{array} \right.$$

designando c la curvatura di L in O .

Un filetto vorticoso abbastanza sottile può considerarsi come un complesso di linee vorticosose sensibilmente fra loro parallele:

⁽¹⁾ Cfr. L. S. DA RIOS *Sul moto d'un liquido indefinito ecc.*; Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo; 1906.

le sezioni τ normali ad una qualunque di quelle linee possono ritenersi normali al filetto stesso e normali ancora alla linea L_0 , luogo dei baricentri delle sezioni suddette. In base alle (1), si è dimostrato (*) che la velocità V indotta in un punto O di L_0 è data dall'espressione

$$(2) \quad V = -\frac{Ic}{2\pi} \log \rho ;$$

essendo I la semiintensità $\omega\tau$ del filetto, c la curvatura di L_0 in O , ρ il raggio di τ supposta di forma circolare, e risultando V diretta seconda la binormale in O ad L_0 .

A prescindere dal notissimo anello circolare a movimento traslatorio, si deduce dalla (2) che un filetto vorticoso piano può muoversi rigidamente solo se ruoti intorno ad una retta complanare. Assumendo questa come asse delle x d'un sistema $P(xy)$ di riferimento, affinché il movimento del vortice sia rigido è necessario inoltre che sia

$$(3) \quad c = k|y| ,$$

denotando k una costante positiva, ed essendo y l'ordinata d'un punto generico di L_0 o L , dove la curvatura è c .

Se s è l'arco della curva contato a partire da un suo punto qualunque e in un verso assegnato, si ha in ogni caso (come è ben noto)

$$(4) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi : \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi ,$$

essendo φ l'angolo che la tangente in un punto Q di L forma con l'asse delle ascisse. In luogo della (3) potendosi scrivere

$$(3') \quad \frac{d\varphi}{ds} = k|y| ,$$

(*) Cfr. *Sul moto dei filetti vorticosi di forma qualunque*; ibidem; 1910.

eliminando ds tra la (3') e la seconda delle (4), e quindi integrando si ottiene

$$(5) \quad y = \frac{2}{\sqrt{k}} \sqrt{\text{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + h},$$

con h costante di integrazione.

Eliminando invece ds fra la (3') e la prima delle (4) si deduce subito

$$(6) \quad x = \frac{1}{2\sqrt{k}} \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\text{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + h}}.$$

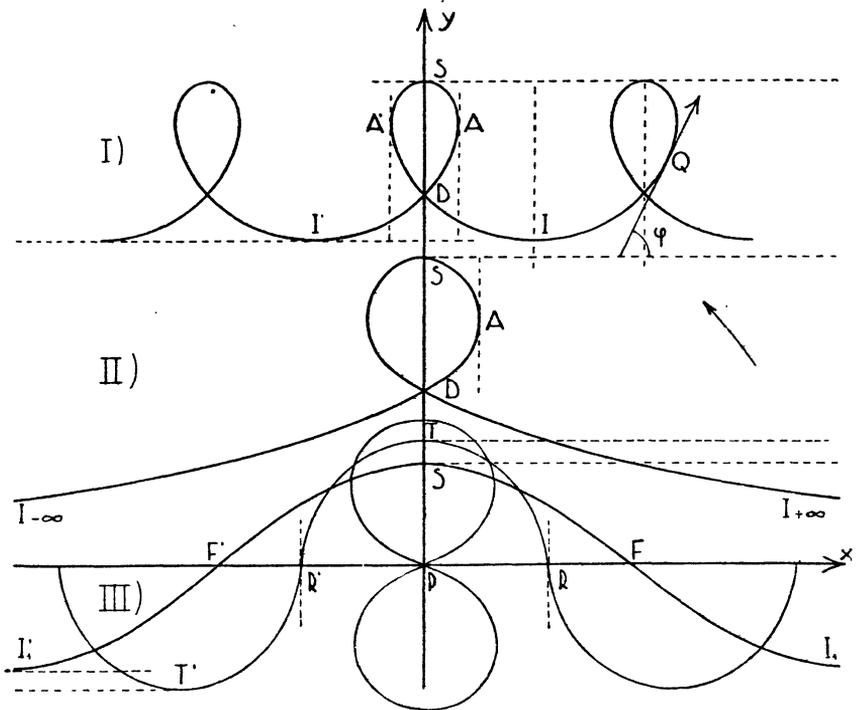


FIG. 1

Le (5) e (6) sono le equazioni parametriche delle linee L

da determinarsi. Si è così dedotto ⁽³⁾ che esistono tre tipi di linee integrali dell'equazione (3), che furono chiamate rispettivamente *pseudocicloide*, *pseudocatenaria*, *sinusoide fluviale*. Esse sono rappresentate dalle curve I), II), III), della fig. 1, e corrispondono ai casi in cui la costante h è positiva e diversa da zero, o nulla, o negativa e minore di 1 in valore assoluto. La curva ad *otto* che ha nell'origine P delle coordinate un punto doppio vien riguardata come un caso particolare della sinusoide fluviale; di questa è pure notevole il caso in cui la tangente nei punti di flesso R ed R' risulta perpendicolare all'asse delle ascisse.

Come vuole la (3), caratteristica di ciascuna delle linee integrali è di avere la curvatura nei loro punti proporzionale alla distanza dall'asse di rotazione ⁽⁴⁾.

Sostituendo, nella (3), a c la sua espressione in funzione delle derivate prima e seconda di y rispetto ad x , in luogo delle equazioni parametriche (5) e (6) si deduce la y' in funzione di y ; e quindi nuovamente integrando la x in funzione di y . Anche da tali relazioni si può specificare l'andamento dei tre tipi di curve sopra mentovati; come si è fatto in un altro lavoro ⁽⁵⁾.

2. - Anelli tubolari vorticosi di rivoluzione con linee meridiane rotatorie.

La curva chiusa $DSAD$ dalla fig. 2 rappresenta un cappio di pseudocicloide o di pseudo-catenaria, di cui la retta a è

⁽³⁾ Vedasi la nota: *Sui vortici piani indeformabili*; negli Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei, 1931.

⁽⁴⁾ In un primo momento avevo sperato che il ramo IAS della linea I) potesse congiungersi in S col suo simmetrico rispetto alla perpendicolare all'asse delle x passante per I' , dando luogo ad una specie di ovale a curvatura crescente proporzionalmente con l'ordinata y . In fatto il disegno d'un tal ovale non mi riusciva, e il prof. COMESSATI mi convinse che quella ovale era impossibile. Ciò che del resto mi è risultato anche dalla considerazione dei valori di x dati dall'integrale che figura nella formola (6).

⁽⁵⁾ Cfr. *Sui vortici indeformabili*; Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze; 1931.

l'asse di rotazione. Quella curva ruotando intorno ad a genera un toro od anello tubolare. Immaginando che la curva generatrice sia imagine di una linea vorticoso, si avrà una nuova specie di anello vorticoso, che differisce da quello comunemente noto, in quanto le sue linee costitutive sono curve meridiane anzichè paralleli.

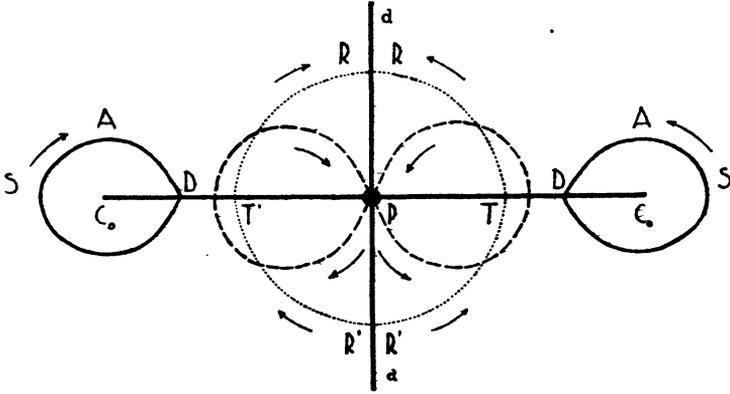


FIG. 2

Si può obbiettare che la linea $DSAD$ avendo in D un punto a tangenti distinte non è fisicamente ammissibile. Ma una tale difficoltà anche dal lato strettamente teorico vien eliminata, immaginando che nel fluido esista un disco materiale di spessore infinitesimo rappresentato in figura dal segmento C_0C_0 , sulle faccie del quale vengono a poggiare i due estremi D del coppia.

La curva ad otto segnata a tratti dà pure luogo ad un anello analogo al precedente. Essa non presenta discontinuità nella tangente; ma se ne avrebbe tuttavia in P un punto multiplo, e quindi una sovrapposizione di linee vorticoso. Si ovvia all'inconveniente, introducendo nel fluido una sferetta di centro P contro la quale si appoggino le due parti di ciascun otto.

Insieme ai due anelli precedenti interessa considerare anche la superficie vorticoso di rivoluzione generata dall'arco RTR' della sinusoide, di cui alla fig. 1. Gli estremi degli archi opposti vangono ad avere in R ed R' le tangenti dirette in senso contrario. Potremo ancora supporre che esista nel fluido un cilindretto di appoggio di asse RR' .

Passo ora a dimostrare che gli anelli tubolari sopra definiti e quella superficie sferoidale vorticoso sono animati da un moto rigido di rotazione intorno all'asse a .

3. - Moto complessivo degli anelli precedenti.

La velocità di componenti (1) indotta in un punto P da una qualunque linea vorticoso L può distinguersi in due parti, l'una di componenti

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} v' = 0, \\ w' = -\frac{\omega c}{2\pi} \log \varepsilon; \end{array} \right.$$

e l'altra di componenti

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} v'' = -\frac{\omega \gamma}{2\pi (1 - \alpha^2)}, \\ w'' = \frac{\omega \beta}{2\pi (1 - \alpha^2)}. \end{array} \right.$$

Le (7) danno quella che si è detta *velocità d'insieme*, e le (8) la *velocità rotatoria* ⁽⁶⁾. Considerando separatamente i contributi recati dalle (7) ed (8), calcoliamo ora la velocità indotta in un punto generico O di una linea meridiana degli anelli sopra definiti.

Fissiamo la nostra attenzione sull'anello generato dalla curva $DSAD$; e consideriamo un arco di circonferenza $O_1 O O_2$ generato da O nella rotazione intorno ad a ; essendo $O_1 O$ uguale ad $O O_2$. Le linee meridiane passanti per O_1 ed O_2 staccano una parte di anello Λ , comprendente il punto potenziato O . A questa parte soltanto avremo riguardo per il calcolo della velo-

⁽⁶⁾ Cfr. *Sul moto intestino dei filetti vorticosi*; Giornale di Matematiche del Battaglini; 1911.

cità indotta in O ; e la considereremo costituita da coppie di linee vorticose L' ed L'' simmetriche rispetto al piano meridiano di O , e passanti per due punti O' e O'' dell'arco suddetto.

Per la natura dei valori *assintotici* (4) che diventano infiniti all'impiccolirsi indefinito di ε , potremo ritenere l'arco $O_1 O O_2$ così piccolo da poterlo assimilare ad un segmento rettilineo. Con ciò i due triedri in O' e O'' relativi alle curve L' ad L'' potranno ritenersi cogli spigoli paralleli agli assi del sistema $O(xyz)$ relativi alla linea meridiana L passante per O .

I contributi V' e V'' recati alla velocità d'insieme in O dalle curve L' ed L'' risultano, per la (7),

$$V' = V'' = -\frac{\omega c}{2\pi} \log \varepsilon',$$

con $\varepsilon' = O' O = O O''$. A prescindere quindi dalla linea L passante per O , il contributo complessivo recato dalla parte Λ di anello alla velocità d'insieme di O torna proporzionale al valore di c in O .

Per ciò che si riferisce alla velocità rotatoria, il contributo recato da una L' è annullato da quello corrispondente alla sua simmetrica L'' .

Il contributo recato dalla rimanente parte di anello è da ritenersi finito e quindi trascurabile rispetto al contributo di Λ . Infine si osservi che la linea L passante per O , agli effetti della velocità indotta in O non può che assimilarsi ad un filetto vorticoso. Concludendo la velocità in O indotta dall'anello resta ancora proporzionale a c , e quindi per la (3) alla distanza dall'asse a di rotazione.

L'anello tubolare a linee vorticose meridiane è quindi sollecitato a ruotare intorno al suo asse di simmetria: a giusta ragione esso potrà denominarsi *anello vorticoso ruotante*, a differenza di quello comune a movimento traslatorio.

4. - Anelli pieni.

La (5), per il massimo valore y_s in ognuna delle curve della fig. 1, dà

$$y_s = \frac{2}{\sqrt{k}} \sqrt{1+h}.$$

Posto $b = 2\sqrt{1+h}$, attesa la (3), si deduce

$$\sqrt{k} = \frac{b}{y_s}; \quad c_s = \frac{b^2}{y_s},$$

essendo c_s la curvatura massima.

Pertanto abbassando in quelle curve il punto di massimo S e fermo restando l'asse delle x , si ottiene un maggiore valore sia di k che di c_s . Se ne argomenta che curve analoghe a quelle $DSAD$ e RTR' della fig. 2 ma con punti a distanza massima sempre minore dall'asse a , saranno l'una interna all'altra. Ciascuna di queste curve meridiane darà luogo a un anello tubolare analogo a quello dianzi considerato; e il complesso di tali anelli succedentisi con continuità costituirà un anello vorticoso pieno a linee vorticosose meridiane.

Per quello che si è detto, ciascun anello tubolare del complesso, indipendentemente dagli altri, ruoterà intorno al medesimo asse, sia pure con velocità angolare diversa. Ma che avverrà quando si abbia riguardo anche agli altri anelli? Si dimostra facilmente che per ciascun anello permane il moto rotatorio.

Sia O_0 un punto d'un generico anello tubolare; e O'_0 il punto più vicino di una sezione meridiana L'_0 appartenente ad un altro anello del complesso. La velocità d'insieme indotta in O_0 da L'_0 sarà per le (7) proporzionale al valore c' della curvatura di L'_0 in O'_0 . Ma dovendosi ritenere, sempre per la natura dei valori asintotici (7), il punto O'_0 abbastanza vicino ad O_0 , sarà c' assimilabile a c . I rimanenti anelli indurranno quindi in O_0 una velocità d'insieme ancora proporzionale a c ed egualmente diretta.

Il contributo (8) recato alla velocità di O_0 da una generica L'_0 non ha sempre la stessa direzione e lo stesso senso. Il contributo complessivo, quando non risulti assolutamente nullo, può senz'altro ritenersi trascurabile rispetto al valore della velocità d'insieme; ciò che del resto potrebbe essere confermato da una minuta analisi, che per brevità omettiamo.

Concludendo, ciascun anello tubolare del complesso ruoterà intorno ad a con una velocità angolare generalmente diversa dall'uno all'altro. Può darsi però che con l'aumentare della massima curvatura di ciascuna linea meridiana, ne vari la semi-intensità I in modo da dar luogo ad una stessa velocità di rotazione del corrispondente anello tubolare. In tal caso anche l'anello pieno ruoterà rigidamente, come ciascuno dei suoi elementi anulari.

Quello che si è detto per l'anello relativo alla curva $DSAD$ della figura 2, vale naturalmente anche per la superficie sferoidale rotonda di linea meridiana RTR' ; e per tutti gli altri casi analoghi.

5. - Vortici eterei.

Il comportamento degli anelli vorticosi a linee meridiane, sotto l'aspetto idrodinamico, non può essere intaccato; salvo l'eventuale introduzione di superfici d'appoggio alle linee vorticosi nei punti che riescono singolari, come sopra si è prospettato. Ma i risultati conseguiti mi spingono a concezioni, che potrebbero sembrare troppo audaci.

Il P. GIANFRANCESCHI, in una conferenza ⁽⁷⁾, dopo aver passato in rassegna le moderne teorie sulla costituzione della materia, si richiama all'antica teoria dei vortici; concepisce l'etere come un fluido materiale, e i corpi ritiene originati da una certa condensazione di etere; i vortici o particelle ruotanti sarebbero dei corpi il primissimo elemento costitutivo, ossia essi coinciderebbero cogli elettroni o coi protoni.

(7) Cfr. G. GIANFRANCESCHI: *Sulle frontiere della nuova fisica*; Atti della Società It. Progresso Scienze, 1930.

L'opinione espressa dall'illustre scienziato, meglio di ogni altra del genere, trova risonanza nei miei convincimenti filosofici. Io penso che gli elettroni e i protoni siano alla loro volta un complesso di infiniti vortici. Ecco come concepirei la struttura dell'atomo.

I vortici elettronici costituirebbero un anello ruotante tubolare o pieno, come quello sopra studiato; i vortici protonici costituirebbero una superficie sferoidale di rivoluzione. La ragione del movimento rotatorio consisterebbe allora semplicemente nell'essenza vorticosa degli elementi materiali primitivi. E non si esclude con ciò che elettroni e nucleo possano essere carichi di elettricità negativa e positiva. L'atomo, così immaginato, risulta a sua volta nel suo insieme ancora un vortice; i diversi atomi costituenti una molecola possono pensarsi disposti in modo da formare un altro vortice; le molecole degli astri potrebbero esser in massima disposte come i vortici elettronici o quelli protonici. La disposizione ad anello darebbe ragione dell'anello di Saturno; quella sferoidale, della Terra e di altri corpi celesti; l'una e l'altra giustificherebbero il moto di rotazione nel mondo macroscopico.

Credo prematuro insistere per ora in tali interpretazioni del micro e macrocosmo; ma mi sia lecito dichiarare che fra tanto generoso tumulto di ardite concezioni nella Fisica moderna, anche un ritorno all'antica teoria vorticosa potrebbe essere fecondo di felici risultati.

Padova, settembre 1931 - IX
