RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANGELO TONOLO

Equazioni intrinseche di equilibrio dell'elasticità negli spazî a curvatura costante

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 73-84

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__73_0>

EQUAZIONI INTRINSECHE DI EQUILIBRIO DELL'ELASTICITÀ NEGLI SPAZÎ A CURVATURA COSTANTE

di Angelo Tonolo

In questa ricerca io continuo quelli studî iniziati in una precedente ([1]), onde segnalare un metodo per dare forma intrinseca alle equazioni generali di equilibrio dei mezzi elastici. Nel caso della omogeneità e isotropia, queste equazioni acquistano un aspetto notevolmente semplice ed espressivo, facendo intervenire soltanto gli allungamenti principali del corpo, e i coefficienti di rotazione di Ricci relativi alla terna ortogonale di congruenze di linee cui il mezzo viene riferito ([2]). Qui sono giunto ad un gruppo di equazioni intrinseche, *valido per i mezzi omogenei e isotropi immersi negli spazî a curvatura costante*, nelle quali figurano la dilatazione cubica, le componenti della rotazione, la curvatura dello spazio, ed elementi della terna ortogonale di congruenze di linee di riferimento. Si ha così un sistema di equazioni che trova il suo analogo nella ordinaria teoria dell'elasticità.

Le equazioni di equilibrio dell'elasticità negli spazî a curvatura costante per i mezzi isotropi, furono ottenute la prima volta da Beltrami ([3]). Ma queste equazioni non possono considerarsi come le più generali, avendo l'eminente Autore riferito lo spazio ad un triplo sistema ortogonale di superficie, e in parti-

([1]) A. Tonolo, *Forma intrinseca delle equazioni di equilibrio dei mezzi elastici*, [Rendic. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XI, serie 6, 1° sem. (1930)]. Due note.

([2]) A. Tonolo, *Forma intrinseca delle equazioni di equilibrio dei mezzi elastici isotropi*, [Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XI, serie 6, 1° sem. (1930)].

([3]) E. Beltrami, *Sulle equazioni generali dell'elasticità* [Opere matematiche, Tomo III, pag. 383]. U. Hoepli (Milano), 1911.

colare a quello che conferisce al ds^2 dello spazio la forma di RIEMANN. Le equazioni alle quali sono pervenuto non esigono questa scelta particolare di coordinate curvilinee, assumendo io come sistema di riferimento una terna ortogonale di congruenze di linee qualsivoglia.

Per la maggiore generalità che hanno le mie formule su quelle di BELTRAMI, e per il fatto che i canoni del Calcolo assoluto e della Geometria intrinseca conferiscono a tutta la trattazione una singolare naturalezza e agilità, ho stimato non priva di interesse la pubblicazione del presente lavoro.

§ 1. – Equazioni indefinite di equilibrio dei mezzi continui negli spazî curvi.

1. Siano x^ν $(\mu, \nu, \rho, \sigma = 1, 2, 3)$ coordinate curvilinee di uno spazio curvo V_3 a tre dimensioni, il cui quadrato dell'elemento lineare è dato da

$$ds^2 = a_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \tag{1}$$

Denotiamo con λ_i^ν $(i, j, h, k, l = 1, 2, 3)$ i parametri di tre congruenze di linee tracciate in V_3 e ortogonali fra loro due a due; $\lambda_{i|\nu}$ siano i rispettivi momenti e γ_{hkl} i coefficienti di rotazione di RICCI. Un mezzo continuo S, per ora di natura qualunque, sia immerso in V_3 e sottoposto ad una deformazione infinitesima. Siano:

u_ν le componenti covarianti del vettore spostamento.

ω_ν le componenti covarianti del vettore rotazione.

$\xi_{\mu\nu}$ le componenti covarianti del tensore di deformazione.

$\Phi_{\mu\nu}$ le componenti covarianti del tensore degli sforzi.

θ la dilatazione cubica.

Indichiamo con θ_{hk} le componenti intrinseche del tensore degli sforzi, cioè gli invarianti

$$\theta_{hk} = \Phi_{\mu\nu} \lambda_h^\mu \lambda_k^\nu . \tag{2}$$

Nella menzionata ricerca ho posto le equazioni di equilibrio del mezzo S sotto la forma seguente [4]:

$$\text{(I)} \qquad \Sigma_{hk}(\gamma_{khh}\theta_{kj} + \gamma_{hjk}\theta_{hk}) + \Sigma_k \frac{d\theta_{kj}}{d\sigma_k} = X_j \,,$$

nelle quali σ_k indica l'arco della linea della congruenza $\lambda_{k|\nu}$, e X_k la componente della forza di massa, ridotta all'unità di volume, secondo questa linea.

Noi vogliamo ora trasformare queste equazioni in altre, nelle quali figurino la dilatazione cubica e la rotazione. Per raggiungere questo scopo necessita abbandonare la generalità, sia riguardo al mezzo S, sia riguardo allo spazio V_3. Supporremo pertanto:

a) che il mezzo S sia elastico, omogeneo e isotropo.

b) che lo spazio V_3 sia a curvatura costante K.

In queste ipotesi arriveremo ad un gruppo di equazioni che trova il suo analogo nell'ordinaria teoria dei corpi elastici isotropi.

§ 2. – Espressioni intrinseche della dilatazione, della rotazione, e degli sforzi [5].

Indichiamo con $u_{\mu\nu}$ le derivate prime covarianti delle componenti u_μ, poniamo:

$$(3) \qquad 2\xi_{\mu\nu} = u_{\mu\nu} + u_{\nu\mu} \,,$$

$$(4) \qquad 2\sqrt{a}\,\omega^\nu = u_{\nu+2\nu+1} - u_{\nu+1\nu+2} \,,$$

dove con a denotiamo il discriminante della forma (1), e conve-

(4) Queste equazioni, nel citato lavoro, si riferiscono ai mezzi elastici degli spazî euclidei. Esse però hanno una portata maggiore, essendo valide eziandio per i mezzi continui immersi negli spazî a metrica qualunque. Cfr. T. Levi-Civita, *Fondamenti di meccanica relativistica*, (Bologna. Nicola Zanichelli) Cap. I, § 24, pag. 81.

(5) Non tutte le formule contenute in questo paragrafo sono necessarie alla deduzione delle equazioni (II) del § III che formano l'oggetto del lavoro. Qui le abbiamo scritte per dedurre (§ V), in rapido modo, come caso particolare, alcune formule di Lamé.

niamo, ora e nel seguito, di considerare equivalenti gli indici che differiscono fra di loro per tre, o per multipli di tre. Siano $\varepsilon_{\nu\rho\sigma}$ le componenti covarianti del tensore triplo ε di RICCI: le (4) si possono allora scrivere così:

$$2\,\omega^{\nu} = \varepsilon^{\nu\rho\sigma} u_{\sigma\rho} \,. \tag{5}$$

Queste equivalgono alle seguenti:

$$2\,\omega_{\nu} = \varepsilon_{\nu\rho\sigma} u^{\sigma\rho} \,. \tag{6}$$

Dalle (3), (4), si trae

$$\xi_{\mu\nu} = u_{\mu\nu} - \varepsilon_{\rho\nu\mu}\,\omega^{\rho} \,. \tag{7}$$

Infine ricordiamo la espressione della dilatazione cubica

$$\theta = a^{\mu\nu}\,\xi_{\mu\nu} \,. \tag{8}$$

Queste formule premesse, seguendo l'idea di BELTRAMI, ammettiamo che le note relazioni che vincolano le componenti del tensore degli sforzi alle componenti del tensore di deformazione nel caso dell'isotropia e dello spazio euclideo, restino valide anche nel caso attuale.

Avremo perciò le formule [6]

$$\Phi^{\mu\nu} = (2\,B - A)\,a^{\mu\nu}\,\theta - 2\,B\,\xi^{\mu\nu} \,, \tag{9}$$

nelle quali le costanti di GREEN A, B devono ritenersi variabili soltanto con la curvatura K dello spazio.

Dalle (2) si trae, surrogandovi le (9),

$$\theta_{hk} = (2\,B - A)\,\theta\,\varepsilon_{hk} - 2\,B\,\xi^{\mu\nu}\,\lambda_{h|\mu}\,\lambda_{k|\nu} \,. \tag{10}$$

$$\varepsilon_{hk} = \begin{cases} 1 \text{ se } h = k \\ 0 \text{ se } h \neq k \end{cases} .$$

E da queste, poichè

$$\xi^{\mu\nu} = u^{\mu\nu} - \varepsilon^{\rho\nu\mu}\,\omega_{\rho} \,,$$

si ha:

(6) Cfr. loc. cit. (2).

(11) $$\theta_{hk} = A_{hk} + B_{hk} + C_{hk} ,$$

avendo posto:

(12) $$A_{hk} = (2B - A)\,\theta\,\varepsilon_{hk} ,$$

(13) $$B_{hk} = -2B\,u^{\mu\nu}\lambda_{h|\mu}\lambda_{k|\nu} ,$$

(14) $$C_{hk} = 2B\,\varepsilon^{\rho\nu\mu}\,\omega_\rho\,\lambda_{h|\mu}\lambda_{k|\nu} .$$

Introduciamo ora le componenti intrinseche U_i dello spostamento, cioè gli invarianti

(15) $$U_i = u^\mu \lambda_{i|\mu} .$$

Dalle (15) si ottiene:

(16) $$u^\mu = \Sigma_i\, U_i \lambda_i^\mu .$$

E da queste, derivando contravariantemente, si ricava:

(17) $$u^{\mu\nu} = \Sigma_i\, U_i \lambda_i^{\mu\nu} + \Sigma_i\, U_i^\nu \lambda_i^\mu .$$

Quindi:

(18) $$\theta = a_{\mu\nu}\xi^{\mu\nu} = a_{\mu\nu}u^{\mu\nu} = a_{\mu\nu}\Sigma_i\, U_i \lambda_i^{\mu\nu} + a_{\mu\nu}\Sigma_i\, U_i^\nu \lambda_i^\mu .$$

Ma essendo

$$a_{\mu\nu} = \Sigma_h \lambda_{h|\mu}\lambda_{h|\nu} , \quad \gamma_{hkl} = \lambda_{h|\mu\nu}\lambda_k^\mu \lambda_l^\nu$$

$$\lambda_{h\,\nu} = a_{\mu\nu}\lambda_h^\mu , \quad \frac{dU_i}{d\sigma_k} = U_i^\nu \lambda_{k|\nu} ,$$

risulta ovviamente dalla (18)

(19) $$\theta = \Sigma_i \left\{ \frac{dU_i}{d\sigma_i} + \Sigma_h \gamma_{hii} U_h \right\} .$$

Le espressioni fra parentesi sono le derivate prime intrinseche ([7]) U_{ii} delle componenti U_i dello spostamento. Abbiamo per-

([7]) U. Cisotti, *Derivazione intrinseca nel Calcolo differenziale assoluto*, [Rend. Acc. Lincei, Vol. XXVIII, Serie 5, (1918)]. Dello stesso Autore, *Lezioni di Calcolo tensoriale*, [Libreria Editrice Politecnica (Milano) 1928], Cap. IV, § 53.

A. Palatini, *Sulla geometria intrinseca come strumento di Calcolo*, [Rend. del Seminario matematico e fisico di Milano, Vol. II, (1928)], § 7.

tanto dalla precedente (19):

$$(\alpha)\qquad \boxed{\theta = \Sigma_i U_{ii}}\,.$$

Dalla (12) si trae:

$$(20)\qquad A_{hk} = \varepsilon_{hk}(2B - A)\Sigma_i U_{ii}.$$

Calcoli analoghi a quelli eseguiti testè, conducono alle formule

$$(21)\qquad B_{hk} = U_{hk}.$$

Trasformiamo ora le C_{hk}. A questo scopo rappresentiamo con e_{hkl} le componenti intrinseche ([8]) del tensore triplo ε di Ricci, cioè poniamo:

$$(22)\qquad \varepsilon_{\nu\rho\sigma} = \Sigma_{hkl} e_{hkl} \lambda_{h|\nu} \lambda_{k|\rho} \lambda_{l|\sigma}.$$

Sostituendo dapprima nelle (6) le (17) e (22), si ottiene agevolmente

$$(23)\qquad 2\omega^\nu = \Sigma_i \lambda_{i|\nu} \Omega_i,$$

essendo

$$(\beta)\qquad \boxed{\Omega_i = \Sigma_{hk} e_{ihk} U_{kh}}$$

le doppie componenti intrinseche del vettore rotazione.

Surrogando le (23) nelle (14), e tenendo presente che

$$e_{ihk} = \varepsilon^{\rho\nu\mu} \lambda_{i|\rho} \lambda_{k|\nu} \lambda_{h|\mu},$$

si giunge alle formule seguenti:

$$(24)\qquad C_{hk} = \Sigma_i e_{ikh} \Omega_i.$$

In forza delle (20), (21), (22), si trae, dalle (11),

$$(\gamma)\qquad \boxed{\theta_{hk} = (2B - A)\varepsilon_{hk} \Sigma_i U_{ii} - 2B U_{hk} + B \Sigma_{ijl} e_{ikh} e_{ijl} U_{lj}}\,.$$

([8]) Queste e_{hkl} sono nulle se almeno due degli indici h, k, l sono uguali. Se tutti e tre sono diversi, e se $h\,k\,l$ è una permutazione dei numeri 1 2 3, allora e_{hkl} ha il valore ± 1 secondo che la classe della sostituzione $\begin{pmatrix} h & k & l \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ è pari o dispari.

§ 3. - Equazioni indefinite di equilibrio dell'elasticità.

Per avere queste equazioni sotto la forma dichiarata nel proemio, cominciamo dapprima a scrivere le espressioni (γ) delle componenti degli sforzi in questo modo:

$$\theta_{hk} = (2B - A)\varepsilon_{hk}\theta - 2BU_{hk} + B\Sigma_i e_{ikh}\Omega_i \,. \tag{25}$$

Sostituendo allora le (25) nelle equazioni (I), e ricordando che

$$\gamma_{jhh} + \gamma_{hjh} = 0\,,$$

dopo facili riduzioni si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} &-A\frac{d\theta}{d\sigma_j} + 2B\Sigma_i\left\{\frac{dU_{ii}}{d\sigma_j} - \frac{dU_{ij}}{d\sigma_i} - \Sigma_k(\gamma_{kii}U_{kj} + \gamma_{ijk}U_{ik})\right\} \\ &+ B\Sigma_i\Omega_i\Sigma_{hk}(\gamma_{khh}e_{ijk} + \gamma_{hjk}e_{ikh}) + B\Sigma_{ik}e_{ijk}\frac{d\Omega_i}{d\sigma_k} = X_j\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Abbiamo, introducendo le derivate seconde intrinseche delle componenti U_i,

$$\begin{aligned} \Sigma_i(U_{iij} - U_{iji}) = \Sigma_i\frac{dU_{ii}}{d\sigma_j} &+ \Sigma_{ki}(\gamma_{kij}U_{ki} + \gamma_{kij}U_{ik}) \\ -\Sigma_i\frac{dU_{ij}}{d\sigma_i} &- \Sigma_{ki}(\gamma_{kii}U_{kj} + \gamma_{kji}U_{ik})\,. \end{aligned} \tag{27}$$

La seconda sommatoria del secondo membro è:

$$\Sigma_{ki}\gamma_{kij}(U_{ki} + U_{ik})\,. \tag{28}$$

Ora se $k = i$ l'addendo corrispondente è nullo perchè tale è γ_{iij}; se $k \neq i$ si osservi che la somma totale contiene gli addendi

$$\gamma_{kij}(U_{ki} + U_{ik})\,,$$

$$\gamma_{ikj}(U_{ik} + U_{ki})\,,$$

le cui somma è nulla, perchè $\gamma_{kij} + \gamma_{ikj} = 0$.

Concludiamo che le (28) hanno valore zero.

Si ricava perciò, dalle (27),

(29) $$\Sigma_i \left(\frac{d U_{ii}}{d \sigma_{ii}} - \frac{d U_{ij}}{d \sigma_{ij}} \right) = \Sigma_i (U_{iij} - U_{iji}) + \Sigma_{ki} (\gamma_{kii} U_{kj} + \gamma_{kji} U_{ik}) .$$

In forza delle (29), le (26) diventano le seguenti:

(30) $$\begin{aligned} & -A \frac{d\theta}{d\sigma_j} + 2B\Sigma_i (U_{iij} - U_{iji}) + 2B\Sigma_{ik} (\gamma_{kji} - \gamma_{ijk}) U_{ik} \\ & + B\Sigma_i \Omega_i \Sigma_{hk} (\gamma_{khh} e_{ijk} + \gamma_{hjk} e_{ikh}) + B\Sigma_{ik} e_{ijk} \frac{d\Omega_i}{d\sigma_k} = X_j . \end{aligned}$$

Poichè (formule (β))

$$\Omega_j = U_{j+2j+1} - U_{j+1j+2} ,$$

risulta:

(31) $$\begin{aligned} \Sigma_{ik} (\gamma_{kji} - \gamma_{ijk}) U_{ik} = & (\gamma_{j+1jj+2} - \gamma_{j+2jj+1}) \Omega_j \\ & + \gamma_{j+2jj} \Omega_{j+1} - \gamma_{j+1jj} \Omega_{j+2} . \end{aligned}$$

Inoltre:

(32) $$\begin{aligned} \Sigma_i \Omega_i \Sigma_{hk} e_{ijk} \gamma_{khh} = & (\gamma_{j+1jj} + \gamma_{j+1j+2j+2}) \Omega_{j+2} - \\ & - (\gamma_{j+2jj} + \gamma_{j+2j+1j+1}) \Omega_{j+1} . \end{aligned}$$

(33) $$\begin{aligned} \Sigma_i \Omega_i \Sigma_{hk} e_{ikh} \gamma_{hjk} = & (\gamma_{j+2jj+1} - \gamma_{j+1jj+2}) \Omega_j \\ & - \gamma_{j+2jj} \Omega_{j+1} + \gamma_{j+1jj} \Omega_{j+2} . \end{aligned}$$

(34) $$\Sigma_{ik} e_{ijk} \frac{d\Omega_i}{d\sigma_k} = \frac{d\Omega_{j+2}}{d\sigma_{j+1}} - \frac{d\Omega_{j+1}}{d\sigma_{j+2}} .$$

In virtù delle (31), (32), (33), (34) le equazioni (30) si trasformano nelle

(35) $$\begin{aligned} & -A \frac{d\theta}{d\sigma_j} + 2B\Sigma_i (U_{iij} - U_{iji}) + B \left\{ \frac{d\Omega_{j+2}}{d\sigma_{j+1}} + \Sigma_h \gamma_{hj+2j+1} \Omega_h \right. \\ & \left. - \frac{d\Omega_{j+1}}{d\sigma_{j+2}} - \Sigma_h \gamma_{hj+1j+2} \Omega_h \right\} = X_j . \end{aligned}$$

Facendo uso delle formule di commutazione [9], si ottiene:

(36) $$U_{iji} - U_{iij} = \Sigma_h \gamma_{hi,ji} U_h ,$$

[9] Cfr. A. Palatini, loc. cit. § 9.

essendo $\gamma_{hi,ji}$ le γ a quattro indici di Ricci. Nel caso nostro ($n=3$) è consuetudine introdurre le γ a due indici γ_{hk}, e rimpiazzare tutte le γ a quattro indici mediante queste, ponendo

$$\gamma_{hk} = \gamma_{h+1\, h+2,\, k+1\, k+2} \,.$$

Si ha allora dalle (36)

$$(37) \quad \Sigma_i (U_{iji} - U_{iij}) = (\gamma_{j+1 j+1} + \gamma_{j+2 j+2})\, U_j - \gamma_{jj+1}\, U_{j+1} - \gamma_{jj+2}\, U_{j+2} \,.$$

Ma essendo lo spazio V_3 a curvatura costante K, le γ_{hk} i cui indici sono diversi hanno valore zero, mentre le γ_{hh} coincidono con la curvatura K di V_3. Si ricava perciò dalle precedenti (37)

$$(38) \qquad \Sigma_i (U_{iji} - U_{iij}) = 2\, K\, U_j \,.$$

Infine notiamo che facendo intervenire le derivate prime intrinseche Ω_{ij} delle doppie componenti Ω_i della rotazione, le espressioni fra parentesi $\}\ \{$ nelle formule (35) altro non sono che le differenze

$$(39) \qquad \Omega_{j+2 j+1} - \Omega_{j+1 j+2} \,.$$

Per questa osservazione, e per le (38), le (35) diventano le equazioni definitive

$$(\mathrm{II}) \qquad \boxed{A \frac{d\theta}{d\sigma_j} + B(\Omega_{j+1 j+2} - \Omega_{j+2 j+1}) + 4\, K B\, U_j + X_j = 0} \,.$$

§ 4. - Equazioni di Beltrami.

Supponiamo ora che le congruenze λ_i^{ν} siano normali. Esisterà allora un triplo sistema di superficie mutuamente ortogonali di cui le linee delle congruenze suddette ne sono le traiettorie ortogonali. Assunte a superficie coordinate $x^{\nu} = \text{cost.}$, si ha:

$$d s^2 = a_{\nu\nu}\, d x^{\nu}\, d x^{\nu} = Q_{\nu}^{-2}\, d x^{\nu 2} \,.$$

Inoltre:

$$\lambda_h^{\nu} = 0 \quad (h \neq \nu) \,, \quad \lambda_{\nu}^{\nu} = \frac{1}{Q_{\nu}} \,,$$

$$\lambda_{h|\nu} = 0 \quad (h \neq \nu)\,, \quad \lambda_{\nu|\nu} = Q_\nu\,,$$

(40) $$\gamma_{hkl} = 0 \quad (h \neq k \neq l)\,,$$

(41) $$\gamma_{hkk} = \frac{1}{Q_h Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial x_h}\,.$$

Con le notazioni di Beltrami, risulta

(42) $$u_\nu = Q_\nu^2 \varkappa_\nu\,,$$

(43) $$U_j = \lambda_j^{(j)} u_j = Q_j \varkappa_j\,.$$

Dalle (23) si trae:

$$\Omega_j = \frac{2\,\omega_j}{Q_j} = Q_{j+1} Q_{j+2} \left(u^{j+2j+1} - u^{j+1j+2}\right)$$

$$= \frac{1}{Q_{j+1} Q_{j+2}} \left(u_{j+2j+1} - u_{j+1j+2}\right)$$

$$= \frac{1}{Q_{j+1} Q_{j+2}} \left(\frac{\partial u_{j+2}}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x_{j+2}}\right).$$

E infine [10], surrogando le (42),

$$\Omega_j = \frac{1}{Q_{j+1} Q_{j+2}} \left(\frac{\partial Q_{j+2}^2 \varkappa_{j+2}}{\partial x_{j+1}} - \frac{\partial Q_{j+1}^2 \varkappa_{j+1}}{\partial x_{j+2}}\right).$$

Nel caso nostro, in forza delle (40), (41), abbiamo:

$$\Omega_{j+1j+2} = \frac{\partial \Omega_{j+1}}{\partial \sigma_{j+2}} + \gamma_{j+2j+1j+2}\, \Omega_{j+2} =$$

$$= \frac{1}{Q_{j+2}} \frac{\partial \Omega_{j+1}}{\partial x_{j+2}} - \frac{1}{Q_{j+1} Q_{j+2}} \frac{\partial Q_{j+2}}{\partial x_{j+1}} \Omega_{j+2}\,,$$

$$\Omega_{j+2j+1} = \frac{\partial Q_{j+2}}{\partial \sigma_{j+1}} + \gamma_{j+1j+2j+1}\, \Omega_{j+1} =$$

[10] Le Ω_i sono indicate con ϑ_i da **Beltrami**. Cfr. pag. 395 della citata memoria.

$$= \frac{1}{Q_{j+1}} \frac{\partial Q_{j+2}}{\partial x_{j+1}} - \frac{1}{Q_{j+1} Q_{j+2}} \frac{\partial Q_{j+1}}{\partial x_{j+2}} \Omega_{j+1} .$$

Quindi, sottraendo, si trae agevolmente,

$$\Omega_{j+1\,j+2} - \Omega_{j+2\,j+1} = \frac{1}{Q_{j+1} Q_{j+2}} \left(\frac{\partial Q_{j+1} \Omega_{j+1}}{\partial x_{j+2}} - \frac{\partial Q_{j+2} \Omega_{j+2}}{\partial x_{j+1}} \right). \tag{44}$$

Ponendo le (44) nelle equazioni (II), abbiamo le equazioni di Beltrami

(III)

$$\boxed{\frac{A}{Q_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \frac{B}{Q_{j+1} Q_{j+2}} \left(\frac{\partial Q_{j+1} \Omega_{j+1}}{\partial x_{j+2}} - \frac{\partial Q_{j+2} \Omega_{j+2}}{\partial x_{j+1}} \right) + 4KBQ_j \varkappa_j + X_j = 0} .$$

§ 5. - Formule di Lamé per la dilatazione e per gli sforzi.

Introduciamo dapprima le costanti elastiche λ e μ di Lamé, legate, come è noto, a quelle A e B di Green dalle relazioni

$$\lambda = 2B - A ,$$

$$\mu = -B .$$

Poi si ponga:

$$\frac{1}{r_{ij}} = \gamma_{ij} ,$$

$$\frac{1}{\tau_i} = \frac{1}{r_{i\,i+1}} + \frac{1}{r_{i\,i+2}} .$$

Con queste notazioni, dalla (α) si trae:

$$\theta = \Sigma_h \left(\frac{d U_h}{d \sigma_h} + \frac{U_h}{\tau_h} \right). \tag{α_1}$$

Dalle (γ) si ricava:

$$(\gamma_1) \qquad \begin{aligned} \theta_{hh} &= \lambda\,\theta + 2\left(\frac{d\,U_h}{d\,\sigma_h} + \frac{U_{h+1}}{r_{h+1h}} + \frac{U_{h+2}}{r_{h+2h}}\right) \\ \theta_{hh+1} &= \mu\left(\frac{d\,U_h}{d\,\sigma_{h+1}} + \frac{d\,U_{h+1}}{d\,\sigma_h} - \frac{U}{r_{h+1h}} - \frac{U_{h+1}}{r_{hh+1}}\right). \end{aligned}$$

Le (α_1), (γ_1), con notazioni diverse, coincidono con un gruppo di formule già dato da LAMÉ per la dilatazione cubica θ e per gli sforzi θ_{hk} dei mezzi elastici isotropi degli spazî euclidei (11).

(11) G. LAMÉ, *Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications* (Seizième Leçon, § CLII).