

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI SANSONE

**Sugli autovalori per le equazioni differenziali
lineari omogenee del terzo ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 1 (1930), p. 164-183

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__164_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUGLI AUTOVALORI PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI OMOGENEE DEL TERZO ORDINE

di GIOVANNI SANSONE a Firenze.

Scopo del presente lavoro è di dimostrare che: *data l'equazione*

$$[\theta(x)y'(x)]' + \lambda[A(x)y(x)]' + \lambda[B_1(x) + \varepsilon B_2(x)]y(x) = 0,$$

nelle ipotesi $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ *funzioni continue di* x *in* (α, β) ; λ , ε *costanti*; $\theta(x) > 0$ *in* (α, β) ; *fissati tre punti* a , c , b *di* (α, β) , $a < c < b$, *se avviene che la funzione* $(x-c)B_2(x)$ *senza essere identicamente nulla non assume valori di segno opposto in* (a, b) , *allora eccettuati al più tre valori della costante* ε , *esistono valori di* λ *(autovalori) ai quali corrispondono integrali dell'equazione, non identicamente nulli, che si annullano nei tre punti fissati* a , c , b .

In altro lavoro l'A. ha dimostrato che se i coefficienti della equazione predetta sono costanti (anche per equazioni di qualsiasi ordine) esistono infiniti autovalori ⁽¹⁾; risultati analoghi sono stati ottenuti da altri autori per le equazioni *autoaggiunte* ⁽²⁾; è perciò da presumere, e la questione è ora oggetto di studio dell'A., che il teorema qui dimostrato sussista per le più generale equazione differenziale del terzo ordine del tipo

(¹) Cfr. G. SANSONE - a) *Il teorema di oscillazione per le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.* [Rend. Ist. Lombardo di Sc. e Lett.; LXII; (1929)]; - b) *Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali ordinarie lineari omogenee a coefficienti costanti.* [In pubblicazione nei Rend. del Circ. Matem. di Palermo].

(²) G. MAMMANA, *Autovalori ed autosoluzioni per la più generale equazione differenziale ordinaria.* [Annali R. Sc. Norm. Sup. di Pisa; XV (Sc. fis. e nat.), 1927].

$$[\theta(x)y'(x)]'' + \lambda[A(x)y(x)]' + \lambda B_1(x)y(x) = 0,$$

nelle ipotesi dichiarate per $\theta(x)$, $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B_1(x)$.

§ 1. - **Equazione integrale omogenea di seconda specie cui soddisfano le soluzioni dell'equazione differenziale**

$$(1) \quad [(\theta(x)y'(x))]' + \lambda[A(x)y(x)]' + \lambda B(x)y(x) = 0,$$

nulle in a , c , b .

1. - Supponiamo $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B(x)$ funzioni continue in (α, β) , $\theta(x) > 0$ in (α, β) , e siano a , c , b , con $a < c < b$, tre punti di (α, β) ; si vuole studiare se è possibile scegliere il parametro λ in modo che l'equazione (1) ammetta un integrale $y(x)$ non identicamente nullo che si annulli nei tre punti fissati a , c , b , sia cioè:

$$(2) \quad y(a) = y(b) = y(c) = 0.$$

All'equazione differenziale (1) può sostituirsi il sistema nelle due funzioni incognite $y(x)$, $u(x)$

$$(3)_1 \quad [\theta(x)y'(x)]' + u(x) = 0,$$

$$(3)_2 \quad u'(x) = \lambda[A(x)y(x)]' + \lambda B(x)y(x).$$

Se con $G(x, \zeta)$ indichiamo la così detta funzione di GREEN relativa all'equazione

$$[\theta(x)y'(x)]' = 0,$$

sappiamo che si ha per $a \leq x \leq b$, $a \leq \xi \leq b$

$$G(x, \xi) = \frac{\psi(b, \xi)\psi(x, a)}{\psi(b, a)}, \text{ con } x \leq \xi$$

(4)

$$G(x, \xi) = \frac{\psi(\xi, a)\psi(b, x)}{\psi(b, a)}, \text{ con } x \geq \xi$$

ove con $\psi(m, l)$, essendo m, l variabili in (a, b) , indichiamo la funzione

$$(5) \quad \boxed{\psi(m, l) = \int_l^m \frac{dx}{\theta(x)}} \quad (3)$$

Tutte le soluzioni $y(x)$ della (3)₁, nulle in a e in b sono date da

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

perciò il sistema delle (3)₁, (3)₂ unitamente alle condizioni $y(a) = y(b) = y(c) = 0$ equivale al sistema:

$$(6)_1 \quad y(x) = \int_a^b G(x, \xi) u(\xi) d\xi;$$

$$(6)_2 \quad u'(x) = \lambda[A(x)y(x)]' + \lambda B(x)y(x); \quad (6)_3 \quad y(c) = 0.$$

Dalla (6)₂ si ha:

$$(7) \quad u(x) = \lambda A(x)y(x) + \lambda \int_a^x B(x)y(x) dx + C \quad (C \text{ costante})$$

e il sistema delle (6)₁, (6)₂, (6)₃ dà per $y(x)$

$$(8)_1 \quad y(x) = C \int_a^b G(x, \xi) d\xi + \lambda \int_a^b G(x, t) A(t) y(t) dt +$$

$$+ \lambda \int_a^b G(x, \xi) d\xi \int_a^\xi B(t) y(t) dt,$$

$$(8)_2 \quad y(c) = 0.$$

L'ultimo integrale del secondo membro della (8)₁ è uguale a

(*) Cfr. R. COURANT und D. HILBERT, *Methoden der Mathem. Physik.* [Berlino, 1924], p. 273.

$\lambda \int_a^b B(t) y(t) dt \int_a^b G(x, \xi) d\xi$, perciò posto

$$(9) \quad \boxed{H(x, t) = \int_a^b G(x, \xi) dt}$$

la (8)₁ diventa

$$y(x) = CH(x, a) + \lambda \int_a^b G(x, t) A(t) y(t) dt + \\ + \lambda \int_a^b H(x, t) B(t) y(t) dt,$$

cioè

$$y(x) = CH(x, a) + \lambda \int_a^b [G(x, t) A(t) + H(x, t) B(t)] y(t) dt,$$

e posto ancora

$$(10) \quad \boxed{k(x, t) = G(x, t) A(t) + H(x, t) B(t)}$$

abbiamo per $y(x)$ l'equazione

$$y(x) = CH(x, a) + \lambda \int_a^b k(x, t) y(t) dt,$$

e la condizione (8)₂, $y(c) = 0$.

L'ultima equazione dà per la costante C

$$(11) \quad CH(c, a) + \lambda \int_a^b k(x, t) y(t) dt = 0,$$

dalla quale, avendosi per le (4), (5), (9) $H(c, a) > 0$ si ha

$$(12) \quad C = -\lambda \int_a^b \frac{k(c, t)}{H(c, a)} y(t) dt,$$

e perciò per $y(x)$ otteniamo l'equazione integrale omogenea di seconda specie

$$(13) \quad y(x) = \lambda \int_a^b \left[k(x, t) - \frac{H(x, a)}{H(c, a)} k(c, t) \right] y(t) dt,$$

ed infine posto

$$(14) \quad \boxed{K(x, t) = k(x, t) - \frac{H(x, a)}{H(c, a)} k(c, t)}$$

abbiamo per $y(x)$ l'equazione

$$(1) \quad \boxed{y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt}$$

Il nostro procedimento è invertibile; concludiamo che *condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (1) ammetta un integrale $y(x)$ nullo in a, c, b ($a < c < b$) è che l'equazione integrale omogenea di seconda specie (I) ammetta una soluzione $y(x)$ non identicamente nulla.*

2. - ESPRESSIONE DEL NUCLEO $K(x, t)$ DELL'EQUAZIONE INTEGRALE (I).

Se poniamo [cfr. (5)]

$$(15) \quad \boxed{\int_a^x \frac{dx}{\theta(x)} = \varphi(x)}$$

$\varphi(x)$ è funzione di x positiva, crescente, e la prima delle (4) diventa

$$G(x, \xi) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \int_{\xi}^b \frac{dx}{\theta(x)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} [\varphi(b) - \varphi(\xi)]$$

e operando analogamente sulla seconda delle (4) avremo:

$$(16) \quad \begin{aligned} G(x, \xi) &= \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} [\varphi(b) - \varphi(\xi)] \quad \text{per } x \leq \xi, \\ G(x, \xi) &= \frac{\varphi(\xi)}{\varphi(b)} [\varphi(b) - \varphi(x)] \quad \text{per } x \geq \xi. \end{aligned}$$

Passiamo ora a determinare l'espressione della funzione $H(x, t)$.

Dalla (9) per $t \geq x$, tenuto conto della prima delle (16), si ha :

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \int_t^b G(x, \xi) d\xi = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \int_t^b [\varphi(b) - \varphi(\xi)] d\xi = \\ &= (b-t)\varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \int_t^b \varphi(\xi) d\xi = \\ &= (b-t)\varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} [\xi\varphi(\xi)]_t^b + \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \int_t^b \frac{\xi}{\theta(\xi)} d\xi = \\ &= \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} \left[t\{\varphi(t) - \varphi(b)\} + \int_t^b \frac{\xi}{\theta(\xi)} d\xi \right] \end{aligned}$$

e ponendo quindi

$$(17) \quad \boxed{\int_t^b \frac{\xi}{\theta(\xi)} d\xi = \omega(t)}$$

e operando in modo analogo quando sia $t \leq x$, troviamo

$$(18)_1 \quad H(x, t) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} [t\{\varphi(t) - \varphi(b)\} + \omega(t)] \quad \text{per } t \geq x$$

$$(18)_2 \quad H(x, t) = \frac{\varphi(x) - \varphi(b)}{\varphi(b)} \{\varphi(t) + \omega(t)\} + \omega(x) \quad \text{per } t \leq x.$$

Tenuto conto delle (16) e delle (18)₁, (18)₂, la (10) dà per la funzione $k(x, t)$ le espressioni:

$$(19)_1 \quad k(x, t) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(b)} [\{\varphi(b) - \varphi(t)\} A(t) + t\{\varphi(t) - \varphi(b)\} + \\ + \omega(t)\} B(t)] \quad \text{per } x \leq t,$$

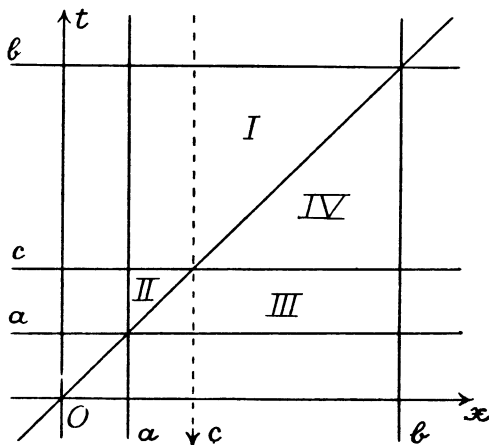
$$(19)_2 \quad h(x, t) = \frac{\varphi(b) - \varphi(x)}{\varphi(b)} [\varphi(t) A(t) - \{t\varphi(t) + \omega(t)\} B(t)] + \\ + \omega(x) B(t) \quad \text{per } x \geq t.$$

Nel piano (x, t) consideriamo ora il quadrato Q di lati $x = a, x = b; t = a, t = b$; e le quattro regioni in cui esso è diviso dalla bisettrice del primo quadrante e dalla retta $t = c$; propriamente indicheremo ora e nel seguito con I e III i due trapezi formati dai punti (x, t) caratterizzati rispettivamente dalle condizioni

$$x \leq t, \quad c \leq t; \quad x \geq t, \quad c \geq t$$

e con II e IV i due triangoli caratterizzati rispettivamente dalle relazioni

$$x \leq t, \quad c \geq t; \quad x \geq t, \quad c \leq t.$$



Se indichiamo con $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$, l'espressione di $K(x, t)$ rispettivamente nelle regioni I, II, III, IV, con semplici calcoli troveremo che posto

$$(20) \quad h = \varphi(c) \omega(a) + [\omega(c) - \omega(a)] \varphi(b) \quad [h > 0, \text{ cfr. } 5, a)]$$

si ha :

$$\begin{aligned}
 & \text{(II)}_1 \quad h K_I(x, t) = [\{\omega(c) - \omega(a)\} \varphi(x) - \{\omega(x) - \omega(a)\} \varphi(c)] \times \\
 & \times [\{\varphi(b) - \varphi(t)\} \{A(t) - tB(t)\} + \omega(t)B(t)]; \quad x \leq t, \quad c \leq t; \\
 & \text{(II)}_2 \quad h K_{II}(x, t) = \varphi(x) [\omega(a) \{\varphi(c) - \varphi(b)\} \{A(t) - tB(t)\} + \\
 & + \omega(c) \{\omega(t) - \omega(a)\} B(t) - \omega(c) \{\varphi(t) - \varphi(b)\} \{A(t) - tB(t)\} + \\
 & + \{\omega(x) - \omega(a)\} [\{\varphi(c) - \varphi(b)\} \varphi(t) \{A(t) - tB(t)\} - \\
 & - \{\omega(t) [\varphi(c) - \varphi(b)] + \varphi(b) \omega(c)\} B(t)]; \quad x \leq t, \quad c \geq t; \\
 & \text{(II)}_3 \quad h K_{III}(x, t) = [\omega(c) \{\varphi(b) - \varphi(x)\} - \omega(x) \{\varphi(b) - \varphi(c)\}] \times \\
 & \times [\varphi(t) \{A(t) - tB(t)\} - \{\omega(t) - \omega(a)\} B(t)]; \quad x \geq t, \quad c \geq t; \\
 & \text{(II)}_4 \quad h K_{IV}(x, t) = [\{\omega(a) - \omega(c)\} \{\varphi(b) - \varphi(x)\} - \omega(x) \varphi(c)] \times \\
 & \times [\{\varphi(b) - \varphi(t)\} \{A(t) - tB(t)\} + \omega(t)B(t)] + \\
 & + h [\{\varphi(b) - \varphi(x)\} \{A(t) - tB(t)\} + \omega(x)B(t)]; \quad x \geq t, \quad c \leq t.
 \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato: *condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione*

$$(1) \quad [\theta(x)y'(x)]' + \lambda[A(x)y(x)]' + \lambda B(x)y(x) = 0,$$

ammetta un integrale $y(x)$, non identicamente nullo, che si annulli in a, c, b , è che ammetta autovalori (valori eccezionali, parametri) l'equazione integrale omogenea di seconda specie

$$(I) \quad y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

nella quale il nucleo $K(x, t)$ si esprime colle $(II)_1, (II)_2, (II)_3, (II)_4$, e le funzioni $\varphi(x)$, $\omega(t)$ e la costante h che in queste compariscono sono definite dalle relazioni:

$$(III)_1 \quad \varphi(x) = \int_a^x \frac{dx}{\theta(x)}, \quad \omega(t) = \int_t^b \frac{\xi}{\theta(\xi)} d\xi; \quad h = \varphi(c)\omega(a) + [\omega(c) - \omega(a)]\varphi(b).$$

3. - a) Il nostro problema è quindi ricondotto ad esaminare quando il nucleo $K(x, t)$ definito dalle (II) ammette autovalori. Proveremo nel n.º seguente con due esempi che vi sono equazioni che ammettono autovalori reali, altre autovalori complessi, qui vogliamo subito osservare che *le soluzioni linearmente indipendenti della (I) corrispondenti ad un medesimo autovalore λ sono al più due.*

Sia infatti $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ un sistema fondamentale di integrali della (1) tale che

$$y_1(a) - 1 = y_1'(a) = y_1''(a) = 0; \quad y_2(a) = y_2'(a) - 1 = y_2''(a) = 0; \\ y_3(a) = y_3'(a) = y_3''(a) - 1 = 0;$$

L'integrale generale della (1) è $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$, (c_1, c_2, c_3 costanti), e questo si annullerà in a soltanto per $c_1 = 0$, perciò gli eventuali integrali (non identicamente nulli) che si annullano in b e in c si ottengono dalla combinazione lineare $c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$.

b) Vogliamo ancora osservare che la (I) dice che $\lambda = 0$ non è autovalore per la (1).

4. - ESEMPLI. — Sia data l'equazione $y''' + \lambda y' = 0$, e sia $a = 0$, $c = \pi$, $b = 2\pi$.

Abbiamo in questo caso $\theta = 1$, $A = 1$, $B = 0$ e le (II) danno:

$$K_I = \frac{1}{2\pi^2} x(x - \pi)(2\pi - t), \quad K_{II} = \frac{1}{\pi} x \left(\pi - \frac{3}{2}t + \frac{tx}{2\pi} \right),$$

$$K_{III} = \frac{1}{2\pi^2} (x - \pi)(x - 2\pi)t,$$

$$K_{IV} = \frac{1}{2\pi^2} (2\pi - x)[\pi t - 2\pi x + tx].$$

L'equazione integrale (I) ammette gli autovalori $\lambda = p^2$ con p intero assoluto diverso da zero; se $\lambda = (2m + 1)^2$ la corrispondente soluzione è $y = \sin(2m + 1)x$, se $\lambda = 4m^2$ l'equazione ammette le due soluzioni indipendenti $1 - \cos 2mx$, $\sin 2mx$ [che si annullano in $0, \pi, 2\pi$].

Questo esempio prova che se vi sono equazioni che per certi

autovalori ammettono una soluzione, e per altri autovalori invece due soluzioni linearmente indipendenti.

b) L'equazione

$$\left[\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x \right) y' \right]'' - \lambda \left[y \left(\frac{13}{2} + 16 \operatorname{sen} x \right) \operatorname{sen} x \right]' + 5 \lambda y (3 + 16 \operatorname{sen}^2 x) \cos x = 0$$

per $\lambda = \pm$ (unità immaginaria) ammette la soluzione $y = \operatorname{sen} x \pm i \operatorname{sen}^2 x$ la quale si annulla nei tre punti $0, \pi, 2\pi$.

L'equazione proposta ammette quindi autovalori complessi.

5. - ALTRA FORMA DEL NUCLEO DELL'EQUAZIONE INTEGRALE (I).

Consideriamo le funzioni $H(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_3(x)$, $\tau(x, t)$ definite con le relazioni:

$$(III)_2 \quad \begin{array}{l} H(x) = \omega(a) \varphi(x) + \omega(x) \varphi(b) - \omega(a) \varphi(b) \\ \alpha_1(x) = \{ \omega(c) - \omega(a) \} \varphi(x) - \{ \omega(x) - \omega(a) \} \varphi(c); \\ \alpha_3(x) = \{ \varphi(b) - \varphi(x) \} \omega(c) - \{ \varphi(b) - \varphi(c) \} \omega(x); \\ \tau(x, t) = \{ \varphi(x) - \varphi(t) \} \{ A(t) - tB(t) \} - \{ \omega(x) - \omega(t) \} B(t); \end{array}$$

con semplici sostituzioni nelle (II), si trovano per il nucleo $K(x, t)$ della (I) le espressioni:

$$(IV) \quad \begin{array}{l} K_I(x, t) = \frac{1}{H(c)} \alpha_1(x) \tau(b, t) \\ K_{II}(x, t) = \frac{1}{H(c)} \alpha_1(x) \tau(b, t) + \frac{H(x)}{H(c)} \tau(c, t) \\ K_{III}(x, t) = - \frac{1}{H(c)} \alpha_3(x) \tau(a, t) \\ K_{IV}(x, t) = - \frac{1}{H(c)} \alpha_3(x) \tau(a, t) - \frac{H(x)}{H(c)} \tau(c, t) \end{array}$$

le quali mettono in evidenza che il nucleo $K(x, t)$ ha la forme

elementare in ciascuna delle regioni I, II, III, IV, e si esprime linearmente e omogeneamente per le funzioni $A(t)$, $B(t)$.

6. - PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI $H(x)$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_3(x)$, $\tau(x, t)$.

a) Avendosi $H(x) = \omega(a)\varphi(x) + \omega(x)\varphi(b) - \omega(a)\varphi(b)$

ne viene $H(a) = H(b) = 0$.

Abbiamo poi

$$H'(x) = \frac{\omega(a)}{\theta(x)} - \frac{x}{\theta(x)}\varphi(b) = \frac{1}{\theta(x)} \left[\int_a^b \frac{\xi}{\theta(\xi)} d\xi - x \int_a^b \frac{1}{\theta(\xi)} d\xi \right]$$

ed indicando quindi con η un conveniente numero compreso tra a e b

$$H'(x) = \frac{\eta - x}{\theta(x)} \int_a^b \frac{d\xi}{\theta(\xi)}. \quad (a < \eta < b).$$

Si ha da qui che quando x varia tra a ed η , $H(x)$ è positiva crescente, quando x varia tra η e b , $H(x)$ è positiva decrescente; concludendo abbiamo:

$$(V)_1 \quad \boxed{H(a) = 0, \quad H(b) = 0, \quad H(x) > 0 \quad \text{per } a < x < b.}$$

b) Così pure da

$$\alpha_1(x) = \{\omega(c) - \omega(a)\}\varphi(x) - \{\omega(x) - \omega(a)\}\varphi(c)$$

si ricava $\alpha_1(a) = \alpha_1(c) = 0$; $\alpha_1(b) = H(c)$.

Abbiamo poi:

$$(21) \quad \alpha'_1(\xi) = \frac{\omega(c) - \omega(a)}{\theta(\xi)} + \frac{\xi\varphi(c)}{\theta(\xi)} = \\ = \frac{\xi}{\theta(\xi)} \int_a^c \frac{dt}{\theta(t)} - \frac{1}{\theta(\xi)} \int_a^c \frac{t}{\theta(t)} dt = \frac{1}{\theta(\xi)} \int_a^c \frac{\xi - t}{\theta(t)} dt.$$

Si ha da qui che per $\xi > c$ è $\alpha'_1(\xi) > 0$ perciò $\alpha_1(\xi)$ nell'intervallo (c, b) è crescente positiva.

Per studiare $\alpha_1(x)$ nell'intervallo (a, c) si osservi che in-

dicendo con γ_1 un conveniente numero compreso tra a e c si ha dalla (21)

$$\alpha_1'(\xi) = \frac{\xi - \gamma_1}{\theta(\xi)} \int_{\gamma_1}^{\xi} \frac{dt}{\theta(t)},$$

quindi per $a < \xi < \gamma_1$ è $\alpha_1'(\xi) < 0$ e $\alpha_1(\xi)$ negativa decrescente; per $\gamma_1 < \xi < c$ è $\alpha_1'(\xi) > 0$ e $\alpha_1(\xi)$ negativa crescente; concludendo abbiamo:

$$(V)_2 \quad \begin{array}{l} \alpha_1(a) = \alpha_1(c) = 0; \quad \alpha_1(b) = H(c); \quad \alpha_1(x) < 0 \\ \text{per } a < x < c; \quad H(c) > \alpha_1(x) > 0 \quad \text{per } c < x < b. \end{array}$$

c) In modo analogo si prova per la funzione

$$\alpha_3(x) = \{\varphi(b) - \varphi(x)\} \omega(c) - \{\varphi(b) - \varphi(c)\} \omega(x)$$

$$(V)_3 \quad \begin{array}{l} \alpha_3(a) = H(c), \quad \alpha_3(c) = \alpha_3(b) = 0; \quad H(c) > \alpha_3(x) > 0 \\ \text{per } a < x < c; \quad \alpha_3(x) < 0 \quad \text{per } c < x < b. \end{array}$$

d) Con semplici sostituzioni si verificano le relazioni:

$$(V)_4 \quad \begin{array}{l} H(x) + \alpha_1(x) + \alpha_3(x) = H(c); \\ \alpha_1(x) \varphi(b) = H(c) \varphi(x) - H(x) \varphi(c). \end{array}$$

e) Per la funzione $\tau(x, t)$ definita dalla relazione

$$\tau(x, t) = \{\varphi(x) - \varphi(t)\} A(t) - t B(t) - \{\omega(x) - \omega(t)\} B(t)$$

si troverà anche:

$$(V)_5 \quad \begin{array}{l} \tau(t, t) = 0, \quad \alpha_1(x) \tau(b, t) + \alpha_3(x) \tau(a, t) + \\ + H(x) \tau(c, t) = H(c) \tau(x, t). \end{array}$$

f) Dalle espressioni (IV) del nucleo $K(x, t)$ e dalle (V) si ricava:

$$(V)_6 \quad \boxed{\begin{array}{ll} K(a, t) = K(c, t) = K(b, t) = 0 & \text{qualunque sia } t \\ K(x, a) = K(x, b) = 0 & \text{qualunque sia } x \end{array}}$$

e le prime mettono bene in evidenza che *una soluzione* $y(x)$ dell'equazione integrale (I), non identicamente nulla, soddisfa le condizioni prescritte

$$y(a) = y(c) = y(b) = 0 .$$

§ 2. - Esistenza di autovalori.

7. - ESISTENZA DI AUTOVALORI IN UN CASO PARTICOLARE.

Sia data l'equazione

$$[\theta(x) y'(x)]' + \lambda B(x) y(x) = 0$$

con $\theta''(x)$, $B(x)$ funzioni continue, $\theta(x) < 0$ in (α, β) e siano a, c, b punti di (α, β) , $a < c < b$; se avviene che il prodotto $(x-c)B(x)$ senza essere identicamente nullo, non assume valori di segno opposto in (a, b) , esistono allora dei valori del parametro λ (autovalori) ai quali corrispondono soluzioni $y(x)$ dell'equazione (22) non identicamente nulle, che si annullano nei tre punti prefissati a, c, b .

a) Segno del nucleo nel quadrato Q .

Nel caso in esame il nucleo $K(x, t)$ della (I) ha per le (IV) le espressioni:

$$(VI)_1 \quad K_I(x, t) = \frac{\alpha_1(x)}{H(c)} \left[\omega(t) - t \{ \varphi(b) - \varphi(t) \} \right] B(t)$$

$$(VI)_2 \quad K_{II}(x, t) = \left\{ \frac{\alpha_1(t)}{H(c)} \left[\omega(t) - t \{ \varphi(b) - \varphi(t) \} \right] - \frac{H(x)}{H(c)} \left[t \{ \varphi(c) - \varphi(t) \} + \{ \omega(c) - \omega(t) \} \right] \right\} B(t)$$

$$(VI)_3 \quad K_{III}(x, t) = - \frac{\alpha_3(x)}{H(c)} \left[t \varphi(t) + \omega(t) - \omega(a) \right] B(t)$$

$$(VI)_4 \quad K_{IV}(x, t) = \left\{ - \frac{\alpha_3(x)}{H(c)} \left[t \varphi(t) + \omega(t) - \omega(a) \right] + \right.$$

$$+ \frac{H(x)}{H(c)} \left[t \{ \varphi(c) - \varphi(t) \} + \{ \omega(c) - \omega(t) \} \right] \Big\} B(t),$$

e noi vogliamo preliminarmente studiare il segno di $K(x, t)$ nel quadrato Q formato dalle regioni I, II, III, IV.

Per fissare le idee supponiamo

$$(23) \quad B(t) \leq 0 \quad \text{der} \quad t \leq c; \quad B(t) \geq 0 \quad \text{per} \quad t \geq c$$

perchè il caso

$$B(t) \geq 0 \quad \text{per} \quad t \leq c; \quad B(t) \leq 0 \quad \text{per} \quad t \geq c$$

si riduce al precedente mutando nella (22) il parametro λ in $-\lambda$.

Proveremo che si ha:

$$(VII)_1 \quad K(x, t) \geq 0 \quad \text{per} \quad a \leq x \leq c \quad \text{e} \quad a \leq t \leq c,$$

oppure $c \leq x \leq b$ e $c \leq t \leq b$;

$$(VII)_2 \quad K(x, t) \leq 0 \quad \text{per} \quad a \leq x \leq c \quad \text{e} \quad c \leq t \leq b,$$

oppure $c \leq x \leq b$ e $a \leq t \leq c$.

Se poniamo infatti

$$F(t) = \omega(t) - t \{ \varphi(b) - \varphi(t) \}$$

si ha

$$F'(t) = \varphi(t) - \varphi(b) < 0$$

perciò $F(t)$ è decrescente, ma essendo $F(b) = 0$ ne viene che per tutti i valori di $t < b$ si ha:

$$(24)_1 \quad \omega(t) - t \{ \varphi(b) - \varphi(t) \} > 0 \quad (t < b).$$

Da questa e dalle $(V)_1$, $(V)_2$, $(VI)_1$ segue che il nucleo $K(x, t)$ soddisfa le (VII) nella regione I.

Si ha analogamente

$$(24)_2 \quad t \varphi(t) + \omega(t) - \omega(a) > 0 \quad (t > a)$$

qualunque sia $t > a$, e perciò per le $(V)_1$, $(V)_3$, $(VI)_3$ segue che il nucleo $K(x, t)$ soddisfa le (VII) anche nella regione III.

Ci resta ora da provare $K(x, t) \geq 0$ nelle regioni II e IV; noi faremo la dimostrazione per la regione II, gli stessi ragionamenti valgono per la IV.

Essendo nella regione II, $H(c) > 0$, $B(t) < 0$, per verificare $K(x, t) > 0$ occorre per la $(VI)_2$ dimostrare la disuguaglianza

$$(25) \quad F(x, t) = \alpha_1(x) \left[\omega(t) - t \{ \varphi(b) - \varphi(t) \} \right] - \\ - H(x) \left[t \{ \varphi(c) - \varphi(t) \} + \omega(c) - \omega(t) \right] < 0$$

per

$$a \leq x \leq t \leq c.$$

Studiamo allora la $F(x, t)$ quando x, t verificano le (26).

Si ha

$$F'_i(x, t) = \alpha_1(x) [\varphi(t) - \varphi(b)] + H(x) [\varphi(t) - \varphi(c)]$$

$$F''_{i,t}(x, t) = \frac{1}{\theta(t)} [\alpha_1(x) + H(x)] = \frac{1}{\theta(t)} [H(c) - \alpha_3(x)],$$

e da quest'ultima per la (V)₃, $F''_{i,t}(x, t) > 0$ qualunque sia x .
Ne segue che $F'_i(x, t)$ è una funzione crescente con t , quando t varia tra x e c ; ma si ha:

$$F'_i(x, x) = \alpha_1(x) [\varphi(x) - \varphi(b)] + H(x) [\varphi(x) - \varphi(c)] = \\ = \varphi(x) [\alpha_1(x) + H(x)] - \varphi(b) \alpha_1(x) - \varphi(c) H(x) = \\ = \varphi(x) [\alpha_1(x) + H(x)] - H(c) \varphi(x) = \varphi(x) [\alpha_1(x) + H(x) - H(c)] = \\ = -\alpha_3(x) \varphi(x)$$

perciò $F'_i(x, x) < 0$ per $x < c$; è poi $F'_i(x, c) = \alpha_1(x) [\varphi(c) - \varphi(b)] > 0$, quindi $F'_i(x, t)$ quando si assegna ad x un valore minore di c , e t varia tra x e c , si annulla una sola volta in un punto (x, γ) con $x < \gamma < c$; ne viene che $F(x, t)$ quando t varia tra x e γ è decrescente, quanto t varia tra γ e c è crescente, sarà quindi provata la (25) se facciamo vedere che

$$F(x, x) \leq 0, \quad F(x, c) \leq 0.$$

E per dimostrare quest'ultime osserviamo che si ha:

$$F(x, x) \frac{B(t)}{H(c)} = K_{III}(x, x) > 0 \quad \text{quindi} \quad F(x, x) < 0; \quad \text{così pure è:}$$

$F(x, c) = \alpha_1(x) [\omega(c) - c \{ \varphi(b) - \varphi(c) \}]$, ed essendo $x < c$, per la (V)₂ e la (24) segue $F'(x, c) < 0$.

Restano così dimostrate le (VII).

b) *Le traccie del nucleo $K(x, t)$ sono tutte positive.*

Vogliamo dimostrare che si ha:

$$(VIII) \quad A_n = \int_a^b \dots \int_a^b K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) \dots K(s_n, s_1) ds_1 ds_2 \dots ds_n > 0, \quad (*)$$

noi faremo anzi vedere che nel quadrato Q si ha:

$$(27) \quad K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) \dots K(s_n, s_1) \geq 0.$$

Per $n = 1$ questa diventa $K(s_1, s_1) \geq 0$ ed è conseguenza della (VII)₁.

Supponiamo dunque $n > 1$ e notiamo che se uno dei numeri $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ è uguale ad a, c, b il prodotto che figura nel primo membro della (27) è nullo a motivo delle relazioni $K(a, t) = K(b, t) = K(c, t) = 0$. [Cfr. (V)₆].

Nessuno dei numeri $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ sia allora uguale ad a, c, b e verifichiamo che i due prodotti

$$P = K(s_{i-1}, s_i) K(s_i, s_{i+1}), \quad \bar{P} = K(s_{i-1}, \bar{s}_i) K(\bar{s}_i, s_{i-1})$$

qualunque siano s_i, \bar{s}_i (diversi da a, c, b) hanno lo stesso segno. Ciò è immediato se s_i e \bar{s}_i sono tutti e due insieme minori di c o tutti e due maggiori di c , ci resta da esaminare il caso

$$s_i < c, \quad c < \bar{s}_i.$$

I casi possibili sono:

- 1°) $s_{i-1} < c, \quad s_{i+1} < c$; è per le (VII) $P > 0, \quad \bar{P} > 0$;
- 2°) $s_{i-1} < c, \quad s_{i+1} > c$; è $P < 0, \quad \bar{P} < 0$;
- 3°) $s_{i-1} > c, \quad s_{i+1} < c$; è $P < 0, \quad \bar{P} < 0$;
- 4°) $s_{i-1} > c, \quad s_{i+1} > c$; è $P > 0, \quad \bar{P} > 0$.

Ne viene che per determinare il segno del prodotto (27), possiamo supporre i numeri s_2, s_3, \dots, s_n tutti maggiori di c , e siccome in questa ipotesi è $K(s_{i+1}, s_{i+2}) > 0$, ci resta da far vedere che è positivo il prodotto

$$K(s_1, s_2) K(s_n, s_1)$$

(*) E. GOURSAT. *Cours d'Analyse Mathématique* (4^a ed.), T III, p. 374. (Parigi, Gauthier-Villars).

dove $s_2 > c$, $s_n > c$; ma questa circostanza è conseguenza delle (VII).

c) Il nucleo $K(x, t)$ ammette autovalori.

Essendo per la (VIII) tutte le tracce del nucleo $K(x, t)$ positive [basterebbe $A_3 \neq 0$] ne viene per un noto teorema sulle equazioni integrali ⁽⁵⁾ che esso ammette autovalori; il teorema enunciato è così dimostrato.

8. AUTOVALORI PER L'EQUAZIONE

$$(28) \quad [\theta(x) \cdot y'(x)]' + \lambda [A(x) y(x)]' + \lambda [B_1(x) + \varepsilon B_2(x)] y(x) = 0.$$

a) Sia data l'equazione (28) ove supponiamo $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ funzioni continue di x in (α, β) , $a < c < b$, e la funzione $(x-c) B_2(x)$, senza essere identicamente nulla, non assuma valori di segno opposto in (a, b) ; vogliamo dimostrare che eccettuati al più tre valori della costante ε , esistono valori del parametro λ (autovalori) ai quali corrispondono integrali $y(x)$ dell'equazione (28), non identicamente nulli, che si annullano in a, c, b .

Le soluzioni dell'equazione (28) che soddisfano le condizioni prescritte sono (n.° 1) soluzioni dell'equazione integrale

$$(1) \quad y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

essendo il nucleo $K(x, t)$ definito dalle (III)₁, (III)₂, e dalle (IV) dei n.° 2 e 5, quando in luogo di $B(t)$ si sostituisca $B_1(x) + \varepsilon B_2(x)$.

Ne viene, a motivo delle (III) e (IV) stesse, che possiamo porre

$$(20) \quad K(x, t) = K_1(x, t) + \varepsilon K_2(x, t)$$

ove $K_1(x, t)$, $K_2(x, t)$ sono i nuclei delle equazioni integrali ana-

⁽⁵⁾ Cfr. E. GOURSAT, loc. cit. (1) p. 428; oppure G. VIVANTI, *Equazioni integrali lineari* (Hoepli, Milano, 1916) p. 168. Il teorema invocato si enuncia: condizione necessaria e sufficiente perchè il nucleo $K(x, t)$ dell'equazione integrale (1) ammetta autovalori è che siano nulle tutte le sue tracce a partire da A_3 .

loghe alla (I), cui soddisfano rispettivamente le soluzioni $y(x)$ delle equazioni differenziali

$$\begin{aligned} [\theta(x) y'(x)]'' + \lambda[A(x) y(x)]' + \lambda B_1(x) y(x) &= 0; \\ [\theta(x) y'(x)]'' + \lambda B_2(x) y(x) &= 0, \end{aligned}$$

che si annullano nei tre punti prefissati a, c, b .

Indicando con $A_n, A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$ le tracce n^{esime} dei nuclei $K(x, t), K_1(x, t), K_2(x, t)$ è per il teorema del n.º 6 precedente, $A_3^{(2)} > 0$, ed essendo

$$(30) \quad A_3 = A_3^{(1)} + C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon^2 + A_3^{(2)} \varepsilon^3$$

con C_1, C_2 costanti indipendenti da ε , ne segue che A_3 può annullarsi al più per tre valori di ε . Esclusi questi valori, per ogni altro ε è $A_3 \neq 0$, e in virtù del teorema citato sulle equazioni integrali, il nucleo $K(x, t)$ ammette autovalori; il teorema enunciato è così dimostrato ⁽⁶⁾.

b) Condizione necessaria e sufficiente perchè esistano autovalori qualunque sia la costante ε .

Notiamo che sulla funzione $B_1(x)$ noi non abbiamo fatta altra ipotesi che la continuità, e siccome per $\varepsilon = 0$ la (28) diventa:

$$(IX) \quad [\theta(x) y'(x)]'' + \lambda[A(x) y(x)]' + \lambda B_1(x) y(x) = 0,$$

ne segue che sarà dimostrata *in generale* l'esistenza di autovalori per la (IX) se si prova che l'equazione integrale (I) anche per $\varepsilon = 0$ ammette autovalori. Il teorema ora dimostrato in *a*) ci assicura però che per tutti i valori di ε di un intorno circolare del punto $\varepsilon = 0$ e di raggio δ , il valore $\varepsilon = 0$ al più eccettuato la (I) ammette autovalori, o ciò che fa lo stesso abbiamo dimostrato che *il determinante di FREDHOLM della (I), che indicheremo con $D(\lambda, \varepsilon)$, per ogni ε tale che sia $\varepsilon < \delta$, $\varepsilon \neq 0$, ammette almeno un corrispondente valore di λ tale che*

$$D(\lambda, \varepsilon) = 0;$$

dobbiamo quindi far vedere, perchè si possa affermare che sus-

⁽⁶⁾ È quasi superfluo osservare che per i tre valori di ε che annullano A_3 si può assicurare che non esistono corrispondenti autovalori ove si dimostri che è ancora $A_4 = A_5 = \dots = 0$.

siste il teorema in generale, che l'equazione

$$D(\lambda, 0) = 0$$

ammette radici.

Per la continuità di $\theta''(x)$, $A'(x)$, $B_1(x)$, $B_2(x)$ ne viene che il nucleo $K(x, t)$ della (I) che si calcola colle (III)₁, (III)₂, (IV) è una funzione continua di x e t lineare rispetto ad ε ; per risultati noti sulle equazioni integrali segue che il determinante di FREDHOLM della (I), $D(\lambda, \varepsilon)$ è una serie di potenze nelle due variabili λ, ε convergente assolutamente qualunque siano λ ed ε , ed esso avrà la forma

$$(31) \quad D(\lambda, \varepsilon) = D(\lambda, 0) + \varepsilon D_1(\lambda, \varepsilon)$$

ove $D_1(\lambda, \varepsilon)$ è anch'essa una serie di potenze di λ ed ε convergente assolutamente qualunque siano λ ed ε .

Supponiamo che comunque fissato un valore di $\varepsilon \neq 0$ nel cerchio $(0, \delta)$ la radice λ di modulo minimo dell'equazione $D(\lambda, \varepsilon) = 0$ si mantenga inferiore ad un numero finito R (⁷), ne viene dalla (31) che il modulo della trascendente intera $D(\lambda, 0)$ quando λ varia nel cerchio di centro 0 e raggio R assume valori arbitrariamente piccoli; esistono quindi valori di λ per i quali si ha $D(\lambda, 0) = 0$, e la (IX) ammette autovalori. Inversamente $D(\lambda, 0) = 0$, abbia una radice λ ; per il teorema di WEIERSTRASS (⁸) l'equazione $D(\lambda, \varepsilon) = 0$ quando ε varia in un cerchio $(0, \delta)$ di raggio δ sufficientemente piccolo ammette una radice $\lambda(\varepsilon)$ limitata; concludiamo quindi che *condizione necessaria e sufficiente perchè esistano autovalori per l'equazione (IX), senza eccezione, è che per ogni valore di ε in modulo minore di δ e diverso da 0, una delle radici dell'equazione $D(\lambda, \varepsilon) = 0$ [certamente esistente per a] si mantenga limitata.*

c) Il teorema di SCHMIDT (⁹) ci dà un limite inferiore per gli

(⁷) Fissato ε , la trascendente intera in λ , $D(\lambda, \varepsilon)$ può annullarsi a distanza finita soltanto per un numero finito di valori di λ .

(⁸) Cfr. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche*. Pisa, 1901, p. 197 e segg.

(⁹) Cfr. E. GOURSAT, loc. cit. (⁴), pp. 348-49.

autovalori di un'equazione integrale di seconda specie, mentre qui abbiamo bisogno, allo scopo delle nostre ricerche, di migliorare gli autovalori della (I); questo problema, l'altro di trovare se gli autovalori sono reali o complessi, e l'altro ancora della loro numerazione saranno oggetto di studi ulteriori.

Firenze, R. Università, Novembre 1930
