Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Vitali

Determinazione della superficie ad area minima nello spazio hilbertiano

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 157-163

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__157_0>

DETERMINAZIONE DELLA SUPERFICIE AD AREA MINIMA NELLO SPAZIO HILBERTIANO

(Saggio didattico di GIUSEPPE VITALI)

In questa nota individuo analiticamente tutte le superficie ad area minima dello spazio hilbertiano. I risultati più generali sono contenuti nei numeri 1, 2, 3 e 6.

I numeri 4 e 5 sono dedicati a ritrovare le note formule di WEIERSTRASS per le superficie dello spazio euclideo a tre dimensioni.

1. - Sia

$$f(u_1, u_2; t)$$

la determinante di una superficie, riferita ad un sistema isotermo

Si avrà

$$a_{1,1} = a_{2,2} \tag{1}$$

$$a_{1,2} = 0\,, \tag{2}$$

e quindi anche

$$a^{1,1} = a^{2,2} \tag{1'}$$

$$\alpha^{1,2} = 0\,. \tag{2'}$$

Si ha subito

$$\Sigma_{rs} a^{r,s} f_{r,s} = a^{1,1}(f_{1,1} + f_{2,2})\,,$$

e quindi la condizione perchè la superficie sia ad area minima è data da

$$f_{1,1} + f_{2,2} = 0\,. \tag{3}$$

Ora

$$f_{1,1} + f_{2,2} = f_{11} + f_{22} + (C^1_{11} + C^1_{22})\, f_1 + (C^2_{11} + C^2_{22})\, f_2\,.$$

Ma

$$C^1_{11} + C^1_{22} = a_{11,1}\, a^{1,1} + a_{22,1}\, a^{1,1} = 0\,,$$

perchè derivando la (2) rispetto ad u_2 e la (1) rispetto ad u_1 si ha

$$a_{12,2} + a_{22,1} = 0$$

$$a_{11,1} = a_{12,2}\,,$$

da cui

$$a_{11,1} + a_{22,1} = 0\,.$$

Analogamente si ha

$$C_{11}^2 + C_{21}^2 = 0\,,$$

e la (3) diventa

$$f_{11} + f_{22} = 0\,.$$

Si ha allora il

Teor. 1. - Se $f(u_1, u_2; t)$ è la determinante di una superficie riferita ad un suo sistema isotermo, condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie sia ad area minima è che la f sia funzione armonica delle u_1, u_2.

2. - Supponiamo che f sia determinante di una superficie ad area minima riferita ad un sistema isotermo. La f è armonica. Indichiamo con F una sua associata. Poniamo

$$W = \frac{1}{2}(f + iF) \quad \text{e} \quad W_0 = \frac{1}{2}(f - iF)\,.$$

La W è funzione analitica della variabile complessa

$$\tau = u_1 + i u_2\,,$$

e W_0 è funzione analitica della variabile

$$\tau_0 = u_1 - i u_2\,.$$

Abbiamo allora

$$f = W(\tau) + W_0(\tau_0)\,.$$

Ma, essendo le linee u_1, u_2 isoterme, le linee τ, τ_0 sono linee di lunghezza nulla, e quindi nel ds^2 devono essere nulli i coefficienti di $d\tau^2$ e di $d\tau_0^2$, ed in particolare deve essere

$$\int_g W'(\tau)^2 dt = 0\,, \tag{4}$$

dove W' indica derivata di W rispetto a τ.

Evidentemente la (4) è condizione necessaria e sufficiente perchè la

(5) $$f = W(\tau) + W_0(\tau_0)$$

sia determinante di una superficie ad area minima.

Infatti la (4) trascina la

$$\int_g W_0'(\tau_0)^2 dt = 0 ,$$

e quindi le u_1, u_2 sono coordinate isoterme delle quali la f è funzione armonica.

Si ha così il

TEOR. 2. – Condizione necessaria e sufficiente perchè V sia una superficie ad area minima è che esista una funzione analitica $W(\tau)$, a quadrato sommabile di t in g, soddisfacente alla (4) e per cui la (5) sia una determinante di V.

3. – TEOR. 3. – Se $W(\tau)$ è una funzione analitica e a quadrato sommabile di t in g, soddisfacente alla (4), se inoltre $\varphi(\tau)$ è una funzione analitica indipendente da t, la

$$\Omega(\tau) = \int_g \varphi W'(\tau) d\tau ,$$

(l' integrale essendo calcolato a partire da un punto qualunque, ma determinato, del piano complesso) soddisfa alla condizione

$$\int \Omega'(\tau)^2 dt = 0 ,$$

e quindi la

$$\Omega(\tau) + \Omega_0(\tau_0)$$

è determinante di una superficie ad area minima.

DIM. – Infatti

$$\int_g \Omega'(\tau)^2 dt = \varphi^2 \int_g W'(\tau)^2 dt = 0 .$$

4. – Supponiamo che W varii in uno spazio euclideo a 3 dimensioni, e che, avendo scelta una terna cartesiana ortogonale

$$\psi_1 , \psi_2 , \psi_3$$

di riferimento, siano

$$\alpha_1(\tau) , \alpha_2(\tau) , \alpha_3(\tau) \tag{6}$$

le coordinate di W' rispetto ad essa.

Se la superficie di determinate (5) è ad area minima, dovrà essere

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0 , \tag{4'}$$

perchè in questa relazione si traduce la (4).

Non può essere identicamente

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 ,$$

perchè allora W risulterebbe costante rispetto a τ, e la (5) rappresenterebbe un punto.

Dunque in tutti i casi una almeno delle (6) non è identicamente nulla. Supponiamo che α_1 non sia identicamente nulla.

Supposto che il rapporto $\alpha_2 : \alpha_1$ sia uguale ad una costante m, per la (4′) si avrebbe

$$(1 + m^2)\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 0$$

e quindi anche il rapporto $\alpha_3 : \alpha_1$ sarebbe uguale ad un'altra costante n, e si avrebbe

$$W' = \alpha_1(\psi_1 + m\psi_2 + m\psi_3) ,$$

con $1 + m^2 + n^2 = 0$, ossia

$$\mathrm{W}' = \alpha_1(X + i\,Y)$$

dove X ed Y sono due parametri reali.

Consegue che

$$W = \beta(X + i\,Y) + X_1 + i\,Y_1 ,$$

dove X_1 e Y_1 sono due altri parametri reali, e β è una funzione analitica di τ indipendente da t.

Allora

$$f = X_1 + \beta_1 X - \beta_2 Y ,$$

dove β_1 e β_2 sono la parte reale ed il coefficiente dell'imaginario di β.

Si conclude che la superficie che si considera appartiene al piano che passa per il punto X_1 e contiene i parametri X ed Y (non si può pensare che X ed Y siano linearmente dipendenti, perchè allora la f rappresenterebbe un insieme di punti giacenti sopra una retta, e quindi non una superficie).

Supponiamo ora che la superficie che si considera non sia piana; allora il rapporto $\alpha_2 : \alpha_1$ è una funzione analitica non costante di τ.

Se

$$\lambda_1(\sigma), \lambda_2(\sigma), \lambda_3(\sigma)$$

sono tre funzioni analitiche di σ, per le quali sia

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0,$$

e tali che il rapporto di due di esse non sia costante, esiste una funzione analitica

$$\tau = \tau(\sigma)$$

che soddisfa alla relazione

$$\alpha_2(\tau) : \alpha_1(\tau) = \lambda_2(\sigma) : \lambda_1(\sigma). \tag{7}$$

Allora passando dalla variabile τ alla variabile σ, si ha che le coordinate di $\frac{dW}{d\sigma}$ diventano

$$\beta_i(\sigma) = \alpha_i(\tau(\sigma))\,\tau' \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dove τ' indice la derivata di τ rispetto a σ.

Ora posto

$$\alpha_1(\tau(\sigma)) : \lambda_1(\sigma) = k(\sigma)$$

si ha

$$\beta_1 = k \cdot \lambda_1 \cdot \tau', \quad \beta_2 = k \cdot \lambda_2 \cdot \tau',$$

e, se si tien conto delle relazioni

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 0 \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0,$$

si ha

$$\beta_3^2 = (k \cdot \lambda_3 \cdot \tau')^2,$$

da cui

$$\beta_3 = -k \cdot \lambda_3 \cdot \tau',$$

e, posto

$$h(\sigma) = k \cdot \tau' ,$$

risulta che le coordinate di $\frac{dW}{d\sigma}$ sono

$$h \cdot \lambda_1 , \quad h \cdot \lambda_2 , \quad \pm h \cdot \lambda_3 .$$

Poniamo ora

$$P_1 = \lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2 + \lambda_3 \cdot \psi_3 \quad \text{e} \quad P_2 = \lambda_1 \cdot \psi_1 + \lambda_2 \cdot \psi_2 - \lambda_3 \cdot \psi_3$$

ed abbiamo

$$W(\tau(\sigma)) = \int h \cdot P_1 \cdot d\sigma . \tag{8}$$

oppure

$$W(\tau(\sigma)) = \int h \cdot P_2 \cdot d\sigma . \tag{9}$$

Si ha allora il

Teor. 4. – **Ogni superficie ad area minima, non piana ed appartenente ad uno spazio euclideo a tre dimensioni ha una determinante della forma**

$$\Omega(\sigma) + \Omega_0(\sigma_0) ,$$

dove $\Omega(\sigma)$ è data dal secondo membro di una delle (8) e (9), in cui la h, e le λ sono funzioni analitiche di σ, queste ultime tali che il rapporto di due di esse non sia costante e soddisfacenti alla relazione $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$, e le ψ sono tre parametri normali ed ortogonali assegnati.

5. – Poniamo

$$\lambda_1 = 1 - \sigma^2 , \quad \lambda_2 = i(1 + \sigma^2) , \quad \lambda_3 = 2\sigma .$$

Queste λ soddisfano alle condizioni richieste nel teor. prec. Inoltre per esse $P_2(-\sigma) = P_1(\sigma)$, ed il teor. prec. diventa il noto

Teor. di Weierstrass. — **Ogni superficie ad area minima, non piana ed appartenente ad uno spazio euclideo a tre dimensioni ha una determinante della forma**

$$\Omega(\sigma) + \Omega_0(\sigma_0) ,$$

dove

$$\Omega(\sigma) = \int h \cdot P \cdot d\sigma,$$

dove h è una funzione analitica di σ e

$$P = (1 - \sigma^2)\psi_1 + i(1 + \sigma_2)\psi_2 + 2\sigma \cdot \psi_3 .$$

le ψ formando un sistema normale ed ortogonale assegnato.

6. – In generale la determinazione delle superficie ad area minima si riduce a trovare tutte le funzioni W analitiche di τ e a quadrato sommabile di t, per le quali sia soddisfatta la (4), ossia per cui, essendo

$$\alpha_r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

le coordinate rispetto ad un cartesiano ortogonale

$$\psi_r \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

della W' si abbia

$$\Sigma_r \alpha_r^2 = 0 .$$

Ora basta sceglier delle funzioni analitiche

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

in modo che la serie

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots$$

converga verso una funzione analitica $\varphi(\tau)$ (1) e poi prendere $\alpha_1 = \sqrt{-\varphi}$.

Si potrebbero usare considerazioni analoghe a quelle del n. 4 per mostrare che per ogni superficie ad area minima, si può ottenere che due coordinate di W' risultino proporzionali a due funzioni analitiche assegnate.

(1) Per questo basterebbe che la serie

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots$$

risultasse convergente uniformemente.