Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

T. Levi-Civita

Sui potenziali newtoniani dovuti a distribuzioni che si estendono illimitatamente

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 1 (1930), p. 133-156

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__133_0>

SUI POTENZIALI NEWTONIANI DOVUTI A DISTRIBUZIONI CHE SI ESTENDONO ILLIMITATAMENTE

di T. LEVI-CIVITA *a Roma*

È classico il comportamento asintotico dei potenziali newtoniani dovuti a masse (positive o negative, comunque distribuite, ma) tutte situate a distanza finita. Ove sia $U(M)$ un tale potenziale e si designi con λ il raggio vettore del punto potenziato M (a partire da una origine O arbitrariamente prefissata), si ha notoriamente

$$\text{(I)} \qquad \lim_{M \to \infty} (\lambda U) = -\lim_{M \to \infty} \left(\lambda^2 \frac{dU}{d\lambda} \right) = m,$$

m designando la somma di tutte le masse potenzianti.

Che cosa accade quando si tratta invece di distribuzioni continue, spaziali o superficiali, le quali si estendono fino all' ∞ ? beninteso nell'ipotesi che la densità di tali distribuzioni si attenui abbastanza rapidamente (coll'allontanarsi del punto potenziante P da O) perchè conservino senso gli integrali che definiscono la massa e il potenziale.

Si è naturalmente indotti a pensare (e la conclusione fu certo più di una volta sfruttata in applicazioni concrete) che, nelle condizioni suaccennate, seguiti a valere il comportamento asintotico espresso dalle (I).

Tuttavia tale circostanza non si trova, per quanto mi consta, enunciata, nè tanto meno dimostrata nella pur così vasta letteratura concernente la teoria del potenziale [1]. Viceversa è semplice,

[1] Senza alcuna pretesa di completezza, ricorderò, oltre alle eccellenti esposizioni che si trovano in moderne opere comprensive, quali quelle dovute a JORDAN, PICARD, APPELL, GOURSAT, KIRCHHOFF, FRANK e v. MISES (già RIE-

se pure non immediato, il pervenirvi col dovuto rigore. Mi permetto pertanto di sviluppare qui i vari piccoli accorgimenti che servono allo scopo.

1. – Riduzione della questione ai suoi termini essenziali.

Giova prendere in considerazione una sfera T di raggio a, col centro nell'origine O delle coordinate, e scindere le masse potenzianti interne a T da quelle esterne. Detta m_1 la somma delle masse interne, sarà, per l'ipotesi che esista (e sia ben definita attraverso gli integrali delle densità spaziali e superficiali) la massa totale m

$$\lim_{a \to \infty} m_1 = m . \tag{1.1}$$

Ove si ponga corrispondentemente

$$U(M) = U_1(M) + U_2(M) , \tag{1.2}$$

essendo U_1 il potenziale proveniente dalle masse interne a T e U_2 quello proveniente dalle masse esterne, potremo ritenere, in base alle premesse, U_1 e U_2 funzioni finite e continue del punto potenziato M per qualsiasi posizione di M situata al finito; e, salvo le note discontinuità attraverso eventuali superficie potenzianti, lo stesso potrà dirsi delle loro derivate prime (rispetto alle coordinate cartesiane di M), tali derivate essendo conseguibili mediante materiale derivazione sotto il segno.

Ad U_1 sarà poi senz'altro applicabile la (I), con che

$$\lim_{M \to \infty} (\lambda U_1) = -\lim_{M \to \infty} \left(\lambda^2 \frac{dU_1}{d\lambda} \right) = m_1 . \tag{1.3}$$

MANN–WEBER), ecc., qualche trattato speciale dell' ultimo cinquantennio : BETTI (Pisa, Nistri, 1879), POINCARÉ (Paris, Naud, 1889), KORN (Berlin, Dümmlers, 1899), WANGERIN (Berlin, de Gruyter, 1921), KELLOGG (Berlin, Springer, 1929), MAGGI (Milano, Hoepli, 1930), MACMILLAN (New York, McGraw-Hill, 1930); nonchè gli articoli dedicati alla teoria del potenziale nella *Enz. der math. Wiss.*: BURCKHARDT–MEYER (II, A, 7, b) e LICHTENSTEIN (II, C, 3).

Per giustificare la nostra affermazione, basterà ovviamente stabilire, attesa la (1 . 1), che

$$(1\,.\,4)\qquad \lim_{a\to\infty}\left[\lim_{M\to\infty}(\lambda\,U_2)\right]=-\lim_{a\to\infty}\left[\lim_{M\to\infty}\left(\lambda^2\frac{dU_2}{d\lambda}\right)\right]=0\,.$$

Dovendosi, in questi passaggi al limite, *prima* far allontanare indefinitamente M, cioè far tendere λ all'∞, e *poi* far crescere indefinitamente a, è lecito di supporre, in $\lambda\,U_2$, $\lambda^2\dfrac{dU_2}{d\lambda}$, λ già maggiore di a, anzi soddisfacente a eventuali ulteriori limitazioni *nello stesso senso*, cioè, come si suol dire in modo comprensivo, abbastanza grande.

Ciò posto, *rimarranno in particolare provate le* (1 . 4), *se riconosceremo che, per* λ *abbastanza grande, al crescere indefinito di* a, *sia* $\lambda\,U_2(M)$ *che* $\lambda^2\dfrac{d\,U_2(M)}{d\lambda}$ *convergono a zero.*

2. – Specificazione delle ipotesi concernenti la densità e le eventuali superficie potenzianti.

Nelle considerazioni che seguono gioverà indicare con S la porzione di campo potenziante a *esterna* T, e con $\mu(P)$ la densità della distribuzione di volume, da supporsi finita, generalmente continua e integrabile fino all'∞.

Posto al solito

$$r=\overline{MP}\,,$$

la U_2 comprenderà un termine

$$(2\,.\,1)\qquad V(M)=\int_S\frac{\mu}{r}\,dS\,,$$

e inoltre termini provenienti dalle distribuzioni superficiali estendentisi all'∞ (se ve ne ha).

Per una generica di tali superficie potenzianti sia σ la porzione esterna a T e $\nu(P)$ la densità superficiale, finita, generalmente continua e integrabile anche all'∞. Posto

$$W(M) = \int_\sigma \frac{\nu}{r} d\sigma , \tag{2.2}$$

avremo

$$U_2 = V + \Sigma W , \tag{2.3}$$

la somma corrispondendo alle varie superficie potenzianti (se esistono), che supponiamo comunque in numero finito.

A norma della (2.3), *ci troviamo ricondotti a verificare che, supposto* λ *abbastanza grande, convergono separatamente a zero, al crescere indefinito di* a, *sia i prodotti*

$$\lambda V , \quad \lambda^2 \frac{dV}{d\lambda} ,$$

provenienti dalla distribuzione spaziale, sia i prodotti

$$\lambda W , \quad \lambda^2 \frac{dW}{d\lambda}$$

provenienti da una generica delle distribuzioni superficiali estendentisi all' ∞ .

Esamineremo singolarmente queste quattro espressioni nei §§ seguenti. Prima conviene introdurre esplicitamente alcune poche ipotesi complementari di comportamento analitico-geometrico (circa le densità e le eventuali superficie potenzianti σ) che ci avverrà di invocare ripetutamente nel corso della discussione.

Cominciamo dalle densità. Già abbiamo preliminarmente supposto che $\mu(P)$ (densità cubica) e $\nu(P)$ (densità superficiale d'una generica superficie potenziante σ) siano integrabili fino all' ∞. Vogliamo riferirci ai casi, per così dire correnti, in cui tale integrabilità si desume dal fatto che μ e ν si annullano, al crescere indefinito di ρ (raggio vettore del punto potenziante P), di ordine abbastanza elevato.

In modo preciso sostituiremo alla semplice ipotesi di integrabilità all' ∞ le condizioni un po' più restrittive

$$\mu = \frac{\mu_1}{\rho^{3+\alpha}} , \tag{2.4}$$

$$\nu = \frac{\nu_1}{\rho^{2+\alpha}} , \tag{2.5}$$

designando α una costante *positiva* (del resto comunque piccola) e μ_1, ν_1 due funzioni del punto potenziante P che restano finite anche se P si allontana indefinitamente (in S, o sopra σ rispettivamente).

La (2 . 4), come risulta da noti canoni di calcolo integrale, assicura l'integrabilità sia della funzione μ, sia di $\frac{\mu}{r}$ anche entro campi S che si estendono illimitatamente.

La (2 . 5) adempie allo stesso ufficio per una superficie potenziante σ, almeno se le normali non subiscono troppo forti oscillazioni di direzione quando si procede verso l' ∞. Daremo forma matematica a questa condizione introducendo le ipotesi seguenti:

a) una generica σ, esterna per definizione alla sfera T di raggio a, può, per a abbastanza grande, essere posta in corrispondenza biunivoca colla sua proiezione ortogonale τ sopra un qualche piano $\bar{\omega}$ per O in modo che, detti P e Q due punti corrispondenti, $d\sigma$ un elemento di superficie potenziante circostante a P, $d\tau$ l'elemento piano corrispondente, circostante Q, e posto

$$d\sigma = h\,d\tau\,,$$

h risulti funzione di P (o, ciò che è lo stesso, di Q) finita e generalmente continua anche quando P si allontana indefinitamente;

b) detta b la minima distanza dei punti del campo τ da O, il rapporto $\frac{a}{b}$ (necessariamente ≥ 1, in quanto b è proiezione su $\bar{\omega}$ di un qualche raggio vettore di lunghezza a) non supera mai, *anche al crescere indefinito* di a, una ben determinata costante positiva k;

c) esiste più di un piano $\bar{\omega}$ per O (almeno due) su cui la proiezione τ di σ ottempera alle condizioni *a)* e *b)*.

Ciò premesso, avvaliamoci in primo luogo della (2 . 5) e della *a)* scrivendo

$$\nu\,d\sigma = h\nu_1 \frac{d\tau}{\rho^{2+\alpha}}\,.$$

Notiamo poi che, indicando, come si è detto, con Q la proiezione di P su $\bar\omega$ e con N quella di M, le distanze

$$\overline{OQ} = \zeta\,, \quad \overline{NQ} = \Delta$$

si presentano quali proiezioni su $\bar\omega$ di $\rho = \overline{OP}$, $r = \overline{MP}$ rispettivamente, talchè in ogni caso

$$\frac{\zeta}{\rho} \leq 1\,, \quad \frac{\Delta}{r} \leq 1\,.$$

Dalla precedente espressione di $\nu d\sigma$ segue ulteriormente

$$\frac{\nu d\sigma}{r} = h\nu_1 \left(\frac{\zeta}{\rho}\right)^{2+\alpha} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \frac{d\tau}{\zeta^{2+\alpha}\Delta}\,, \tag{2.6}$$

dove il differenziale $\dfrac{d\tau}{\zeta^{2+\alpha}\Delta}$ è integrabile anche in campi del piano $\bar\omega$ che si estendono illimitatamente, mentre gli altri fattori rimangono tutti finiti. Di qui si desume intanto la integrabilità della funzione $\dfrac{\nu}{r}$ sopra la corrispondente σ. Riprenderemo la (2.6) al § 4.

3. - Limitazione di λV.

Dalle (2.1) e (2.4), ove si indichi con p un numero positivo non inferiore al massimo di μ_1 entro S, segue immediatamente

$$|\lambda V| \leq p\lambda \int_S \frac{dS}{\rho^{3+\alpha} r}\,,$$

dove

$$r^2 = \overline{MP}^2 = \lambda^2 + \rho^2 - 2\lambda\rho\cos\theta\,, \tag{3.1}$$

essendo θ l'angolo dei due raggi vettori OM (di lunghezza λ) e OP (di lunghezza ρ).

Sia S_1 il campo esterno alla sfera T di centro O e raggio a. Per ipotesi, S appartiene interamente ad S_1, o coincide addirittura con S_1. Comunque (la funzione sotto il segno in $\displaystyle\int_S \frac{dS}{\rho^{3+\alpha} r}$

essendo positiva)
$$\int_S \frac{dS}{\rho^{3+\alpha} r} \leq \int_{S_1} \frac{dS}{\rho^{3+\alpha} r} .$$

Adottando per variabili correnti di integrazione le coordinate polari ρ, θ, θ_1 di P, riferite ad OM per asse polare, si ha ovviamente, in quanto anche r è indipendente dalla coordinata θ_1 e $dS = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\theta_1$,

$$\int_{S_1} \frac{dS}{\rho^{3+\alpha} r} = 2\pi \int_a^\infty \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} \int_0^\pi \frac{\sin\theta \, d\theta}{r} ;$$

quindi

(3 . 2)
$$|\lambda V| \leq 2\pi p H ,$$

qualora, per brevità di scrittura, si ponga

(3 . 3)
$$H \lambda = \int_a^\infty \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} \int_0^\pi \frac{\sin\theta \, d\theta}{r} .$$

Questo integrale doppio si valuta senza difficoltà. In primo luogo si ha dalla (3 . 1), in quanto si pensi r funzione di θ, trattando ρ e λ quali parametri,

$$dr = \lambda \rho \frac{\sin\theta \, d\theta}{r} ,$$

e quindi

$$\lambda \int_0^\pi \frac{\sin\theta \, d\theta}{r} = \frac{1}{\rho} \Big[r \Big]_0^\pi = \frac{1}{\rho} \Big\{ \lambda + \rho - |\lambda - \rho| \Big\} = \begin{cases} 2 & (\rho \leq \lambda) \\ \dfrac{2\lambda}{\rho} & (\rho \geq \lambda) . \end{cases}$$

Con ciò l'espressione (3 . 3) di H, ove si scinda l'intervallo $a \vdash\!\dashv \infty$, in cui si deve integrare rispetto a ρ, nei due $a \vdash\!\dashv \lambda$ e $\lambda \vdash\!\dashv \infty$, può essere scritta

$$H = 2 \int_a^\lambda \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} + 2\lambda \int_\lambda^\infty \frac{d\rho}{\rho^{2+\alpha}} .$$

L' effettiva integrazione dà

$$H = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{a^\alpha} - \frac{1}{\lambda^\alpha}\right) + \frac{2}{1+\alpha}\frac{1}{\lambda^\alpha} = \frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{a^\alpha} - \frac{1}{1+\alpha}\frac{1}{\lambda^\alpha}\right) \leq \frac{2}{\alpha a^\alpha}.$$

Segue quindi dalla (3 . 2)

$$(3.4) \qquad |\lambda V| \leq \frac{4\pi p}{\alpha}\frac{1}{a^\alpha},$$

la quale assicura che λV *tende a zero con* $\frac{1}{a}$ *d'ordine non superiore a* α, c. d. d.

4. - Studio di λW e conseguente limitazione.

Per riconoscere che W ha lo stesso comportamento asintotico di V si partirà dalla (2 . 2) tenendo conto della (2 . 6), con che λW si presenta sotto la forma

$$\lambda W = \lambda \int_\tau h \nu_1 \left(\frac{\zeta}{\rho}\right)^{2+\alpha}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{d\tau}{\zeta^{2+\alpha}\Delta}.$$

Indichiamo con q una costante positiva non inferiore al massimo valore assoluto (per ipotesi finito) del prodotto $h\nu_1$ al variare di Q in τ. E sia b la minima distanza dei punti Q del campo (piano) τ da O. Chiamiamo Γ la regione del piano $\tilde{\omega}$ esterna alla circonferenza di centro O e raggio b. Per definizione di b, il campo τ è necessariamente parte di Γ, o tutt'al più coincide con Γ stessa. Si potrà quindi scrivere, facendo apparire il raggio vettore $u = \overline{ON}$ (N proiezione del punto potenziato M sul piano $\tilde{\omega}$) e tenendo presente che i rapporti $\frac{\zeta}{\rho}$, $\frac{\Delta}{r}$ sono entrambi ≤ 1,

$$(4.1) \qquad |\lambda W| \leq q\frac{\lambda}{u}K,$$

dove

$$(4.2) \qquad K = u\int_\Gamma \frac{d\Gamma}{\zeta^{2+\alpha}\Delta}.$$

L' espressione della distanza Δ dei due punti N e Q, ove si indichi con φ l'angolo $N\widehat{O}Q$, risulta da

$$\Delta^2 = u^2 + \zeta^2 - 2u\zeta\cos\varphi, \tag{4.3}$$

mentre

$$d\Gamma = \zeta d\zeta\, d\varphi.$$

A questo punto sarà bene rilevare che, se OM *non* è normale al piano $\bar{\omega}$, anzi più precisamente se l'inclinazione di OM sulla direzione normale si mantiene superiore ad un angolo ben determinato ψ, il rapporto $\frac{\lambda}{u}$ non supera $\frac{1}{\sin\psi}$.

Assumiamo per ψ l'angolo che il piano di proiezione $\bar{\omega}$ forma con $\bar{\omega}_1$, chiamando $\bar{\omega}_1$ un altro di quei piani per O (in virtù dell' ipotesi b), ne esiste almeno uno) che si può far corrispondere a σ colle stesse modalità ammesse per $\bar{\omega}$, e poniamo

$$\frac{1}{\sin\psi} = k_1,$$

con che k_1 rappresenta una ben determinata costante positiva *(maggiore dell' unità)*.

Saremo così autorizzati a ritenere incondizionatamente, cioè per qualsiasi posizione di M,

$$\frac{\lambda}{u} \leq k_1, \tag{4.4}$$

coll' intesa che u (lunghezza della proiezione di OM) va riferita, per una data posizione del punto potenziato M, a $\bar{\omega}$, oppure a $\bar{\omega}_1$.

Come s'è detto fin da principio, λ va sempre supposto abbastanza grande, in particolare $\geq a$. Abbiamo perciò quale corollario della (4 . 4)

$$u \geq \frac{a}{k_1}, \tag{4.5}$$

e a fortiori, ricordando da § 2, b) che $b \leq a$,

$$u \geq \frac{b}{k_1}. \tag{4.6}$$

Assieme a queste disuguaglianze dovremo altresì invocare ripetutamente l'ipotesi $b)$ del § 2, ossia

$$\frac{a}{b} \leq k\,. \tag{4.7}$$

Torniamo ora all'integrale K di cui vogliamo procurarci un limite superiore al crescere indefinito di a (per ogni λ abbastanza grande).

Per la (4.6) $k_1 u$ è $\geq b$ e si trova quindi compreso nell'intervallo $b \vdash\!\dashv \infty$, che è, per l'integrale K, esteso al campo Γ, il campo di variabilità dell'argomento ζ.

Si può quindi scindere $b \vdash\!\dashv \infty$ nei due intervalli $b \vdash\!\dashv k_1 u$ e $k_1 u \vdash\!\dashv \infty$ e scrivere in conformità

$$K = K_1 + K_2 \tag{4.8}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} K_1 &= u \int_b^{k_1 u} \frac{d\zeta}{\zeta^{1+\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta}\,, \\ K_2 &= u \int_{k_1 u}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^{1+\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Delta}\,. \end{aligned}\right. \tag{4.9}$$

Ponendo in K_2

$$\zeta = u\,s$$

e assumendo l'argomento s (che è un numero puro) al posto di ζ, quale variabile corrente di integrazione, si ha, attesa anche la (4.3),

$$K_2 = \frac{1}{u^{\alpha}} \int_{k_1}^{\infty} \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + s^2 - 2s\cos\varphi}}\,.$$

La funzione sotto il segno resta finita nel campo di integrazione, perchè, essendo $s \geq k_1 > 1$,

$$1 + s^2 - 2s\cos\varphi \geq (s-1)^2 \geq (k_1 - 1)^2 > 0\,;$$

ed è integrabile fino all'∞, poichè si annulla, al crescere indefinito di s d'ordine > 1 (essendo $\alpha > 0$).

L' integrale doppio è dunque convergente ed ha un valore costante k_2 dipendente unicamente da k_1. Perciò

$$K_2 = \frac{k_2}{u^\alpha},$$

che combinata colla (4 . 5), dà luogo alla disuguaglianza

$$K_2 \leq \frac{k_1{}^\alpha k_2}{a^\alpha}. \tag{4 . 10}$$

Per riconoscere il comportamento di K_1 conviene fare l' inversione

$$\zeta = \frac{b}{\rho},$$

e insieme l' analoga trasformazione del parametro u definita da

$$u = \frac{b}{\lambda'},$$

con che i nuovi argomenti ρ', λ' sono entrambi numeri puri. Si ha poi

$$\Delta = \frac{b}{\lambda' \rho'} r',$$

le quante volte si ponga per brevità

$$r'^2 = \lambda'^2 + \rho'^2 - 2\lambda' \rho' \cos \varphi. \tag{4 . 11}$$

L' espressione (4 . 9) di K_1 assume così l' aspetto

$$K_1 = \frac{1}{b^\alpha} \int_{\frac{\lambda'}{k_1}}^{1} \rho'^\alpha d\rho' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r'}.$$

È chiaro intanto che, se nell' integrale doppio testè scritto (in cui la funzione sotto il segno è positiva) si sostituisce al limite inferiore lo zero, il valore dell' integrale aumenta.

Essendo d' altra parte, per la (4 . 7),

$$\frac{1}{b} \leq \frac{k}{a},$$

si potrà scrivere

$$K_1 \leq \frac{k^\alpha}{a^\alpha} K' \tag{4.12}$$

con

$$K' = \int_0^1 \rho'^\alpha d\rho' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r'} . \tag{4.13}$$

Questo integrale doppio K' dipende dal parametro λ' (che figura in r'). La funzione sotto il segno può divenire infinita nel campo di integrazione, ma rimane sempre integrabile comunque vari λ', per valori positivi, e dà luogo ad una funzione continua di λ' stesso [1]. Perciò il limite di K' al convergere di λ' a zero si può conseguire ponendo addirittura $\lambda' = 0$ sotto il segno, con che risulta, attesa la (4 . 11),

$$\lim_{\lambda' \to 0} K' = \int_0^1 \rho'^\alpha d\rho' \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho'} = 2\pi \int_0^1 \frac{d\rho'}{\rho'^{1-\alpha}} = \frac{2\pi}{\alpha} . \tag{4.14}$$

[1] Si può rendersene conto, sia badando alla circostanza che l'integrale interno è ellittico e appoggiandosi sul noto comportamento analitico dei periodi in funzione dei moduli; sia considerando un piano rappresentativo delle coordinate polari ρ', φ. In questo piano siano: O' l'origine; P' il punto generico di coordinate ρ', φ; Λ' il punto dell'asse polare che dista λ' da O'; σ' il campo circolare di centro O' e raggio 1; $d\sigma' = \rho' d\rho' d\varphi$. Il nostro integrale (4 . 13) si può scrivere sotto la forma

$$K' = \int_{\sigma'} \frac{d\sigma'}{\overline{O'P'}^{1-\alpha} \, \overline{\Lambda' P'}}$$

con singolarità bipolare nei punti O' e Λ'.

Si sa che, quando la somma degli esponenti delle inverse delle distanze è inferiore a 2 ($2 - \alpha$ nel caso nostro) l'integrale è funzione *continua* del punto parametrico Λ' anche se questo tende a coincidere coll'altro polo O'. Cfr. p. es. GOURSAT, *Cours d'analyse*, T. III, p. 363 della terza edizione (Paris, Gauthier-Villars, 1928), oppure KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, p. 262 della seconda edizione (Braunschweig, Vieweg, 1928).

Abbiamo finalmente tutti gli elementi per riconoscere che λW può rendersi piccolo a piacere al crescere di a.

Le (4 . 1), (4 . 4) e (4 . 8) danno in primo luogo

$$|\lambda W| \leq q k_1 (K_1 + K_2).$$

Per K_1 vale la limitazione (4 . 12) e per K_2 la (4 . 10). Si ha quindi

$$|\lambda W| \leq \frac{q k_1}{a^\alpha} \left\{ k^\alpha K' + k_1{}^\alpha k_2 \right\},$$

q, k, k_1 e k_2 sono costanti positive, K' è, come si è rilevato or ora, una funzione continua di $\lambda' = \frac{b}{u}$. In virtù della (4 . 4), ossia $u \geq \frac{\lambda}{k_1}$, al crescere indefinito di λ, lo stesso accade di u, e quindi $\lambda' \to 0$. Per la (4 . 14), K' tende a $\frac{2\pi}{\alpha}$. Ne consegue che, per λ abbastanza grande (e quindi λ' abbastanza piccolo), K' è vicino quanto si vuole a $\frac{2\pi}{\alpha}$, in particolare per es. $< \frac{4\pi}{\alpha}$; il che, introdotto nella precedente disuguaglianza, dà

$$(4.15) \qquad |\lambda W| \leq \frac{q k_1}{a^\alpha} \left\{ k^\alpha \frac{4\pi}{\alpha} + k_1{}^\alpha k_2 \right\}.$$

Questa assicura che (per λ abbastanza grande) al crescere indefinito di a anche λW converge a zero, non meno rapidamente di $\frac{1}{a^\alpha}$.

5. - Limitazione di $\lambda^2 \frac{dV}{d\lambda}$.

In base alla (2 . 4) che assicura la integrabilità fino all' ∞, il potenziale spaziale V si comporta nei riguardi della derivazione (rispetto alle coordinate del punto potenziato M) come nel caso ordinario in cui il campo di integrazione è limitato. In particolare è lecito derivare (una volta) sotto il segno, e si ha senz'altro, avendo riguardo alla (3 . 1) e alla (2 . 4),

$$\lambda^2 \frac{dV}{d\lambda} = -\lambda^2 \int_S \mu_1 \frac{\lambda - \rho\cos\theta}{r} \frac{dS}{\rho^{3+\alpha} r^2}.$$

$|\lambda - \rho\cos\theta|$, come lunghezza della proiezione di MP sulla OM, è in ogni caso $\leq \overline{MP} = r$, quindi il rapporto $\frac{\lambda - \rho\cos\theta}{r}$ non supera l'unità in valore assoluto. Ne segue senz'altro la limitazione

$$\left|\lambda^2 \frac{dV}{d\lambda}\right| \leq p\lambda^2 \int_S \frac{dS}{\rho^{3+\alpha} r^2},$$

dove, come al § 3, p designa una costante positiva non inferiore al massimo di μ_1 in S. Procedendo ancora come al § 3 si trova subito

$$\left|\lambda^2 \frac{dV}{d\lambda}\right| \leq 2\pi p I, \tag{5.1}$$

dove

$$I = \int_a^\infty \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} \int_0^\pi \frac{\lambda^2 \sin\theta \, d\theta}{r^2}.$$

Qui pure può essere eseguita l'integrazione interna, ottenendosi

$$I = 2\lambda \int_a^\infty \frac{d\rho}{\rho^{2+\alpha}} \log \frac{\lambda + \rho}{|\lambda - \rho|}. \tag{5.2}$$

Assumiamo come variabile corrente di integrazione, in luogo di ρ,

$$s = \frac{\lambda}{\rho},$$

con che

$$ds = -\frac{\lambda}{\rho^2} d\rho,$$

e l' espressione di I diviene

$$I = \frac{2}{\lambda^\alpha} \int_0^{\lambda/a} s^\alpha \log \frac{s+1}{|s-1|} ds .$$

Per la limitazione asintotica che ci interessa, possiamo supporre λ abbastanza grande, in particolare p. es. $> 2a$, con che l' intervallo di integrazione $0 \vdash\!\dashv \lambda/a$ comprende il valore $s = 2$ e si può quindi scindere nei due tratti $0 \vdash\!\dashv 2$ e $2 \vdash\!\dashv \lambda/a$. Scriveremo in conformità

$$I = I_1 + I_2 \tag{5.3}$$

con

$$I_1 = \frac{2}{\lambda^\alpha} \int_0^2 s^\alpha \log \frac{s+1}{|s-1|} ds$$

e

$$I_2 = \frac{2}{\lambda^\alpha} \int_2^{\lambda/a} s^\alpha \log \frac{s+1}{s-1} ds . \tag{5.4}$$

L' integrale che figura nella espressione di I_1 è una costante positiva ben determinata (dipendente unicamente da α) che indicheremo per semplicità di scrittura con $\alpha_1/2$. La precedente espressione di I_1 assume così l' aspetto

$$I_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda^\alpha} ,$$

donde, limitandosi a tener conto che $\lambda > a$, la disuguaglianza

$$I_1 < \frac{\alpha_1}{a^\alpha} . \tag{5.5}$$

Prima di passare ad I_2, facciamo per un momento le posizioni

$$s' = \frac{1}{s}$$

e

$$f(s') = \log \frac{s+1}{s-1} = \log \frac{1+s'}{1-s'} .$$

Tale $f(s')$ è manifestamente una funzione dell'argomento s', regolare per $|s'|<1$, e in particolare nell'intervallo reale $0 \vdash\!\dashv 1/2$. Essa si annulla per $s'=0$ ed ha la derivata

$$f'(s') = \frac{1}{1+s'} + \frac{1}{1-s'} = \frac{2}{1-s'^2}$$

il cui massimo nel suddetto intervallo vale $8/3$.

La formula dell'aumento finito, applicata ad $f(s')$, a partire dal valore $s'=0$, dà

$$f(s') = s' f'(\overline{s})$$

con $\overline{s}$ compresa fra 0 ed s'. Per $s' \leq \frac{1}{2}$ ne desumiamo

$$f(s') \leq \frac{8s'}{3},$$

ossia, per $s \geq 2$,

$$\log\frac{s+1}{s-1} \leq \frac{8}{3}\,\frac{1}{s}.$$

Usando questa disuguaglianza, si ha dalla (5 . 4)

$$|I_2| \leq \frac{16}{3\lambda^\alpha}\int_2^{\lambda/a} s^{\alpha-1}\,ds = \frac{16}{3\alpha}\left\{\frac{1}{a^\alpha} - \frac{2^\alpha}{\lambda^\alpha}\right\}$$

o addirittura

(5 . 6) $$|I_2| \leq \frac{16}{3\alpha}\,\frac{1}{a^\alpha}.$$

Le (5 . 1), (5 . 3), (5 . 5) e (5 . 6) forniscono immediatamente la disuguaglianza

(5 . 7) $$\left|\lambda^2\frac{dV}{d\lambda}\right| \leq \frac{2\pi p}{a^\alpha}\left(\alpha_1 + \frac{16}{3\alpha}\right),$$

la quale è valida per $\lambda > 2a$, e mostra quindi (p, α ed α_1 essendo costanti positive) che, *supposto* λ *abbastanza grande*, $\lambda^2\frac{dV}{d\lambda}$ *tende a zero, per* $a \to \infty$, *almeno come* $\frac{1}{a^\alpha}$.

6. - Il termine $\lambda^2 \frac{dW}{d\lambda}$ — Conclusione riassuntiva.

Il potenziale superficiale W, definito dalla (2 . 2), (attesa l' integrabilità di ν fino all' ∞) è derivabile senza riserva sotto il segno rispetto alle coordinate del punto potenziato M semprechè questo sia esterno alla superficie potenziante σ. Con tale intesa si ha, badando alla (2 . 5),

$$\lambda^2 \frac{dW}{d\lambda} = -\lambda^2 \int_\sigma \nu_1 \frac{\lambda - \rho\cos\theta}{r} \frac{d\sigma}{\rho^{2+\alpha} r^2},$$

quindi, introducendo come al § 4 (sotto le ipotesi del § 2) la proiezione τ di σ sopra $\bar{\omega}$ e la costante q che limita superiormente $h\nu_1$ per tutte il campo di integrazione, segue subito la disuguaglianza

$$\left| \lambda^2 \frac{dW}{d\lambda} \right| \leq q \lambda^2 \int_\tau \frac{d\tau}{\rho^{2+\alpha} r^2}.$$

Questa sussisterà a fortiori se, badando alla (4 . 4), vi si scrive $k_1^2 u^2$ in luogo di λ^2 e si sostituisce, nel denominatore, ρ con ζ (che ne è la proiezione sul piano $\bar{\omega}$); nonchè se si assume come campo di integrazione tutto Γ (esterno del cerchio di centro O e raggio b).

Possiamo pertanto ritenere

(6 . 1) $$\left| \lambda^2 \frac{dW}{d\lambda} \right| \leq q k_1^2 J$$

con

(6 . 2) $$J = u^2 \int_\Gamma \frac{d\Gamma}{\zeta^{2+\alpha} r^2}.$$

Non giova invece maggiorare analogamente $\frac{1}{r}$ in $\frac{1}{\Delta}$, perchè l' integrale non resterebbe in generale convergente, potendosi, entro Γ, annullare $\Delta = \overline{NQ}$ e quindi $\frac{1}{\Delta^2}$ divenire infinito di 2° ordine: allora la limitazione riuscirebbe illusoria, esprimendo semplicemente che $\left| \lambda^2 \frac{dW}{d\lambda} \right| \leq \infty$.

Nell' intento di riconoscere che anche $\lambda^2 \frac{dW}{d\lambda}$ può rendersi piccola a piacere con $\frac{1}{a}$, per ogni λ abbastanza grande, conviene far intervenire anche l' *ipotesi che, trattandosi in questo caso di derivata di un potenziale superficiale, il punto potenziato M è da ritenersi esterno alla superficie potenziante* σ.

Specificheremo l'ipotesi supponendo che, per qualsiasi P di σ, $\overline{MP}=r$ non scenda mai al disotto di una certa lunghezza l (o, ciò che è lo stesso, che la minima distanza di M da σ sia $\geq l$).

Profitteremo inoltre della solita circostanza λ *abbastanza grande* per ritenere il raggio vettore u di N, il quale, in virtù della (4.4), tende all'∞ con λ, già $>b+l$. Indicando allora con χ il circolo di centro N e raggio l, sarà $u-l>b$ la minima distanza dei suoi punti dall'origine. Perciò χ cade tutto entro il campo $\Gamma\,(\zeta \geq b)$ e si può immaginare scisso questo campo nel cerchio χ e nella parte residua Γ_1.

In χ sfrutteremo per r la limitazione

$$r \geq l,$$

valida del resto ovunque, e in τ_1 l'altra

$$r \geq \Delta,$$

che sarebbe pure valida ovunque.

Sarà così

$$J = J_1 + J_2, \tag{6.3}$$

dove

$$J_1 = \frac{u^2}{l^2} \int_\chi \frac{d\chi}{\zeta^{2+\alpha}},$$

$$J_2 = u^2 \int_{\Gamma_1} \frac{d\Gamma_1}{\zeta^{2+\alpha}\Delta^2}. \tag{6.4}$$

In tutto il campo Γ, quindi in particolare anche in χ, $\zeta \geq b$. D'altra parte, come abbiamo avuto occasione di rilevare, per lo stesso cerchio χ, la minima distanza ζ dall'origine O vale $u-l$.

Si può quindi ritenere, entro χ,

$$\zeta^{2+\alpha} = \zeta^\alpha \zeta^2 \geq b^\alpha (u-l)^2,$$

e. tenendone conto, si ricava immediatamente

$$J_1 \leq \frac{u^2}{l^2} \frac{\chi}{b^\alpha (u-l)^2} = \frac{\pi}{\left(1-\frac{l}{u}\right)^2} \frac{1}{b^\alpha}.$$

Siccome $u > l + b$ e, per la (4 . 7), $\frac{1}{b} \leq \frac{k}{a}$, si ha ulteriormente $\left(\text{scrivendo } l+b \text{ in luogo di } u, \text{ e } \frac{k}{a} \text{ in luogo di } \frac{1}{b}\right)$.

$$J_1 \leq \frac{\pi k^\alpha}{a^\alpha}(1 + l/b)^2. \tag{6 . 5}$$

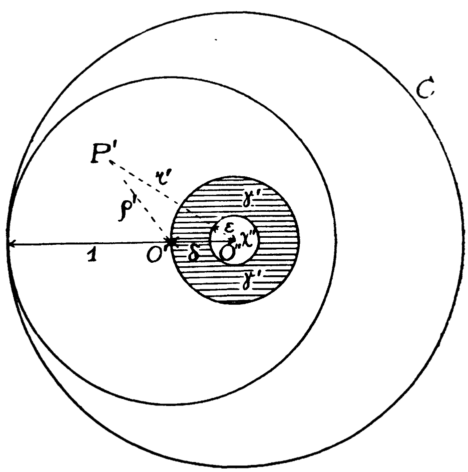
Passiamo a J_2 introdotto colla posizione (6 . 4), dove $d\Gamma_1 = \zeta d\zeta d\varphi$ e Δ^2 ha l'espressione (4 . 3). Trasformiamo l'integrale eseguendo un' inversione rispetto all'origine O, cioè ponendo

$$\zeta = \frac{b}{\rho'}, \tag{6 . 6}$$

e in conformità

$$u = \frac{b}{\delta}, \tag{6 . 7}$$

senza toccare l'argomento φ. Con ciò il campo Γ_1 del piano ζ, φ, che è tutto esterno alla circonferenza di raggio b, anzi è *tutto l'esterno di questa circonferenza meno* χ, si converte nel piano ρ', φ, in un campo Γ' tutto interno alla circonferenza di raggio 1 col centro nell'origine $O'(\rho' = 0)$ (cfr. la figura).



Nell'inversione l'area circolare χ di centro N e raggio l ha per immagine un'area, pure circolare, χ' che è facile caratterizzare. Intanto ad essa appartiene come punto interno (non come centro) l'immagine O'' del centro N, la cui distanza δ da O' è data dalla (6 . 7).

Siccome poi la massima e minima distanza dei punti di χ da O valgono $u \pm l$, così le analoghe massima e minima distanza dei punti di χ' da O' saranno $\frac{b}{u \pm l}$ e corrisponderanno a due punti della retta $O'O''$. Ne viene, introducendo anche il cerchio χ'' di centro O'', tangente internamente a χ', che il suo raggio vale

$$(6 . 8) \qquad \varepsilon = \frac{b}{u} - \frac{b}{u+l} = \frac{b\,l}{u(u+l)} = \frac{l}{u+l}\,\delta .$$

Si può anche notare che ε riesce necessariamente $\leq \frac{1}{2}\,\delta$. Infatti u va ritenuto, come si disse, maggiore di $b+l$. Ne consegue

$$u+l > b+2l$$

e

$$\frac{l}{u+l} < \frac{l}{2l+b} < \frac{1}{2} .$$

Ora, con referenza a coordinate polari ζ, φ di polo O, si ha

$$\frac{d\Gamma_1}{\zeta^2} = \frac{d\zeta}{\zeta}\,d\varphi ,$$

e quindi, per la (6 . 6),

$$\frac{d\Gamma_1}{\zeta^2} = -\frac{d\rho'}{\rho'}\,d\varphi .$$

Se poi si tien conto della definizione (4 . 3) di Δ^2 e di

$$r'^2 = \overline{O''P'} = \delta^2 + \rho'^2 - 2\,\delta\,\rho' \cos\varphi ,$$

si ha immediatamente dalle formule di trasformazione (6 . 6) e (6 . 7)

$$\frac{u^2}{\Delta^2} = \frac{\rho'^2}{r'^2} .$$

Ne scende

$$\frac{d\Gamma_1}{\zeta^2}\frac{u^2}{\Delta^2} = -\frac{d\rho'}{\rho'}d\varphi\frac{\rho'^2}{r'^2}.$$

Nel piano (della figura) rappresentativo delle coordinate polari ρ', φ, $\rho' d\rho' d\varphi$ è un elemento d'area $d\Gamma'$. Perciò (ricordando che, nella trasformazione di integrali di campo, si deve aver riguardo ai valori assoluti, e badando ancora alla (6 . 6)) otteniamo dalla (6 . 4)

$$(6.9)\qquad J_2 = \int_{\Gamma_1}\frac{d\Gamma_1}{\zeta^{2+\alpha}}\frac{u^2}{\Delta^2} = \frac{1}{b^\alpha}\int_{\Gamma'}\frac{\rho'^\alpha d\Gamma'}{r'^2}.$$

Il campo Γ' è la porzione del cerchio unitario (col centro nell'origine O') *esterna* a χ'.

Prendiamo in considerazione anche la circonferenza C di centro O'' e raggio $1+\delta$, e la corona circolare γ, limitata esternamente da C e internamente dal contorno di χ'', cioè dalla circonferenza di raggio ε.

La corona γ comprende tutto il campo Γ', perchè C è tangente *esternamente* alla circonferenza di centro O' e raggio 1, e χ'' tangente *internamente* a χ'.

Ne segue, la funzione integranda essendo sempre ≥ 0,

$$\int_{\Gamma'}\frac{\rho'^\alpha d\Gamma'}{r'^2} \leq \int_{\gamma}\frac{\rho'^\alpha d\gamma}{r'^2}.$$

Associamo questa disuguaglianza alla (6 . 9), usufruendo anche della (4 . 7) che permette di far intervenire $\frac{k}{a}$ al posto di $\frac{1}{b}$. Avremo intanto

$$(6.10)\qquad J_2 \leq \frac{k^\alpha}{a^\alpha}\int_{\gamma}\frac{\rho'^\alpha d\gamma}{r'^2}.$$

La corona circolare γ, di raggi ε e $1+\delta$, giova scinderla in due mediante la circonferenza (concentrica alle estreme) di raggio δ.

Per ogni punto P', non esterno alla corona γ' di raggi ε e δ, si ha necessariamente (essendo O' un punto del contorno esterno)

$$\overline{O'P'} = \rho' \leq 2\delta .$$

D'altra parte vale in ogni caso la disuguaglianza

$$\rho' \leq r' + \delta ,$$

la quale esprime semplicemente che, nel triangolo $O'O''P'$, il lato $\overline{O'P'} = \rho'$ non supera la somma degli altri due.

Nella corona γ' applicheremo la disuguaglianza $\rho' \leq 2\delta$, e nella corona esterna γ'' (di raggi δ, $1+\delta$) la $\rho' \leq r' + \delta$, unitamente a $\delta \leq r'$, da cui segue $\rho' \leq 2r'$.

Potremo quindi scrivere

$$\int_\gamma \frac{\rho'^\alpha d\gamma}{r'^2} \leq (2\delta)^\alpha \int_{\gamma'} \frac{d\gamma}{r'^2} + \int_{\gamma''} \frac{(2r')^\alpha d\gamma}{r'^2} =$$

$$(6.11) \qquad = 2\pi (2\delta)^\alpha \int_\varepsilon^\delta \frac{dr'}{r'} + 2\pi \cdot 2^\alpha \int_\delta^{1+\delta} \frac{dr'}{r'^{1-\alpha}} =$$

$$= 2\pi \cdot 2^\alpha \left\{ \delta^\alpha \log \frac{\delta}{\varepsilon} + \frac{1}{\alpha} \left[(1+\delta)^\alpha - \delta^\alpha \right] \right\} .$$

Ciò posto, si ricordi che, per $\alpha > 0$, un prodotto del tipo $\xi^\alpha \log \xi$ tende a zero con ξ. Siccome, a norma delle (6.7) e (6.8),

$$\delta^\alpha \log \frac{\delta}{\varepsilon} = -\left(\frac{b}{u}\right)^\alpha \log \frac{l}{u+l} ,$$

basta porre per un momento $\frac{l}{u+l} = \xi$ (con che ξ converge a zero al crescere indefinito di u) per poter scrivere

$$\delta^\alpha \log \frac{\delta}{\varepsilon} = -\left(\frac{b}{l}\right)^\alpha \left(1 + \frac{l}{u}\right)^\alpha \xi^\alpha \log \xi .$$

Quando λ e con esso u [a norma della (4.4)] è abbastanza grande, $1 + \frac{l}{u}$ differisce da 1 e $\xi^\alpha \log \xi$ dallo zero di tanto poco quanto ci piace; d'altra parte, siccome, per la (6 . 7), $\delta \rightarrow 0$, $(1+\delta)^\alpha - \delta^\alpha$ tende all'unità.

Si potrà quindi, purchè λ sia abbastanza grande, ritenere la quantità entro le $\{\ \}$ prossima quanto si vuole a $\frac{1}{\alpha}$ e in particolare $< \frac{2}{\alpha}$. Con ciò la disuguaglianza (6 . 11) dà a fortiori

$$\int_\gamma \frac{\rho'^\alpha \, d\gamma}{r'^2} \leq \frac{4\pi \cdot 2^\alpha}{\alpha},$$

e la (6 . 10)

(6 . 12) $$J_2 \leq \frac{4\pi (2k)^\alpha}{\alpha} \frac{1}{a^\alpha}.$$

Basta oramai uno sguardo alle (6 . 1), (6 . 3), (6 . 5) e (6 . 12) per desumerne

(6 . 13) $$\left| \lambda^2 \frac{dW}{d\lambda} \right| \leq \pi q k_1^2 k^\alpha \left\{ \left(1 + \frac{l}{b}\right)^2 + \frac{2^{\alpha+2}}{\alpha} \right\} \frac{1}{a^\alpha}.$$

In definitiva anche $\lambda^2 \frac{dW}{d\lambda}$, *al pari dei termini degli altri tre tipi* $\left(\lambda V, \lambda W, \lambda^2 \frac{dV}{d\lambda}\right)$, *semprechè si supponga preventivamente* λ *abbastanza grande, converge a zero, al crescere indefinito di* a, *d'ordine non minore di* α *rispetto ad* $\frac{1}{a}$, essendo a una limitazione inferiore per la distanza delle masse potenzianti dall'origine.

Il nostro asserto è così completamente provato.

Osservazione. — Per il potenziale U proveniente da masse tutte al finito, si suole ancora rilevare [1] che, se g designa una direzione fissa generica e γ il coseno dell'angolo che il raggio

[1] Cfr. per es. pag. 5 della *Teorica delle forze newtoniane* del Betti, citata da principio.

vettore del punto potenziato M forma con g,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 \frac{dU}{dg} = -m\gamma.$$

Tale conclusione sussiste senz'altro, sotto le ipotesi da noi adottate, anche per masse potenzianti estendentisi indefinitamente. Basta pensare che le limitazioni, stabilite al principio dei §§ 5 e 6 per

$$\left|\lambda^2 \frac{dV}{d\lambda}\right| \quad \text{e} \quad \left|\lambda^2 \frac{dW}{d\lambda}\right|,$$

valgono egualmente per

$$\left|\lambda^2 \frac{dV}{dg}\right| \quad \text{e} \quad \left|\lambda^2 \frac{dW}{dg}\right|.$$