REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M.-M. MARTIN

Filtrage de Kalman d'une série temporelle saisonnière. Application à la prévision de consommation d'électricité

Revue de statistique appliquée, tome 47, n° 4 (1999), p. 69-86

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1999__47_4_69_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1999, **XLVII** (4), 69-86

FILTRAGE DE KALMAN D'UNE SÉRIE TEMPORELLE SAISONNIÈRE APPLICATION À LA PRÉVISION DE CONSOMMATION D'ÉLECTRICITÉ

M.-M. Martin

EDF Etudes et Recherches
1, Avenue du Général de Gaulle,
92145 Clamart cedex

RÉSUMÉ

Nous élaborons un modèle d'état saisonnier, et montrons comment le filtrer à l'aide de filtres de Kalman emboîtés. De mise en œuvre simple et rapide, la méthode repose sur les propriétés classiques des filtres de Kalman et *généralise l'usage des modèles d'état à des séries temporelles saisonnières*. Les périodes d'instabilité et de ruptures des séries, provoquées par des événements extérieurs, sont introduites dans le modèle sous la forme d'interventions.

Cette méthode est appliquée *au problème de la prévision à court terme de la charge électrique*. Son fonctionnement sur un historique de consommation complet de plusieurs années, à conditions météorologiques réalisées, *avec un horizon allant jusqu'à une semaine*, a fait la preuve de la *bonne tenue du modèle et de la qualité de ses performances*.

Mots-clés *: séries temporelles, modèle d'état, filtre de Kalman, analyse d'intervention, consommation d'électricité, prévision de charge.*

ABSTRACT

A seasonal state-space model is put forward and is processed with nested Kalman filters. *The method*, which is both fast and simple, relies on the classical properties of Kalman filters, and *extends the use of state-space models to seasonal time series*. Consumption changes are entered in the model through intervention analysis techniques.

Application to *short term load forecasting is described. The model* has demonstrated its *performance and stability with effective weather conditions*, based on consumption figures for the most recent years, *with horizons of up to a week*.

Keywords *: time series analysis, state-space model, Kalman filter, intervention analysis, electrical power demand, load forecasting.*

1. Introduction

Popularisés au début des années 70, les modèles ARMA n'ont été véritablement reconnus et utilisés que grâce à leurs possibilités d'extensions à des séries temporelles saisonnières et intégrées. La représentation des séries temporelles par un modèle d'état et leur filtrage par le filtre de Kalman requiert les mêmes potentialités.

La prévision à court terme de la consommation électrique[1] s'appuie sur ses propriétés de saisonnalité, tant hebdomadaire que journalière[2]. Elle se fait couramment sur la consommation échantillonnée au pas de 30 minutes, par application d'un modèle SARIMA de la forme suivante[3]

$$\begin{gathered}(1-L^W)(1-L^D)(1-\varphi L)C(t)=(1-\theta_W L^W)(1-\theta_D L^D)a(t)\\ \varphi=0.95,\quad \theta_W=\theta_D=0.7\end{gathered}\tag{1.1}$$

$C(t)$ est la consommation corrigée des fluctuations dues aux variables météorologiques, $a(t)$ est le résidu du modèle et L est l'opérateur de décalage temporel :

$$\begin{gathered}LC(t)=C(t-1)\\ L^D C(t)=C(t-D) \text{ où } D= \text{ un jour}\\ L^W C(t)=C(t-W) \text{ où } W= \text{ une semaine}\end{gathered}$$

Les données de la chronique de consommation sont issues du système électrique et validées manuellement par le prévisionniste.

On ressent aujourd'hui le besoin de représenter la consommation avec un pas de temps plus fin, et d'effectuer les prévisions automatiquement et périodiquement, en utilisant les données les plus récentes.

L'introduction d'un bruit de mesure dans le modèle permettrait de prendre en considération le caractère bruité inhérent aux données télémesurées, ce qui se traduirait par une meilleure précision des prévisions. Par ailleurs, la modélisation de la consommation sous la forme d'un modèle d'état et l'utilisation du filtrage de Kalman, répondraient aux besoins de validation des données, et de prévision périodique et automatique.

Malheureusement, notre modèle de consommation (1.1) comporte une saisonnalité hebdomadaire de dimension importante ($336 = 7$ jours $\times$ 24 heures $\times$ 2 en pas demi-horaire), et la modélisation sous la forme d'un modèle d'état conduit à un vecteur d'état de grande dimension

$$\begin{gathered}\max\,(\text{degré du polynôme autoregressif, } 1+\text{ degré du polynôme de moyenne mobile})\\ =1 \text{ semaine}+1 \text{ jour}+1=385,\end{gathered}$$

en pas de 30 minutes.

---

[1] Après élimination de la composante liée aux variables météorologiques.

[2] D'autres méthodes de prévision ont été expérimentées; le lecteur peut consulter par exemple [4], [5] et [12].

[3] Le lecteur trouvera dans [6] une description de ce modèle.

En outre, pour représenter correctement la dynamique de la consommation, un pas de 5 minutes serait souhaitable, ce qui conduirait à un vecteur d'état de dimension $1 + ((336 + 48) \times 6) = 2\,305$, inutilisable en pratique.

C'est pourquoi, nous avons élaboré une méthode capable de traiter les modèles saisonniers; de mise en œuvre simple et rapide, elle repose sur les mêmes hypothèses implicites que celles sur lesquelles reposent les modèles SARIMA.

Dans le paragraphe 2, consacré à la présentation de la méthode, nous construisons un modèle d'état saisonnier et montrons comment le filtrer à l'aide de filtres de Kalman emboîtés. L'application au modèle de la charge électrique est immédiate.

Le paragraphe 3 explique comment prendre en considération les phases d'instabilité d'une série, provoquées par des événements extérieurs, avec les modèles d'intervention. Appliqués à la consommation d'électricité, ils représentent l'effet des événements socio-économiques qui affectent la charge.

Dans le paragraphe 4, nous abordons le problème de la prévision de la série.

Le fonctionnement de la méthode, en filtrage et en prévision, sur un historique de consommation complet de plusieurs années, et **à conditions météorologiques réalisées**, avec un horizon de prévision pouvant aller jusqu'à la semaine, met en évidence le caractère **sans biais** de la prévision, sa **bonne stabilité à l'horizon hebdomadaire**, et une **amélioration significative de sa précision**.

2. Le modèle

2.1. Construction du modèle d'état

Appelons $z(t)$ une série temporelle observée à travers *l'équation d'observation*

$$y(t) = z(t) + B(t) \tag{2.0}$$

où $B(t)$ est le *bruit de mesure*, dont on suppose qu'il est un *bruit blanc non corrélé à* $z(t)$[4] :

$$\begin{array}{ll} E(z(t)B(s)) = 0 & \forall\, t, s \\ E(B(t)) = 0 & \\ E(B(t)B(t+k)) = 0 \quad \text{si} \quad k \neq 0 & \\ E(B(t)B(t+k)) = R > 0 \quad \text{si} \quad k = 0 & \end{array} \tag{2.1}$$

La série $z(t)$ admet une double saisonnalité de périodes D et W, où W est un multiple de D. Dans la suite du texte, nous supposons que D représente le nombre de points d'un jour, et W le nombre de points d'une semaine. Néanmoins, la méthode peut être appliquée à d'autres types de périodicités.

Considérons les W sous-séries hebdomadaires

$S_{w(t)} = \{\ldots y(t-kW), \ldots, y(t-W), y(t), y(t+W), \ldots\}$ où $w(t) = t\, modulo\, W$.

[4] $y(t), z(t)$, et $B(t)$ sont des processus scalaires.

Sous l'hypothèse de saisonnalité hebdomadaire, chaque sous-série

$$S_{w(t)}(t) = z(t) + B(t)$$

admet un modèle d'état stationnaire :

$$\begin{gathered} z(t) = Z_{w(t)} X_{w(t)}(t) \\ X_{w(t)}(t) = T_{w(t)} X_{w(t)}(t-W) + G_{w(t)} A_{w(t)}(t) \quad \text{est l'équation d'état} \\ Z_{w(t)} \text{ est la matrice d'observation de dimension } (1 \times r_{w(t)}) \\ X_{w(t)}(t) \text{ est le vecteur d'état } (r_{w(t)} \times 1) \\ T_{w(t)} \text{ est la matrice de transition } (r_{w(t)} \times r_{w(t)}) \\ G_{w(t)} \text{ est la matrice d'entrée } (r_{w(t)} \times 1) \\ \text{et } A_{w(t)}(t) \text{ est le processus d'innovation } (1 \times 1) \\ E(A_{w(t)}(t)) = 0 \\ E(A_{w(t)}(t) A_{w(t)}(t)) = \sigma^2_{w(t)} \\ E(A_{w(t)}(t) A_{w(t)}(t+kW)) = 0 \text{ si } k \neq 0 \end{gathered}$$

On suppose que les W sous-séries admettent le même modèle ; ainsi, les matrices $T_{w(t)}, G_{w(t)}, Z_{w(t)}$,... sont constantes quand $w(t) = t$ *modulo* W varie :

$$T_{w(t)} = T_W, \quad G_{w(t)} = G_W, \quad Z_{w(t)} = G_W$$

et le modèle s'écrit

$$\begin{gathered} z(t) = Z_W X_W(t) \\ X_W(t) = T_W X_W(t-W) + G_W A_W(t) \quad \text{équation d'état} \\ Z_W = \text{ matrice d'observation de dimension } (1 \times r_W) \\ X_W(t) = \text{ vecteur d'état } (r_W \times 1) \\ T_W = \text{ matrice de transition } (r_W \times r_W) \\ G_W = \text{ matrice d'entrée } (r_W \times 1) \\ \text{et } A_W(t) = \text{ processus d'innovation } (1 \times 1) \\ E(A_W(t)) = 0 \\ E(A_W(t) A_W(t)) = \sigma^2_W \\ E(A_W(t) A_W(t+kW)) = 0 \text{ si } k \neq 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Nous ordonnons les W séries d'innovations obtenues $W_a(t) = Z_W G_W A_W(t)$ dans l'ordre croissant des t, ce qui conduit à la série

$$\begin{aligned} W_a = \{\ldots, & Z_W G_W A_W(t-1-W), Z_W G_W A_W(t-W), \\ & Z_W G_W A_W(t+1-W), \ldots, Z_W G_W A_W(t-1), \\ & Z_W G_W A_W(t), Z_W G_W A_W(t+1), \ldots\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

qui présente une saisonnalité journalière, conséquence de la saisonnalité journalière de la série.

Considérons maintenant les D sous-séries journalières

$$S_{d(t)} = \{\ldots, W_a(t-D), W_a(t), W_a(t+D), \ldots\} \text{ où } d(t) = t \text{ modulo } D.$$

Nous supposons qu'elles admettent le même modèle stationnaire exprimant leur saisonnalité journalière :

$$\begin{array}{c} W_a(t) = Z_D X_D(t) \\ X_D(t) = T_D X_D(t-D) + G_D A_D(t) \text{ équation d'état} \\ Z_D = \text{ matrice d'observation de dimension } (1 \times r_D) \\ X_D(t) = \text{ vecteur d'état } (r_D \times 1) \\ T_D = \text{ matrice de transition } (r_D \times r_D) \\ G_D = \text{ matrice d'entrée } (r_D \times 1) \\ \text{et } A_D(t) = \text{ processus d'innovation } (1 \times 1) \\ E(A_D(t)) = 0 \\ E(A_D(t)A_D(t)) = \sigma_D^2 \\ E(A_D(t)A_D(t+kD)) = 0 \text{ if } k \neq 0 \end{array} \quad (2.4)$$

Les D séries d'innovations $Z_D G_D A_D(t)$ sont ordonnées dans l'ordre croissant des t, et nous obtenons la série D_a

$$D_a(t) = Z_D G_D A_D(t) \quad (2.5)$$

qui admet le modèle d'état

$$\begin{array}{c} D_a(t) = Z_5 X_5(t) \\ X_5(t) = T_5 X_5(t-1) + G_5 A_5(t) \text{ équation d'état} \\ Z_5 = \text{ matrice d'observation } (1 \times r_5) \\ X_5(t) = \text{ vecteur d'état } (r_5 \times 1) \\ T_5 = \text{matrice de transition } (r_5 \times r_5) \\ G_5 = \text{ matrice d'entrée } (r_5 \times 1) \\ \text{et } A_5(t) = \text{ processus d'innovation } (1 \times 1) \\ E(A_5(t)) = 0 \\ E(A_5(t)A_5(t)) = \sigma_5^2 \\ E(A_5(t)A_5(t+k)) = 0 \; if \; k \neq 0 \end{array} \quad (2.6)$$

C'est la démarche utilisée pour les modèles SARIMA. Les hypothèses implicites sont les mêmes : elles supposent que les différentes sous-séries admettent le même modèle et que chacune d'elles est suffisamment régulière pour être représentée par un modèle d'état stationnaire.

La **série observée** admet alors la décomposition orthogonale suivante

$$y(t) = Z_W T_W X_W(t-W) + Z_D T_D X_D(t-D) + Z_5 X_5(t) + B(t) \quad (2.7)$$

2.2. Filtres de Kalman emboîtés

Le modèle (2.7) comporte $W + D + 1$ sous-modèles d'état élémentaires. Pour chacun d'eux, le filtrage de Kalman conduit à des estimations optimales (à l'intérieur de la classe des filtres linéaires) des vecteurs d'état et de leurs prévisions.
Si :

$$H_t^W(y) = \text{ espace de Hilbert engendré par } \{\ldots, y(t-kW), \ldots, y(t-W), y(t)\}$$

on définit

$$\begin{aligned} X_W(t/t-W) &= E(X_W(t)/H_{t-W}^W(y)) \\ X_W(t/t) &= E(X_W(t)/H_t^W(y)) \end{aligned}$$

et leurs covariances d'erreurs

$$\begin{aligned} C_W(t/t-W) &= E(X_W(t/t-W) - X_W(t))(X_W(t/t-W) - X_W(t))' \\ C_W(t/t) &= E(X_W(t/t) - X_W(t))(X_W(t/t) - X_W(t))' \end{aligned}$$

où X_W' est le vecteur transposé de X_W.

A l'instant t, on calcule *l'erreur de prévision à un pas*, ou *résidu*, de la composante hebdomadaire

$$v_W(t) = y(t) - Z_W X_W(t/t-W)$$

et sa variance

$$H_W(t) = R + Z_W C_W(t/t-W) Z_W'.$$

On estime $X_W(t/t)$ récursivement par les équations de filtrage[5]

$$\begin{aligned} X_W(t/t) &= X_W(t/t-W) + C_w(t/t-W) Z_W' (H_W(t))^{-1} v_W(t) \\ C_W(t/t) &= C_W(t/t-W) - C_W(t/t-W) Z_W' (H_W(t))^{-1} Z_W C_W(t/t-W) \end{aligned} \tag{2.8}$$

et la prévision $X_W(t+W/t)$ par les équations de prévision

$$\begin{aligned} X_W(t+W/t) &= T_W X_W(t/t)) \\ C_W(t+W/t) &= T_W C_W(t/t) T_W' + Q_W \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec $Q_W = G_W G_W' \sigma_W^2$.

La covariance d'erreur est donnée par *l'équation de Riccati*

$$\begin{aligned} C_W(t+W/t) = T_W(C_W(t/t-W) - C_W(t/t-W) Z_W' (H_W(t))^{-1} \\ Z_W C_W(t/t-W)) T_W' + Q_W \end{aligned} \tag{2.10}$$

[5] Une présentation du filtrage de Kalman et de ses propriétés peut être consultée dans différents ouvrages sur le sujet, citons [1], [2], [7], [9] et [13].

Si le modèle d'état est asymptotiquement stable (i.e. si les valeurs propres de T_W sont telles que $|\lambda_i(T_W)| < 1$), alors, à la condition que la matrice de covariance d'erreur soit semi-définie positive, il existe une matrice de covariance d'erreur indépendante du temps qui satisfait à l'équation de Riccati et vers laquelle la matrice de covariance d'erreur C_W converge rapidement et exponentiellement.

Pour la composante journalière, on définit

$$X_D(t/t) = E(X_D(t)/H_t^D(v_W))$$
$$X_D(t/t-D) = E(X_D(t)/H_{t-D}^D(v_W))$$

où $H_t^D(v_W)$ est l'espace engendré par $\{\ldots, v_W(t-D), v_W(t)\}$
et leurs covariances d'erreurs

$$C_D(t/t) = E(X_D(t/t) - X_D(t))(X_D(t/t) - X_D(t))'$$

et

$$C_D(t/t-D) = E(X_D(t/t-D) - X_D(t))(X_D(t/t-D) - X_D(t))'$$

A chaque instant t, on calcule le *résidu* de la composante journalière

$$v_D(t) = v_W(t) - Z_D X_D(t/t-D) = B(t) + Z_W T_W (X_W(t-W) - X_W(t-W/t-W)) + Z_D(X_D(t) - X_D(t/t-D))$$

et sa variance

$$H_D(t) = R + Z_W T_W C_W(t-W/t-W) T_W' Z_W' + Z_D C_D(t/t-D) Z_D'$$

Les équations de filtrage s'écrivent

$$X_D(t/t) = X_D(t/t-D) + C_D(t/t-D) Z_D' (H_D(t))^{-1} v_D(t)$$

et

$$C_D(t/t) = C_D(t/t-D) - C_D(t/t-D) Z_D' (H_D(t))^{-1} Z_D C_D(t/t-D)$$

Les expressions de prévision analogues à (2.9) sont immédiates.

Considérant que

– le modèle d'état hebdomadaire est stationnaire,

– $B(t) + Z_W T_W (X_W(t-W) - X_W(t-W/t-W))$ n'est pas corrélé à $X_D(t) - X_D(t/t-D)$,

– et l'équation de Riccati hebdomadaire converge,

on a,

sous l'hypothèse de stabilité du modèle d'état journalier, des estimations optimales de $X_D(t/t)$ et $X_D(t+D/t)$ à l'aide des équations de Kalman analogues à (2.8) et (2.9) et une équation de Riccati journalière convergente analogue à (2.10).

De la même façon, si nous définissons pour la composante à court terme

$$X_5(t/t) = E(X_5(t)/H_t(v_D))$$
$$\text{et } X_5(t/t-1) = E(X_5(t)/H_{t-1}(v_D))$$

où $H_t(v_D)$ est l'espace engendré par $\{\ldots, v_D(t-1), v_D(t)\}$
et leurs covariances d'erreurs

$$C_5(t/t) = E(X_5(t) - X_5(t/t))(X_5(t) - X_5(t/t))'$$
$$\text{et } C_5(t/t-1) = E(X_5(t) - X_5(t/t-1))(X_5(t) - X_5(t/t-1))'$$

on calcule le *résidu*

$$\begin{aligned} v_5(t) = v_D(t) - Z_5X_5(t/t-1) = B(t) + Z_WT_W(X_W(t-W) - X_W(t-W/t-W)) \\ + Z_DT_D(X_D(t-D) - X_D(t-D/t-D)) + Z_5(X_5(t) - X_5(t/t-1)) \end{aligned}$$

et sa variance

$$\begin{aligned} H_5(t) = R + Z_WT_WC_W(t-W/t-W)T'_WZ'_W \\ + Z_DT_DC_D(t-D/t-D)T'_DZ'_D + Z_5C_5(t/t-1)Z'_5 \end{aligned}$$

et on obtient, *sous l'hypothèse que le modèle d'état court terme est stable, des estimateurs optimaux de $X_5(t/t)$ et $X_5(t+1/t)$ à l'aide des équations de Kalman et une équation de Riccati court terme convergente, analogues à (2.8), (2.9) et (2.10).*

La **valeur filtrée de la série** s'écrit

$$y(t/t) = Z_WT_WX_W(t-W/t-W) + Z_DT_DX_D(t-D/t-D) + Z_5X_5(t/t) \quad (2.11)$$

et

$$\begin{aligned} E[y(t) - y(t/t)]^2 = Z_WT_WC_W(t-W/t-W)T'_WZ'_W \\ + Z_DT_DC_D(t-D/t-D)T'_DZ'_D + Z_5C_5(t/t)Z'_5 + R \quad (2.12) \end{aligned}$$

car les trois composantes de l'expression (2.11) ne sont pas corrélées.

La **prévision à un pas** est

$$y(t/t-1) = Z_WT_WX_W(t-W/t-W) + Z_DT_DX_D(t-D/t-D) + Z_5X_5(t/t-1)$$

avec

$$\begin{aligned} E[y(t) - y(t/t-1)]^2 = Z_WT_WC_W(t-W/t-W)T'_WZ'_W \\ + Z_DT_DC_D(t-D/t-D)T'_DZ'_D + Z_5C_5(t/t-1)Z'_5 + R \quad (2.13) \end{aligned}$$

2.3. Le modèle de la consommation électrique

Considérons la charge électrique; l'équation

$$C(t) = z(t) + B(t)$$

décrit la consommation observée comme la somme du bruit de mesure et de la consommation proprement dite. Nous construisons le modèle d'état de la forme (2.7) correspondant au modèle SARIMA (1.1), ce qui conduit aux matrices suivantes :

$$T_W = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad G_W = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 - \theta_W \end{vmatrix}$$

avec $0 < \theta_W < 1$, $Z_W = |1 \quad 0|$ et $X_W(t) = \begin{vmatrix} z(t) \\ z(t + W/t) \end{vmatrix}$ pour les composantes hebdomadaires,

$$T_D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad G_D = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 - \theta_D \end{vmatrix}$$

avec $0 < \theta_D < 1, Z_D = |1 \quad 0|$ et $X_D(t) = \begin{vmatrix} W_a(t) \\ W_a(t + D/t) \end{vmatrix}$ pour les composantes journalières, et

$$T_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varphi_5 \end{vmatrix} \quad G_5 = \begin{vmatrix} 1 \\ \varphi_5 \end{vmatrix}$$

avec $0 < \varphi_5 < 1$, $Z_5 = |1 \quad 0|$ et $X_5(t) = \begin{vmatrix} D_a(t) \\ D_a(t + 1/t) \end{vmatrix}$ pour la composante court terme,

$$\varphi_5 \neq \theta_D, \text{ et } \varphi_5 \neq \theta_W.$$

Le modèle court terme est stable (car $\varphi_5 < 1$), mais cela n'est pas le cas des modèles hebdomadaires et journaliers.

Cependant, *sous la double condition que*

$$0 < \theta_W < 1 \text{ et } 0 < \theta_D < 1,$$

il y a *contrôlabilité*[6], (quels que soient deux états X_a et X_b, il existe une suite d'innovations et un entier k permettant de passer en k étapes de l'état X_a à l'état X_b) :

en effet, rang de $[G,\ TG] = 2$, car $[G,\ TG] = \begin{pmatrix} 1 & 1-\theta \\ 1-\theta & 1-\theta \end{pmatrix}$

[6] Des informations sur les notions de contrôlabilité et d'observabilité peuvent être obtenues dans les différents ouvrages présentant les modèles d'état et le filtrage de Kalman.

et $|[G,\ TG]| = \theta(1-\theta) \neq 0$, en supposant que $\theta = \theta_W$ pour les modèles hebdomadaires, et $\theta = \theta_D$ pour les modèles journaliers.

Il y a aussi *observabilité,* (le vecteur d'état est complétement déterminé par la suite des observations et des innovations) :

$$\text{rang de } [Z',\ T'Z'] = 2, \text{ car } [Z',\ T'Z'] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } |[Z',\ T'Z']| = 1 \neq 0$$

Les modèles sont *stabilisables,* car

$\exists$ une matrice $S(2 \times 1)$ pour laquelle les valeurs propres de $(T + GS')$ sont de module inférieur à 1 :

soit $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $|T + GS' - \lambda I| = -\lambda(\theta - \lambda)$ a pour racines 0 et θ, de modules < 1

et *détectables*

$\exists$ une matrice $D\ (2 \times 1)$ pour laquelle les valeurs propres de $(T - DZ)$ sont de module inférieur à 1 :

soit $D = \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}$, $|T - DZ - \lambda I| = \lambda^2 - (1 - \theta)$ a pour racines $\pm\sqrt{1-\theta}$, de modules < 1

et *les résultats du paragraphe (2.2) sur la convergence de l'équation de Riccati s'appliquent* (*cf.* [1], paragraphe 4.4, et [9], paragraphe 3.3) *pour les modèles hebdomadaires et pour les modèles journaliers.*

Concernant l'estimation des paramètres, nous n'avons pas procédé par minimisation de la somme des carrés des résidus, et ceci pour deux raisons :

1) comme on le verra au paragraphe 3, la consommation est soumise à de nombreuses ruptures et altérations : les jours fériés apparaissent à intervalles irréguliers tout le long de l'année, les changements d'heure ont lieu deux fois par an, ...

2) notre objectif n'est pas de minimiser la somme des résidus, ce qui serait nécessaire dans le cas d'une prévision à un pas, mais d'obtenir une erreur minimale sur l'horizon entier de prévision.

Nous avons adopté la procédure suivante :

– tout d'abord nous avons fait fonctionner le filtrage sur plusieurs années et avons calculé les prévisions à l'horizon de deux jours avec différents paramètres proches des paramètres du modèle (1.1), sur une période de l'année de durée 4 à 5 semaines et ne contenant ni altération ni rupture de la consommation[7] ,

– ensuite, nous avons sélectionné les meilleurs choix de paramètres obtenus à l'étape précédente, et avons procédé à un test plus général sur trois ans avec lancement de la prévision chaque jour.

[7] Les altérations et les ruptures de la consommation sont introduites au paragraphe 3.

Ces expériences nous ont permis de conclure à la robustesse des paramètres estimés et utilisés pour le modèle (1.1).

La question s'est posée de savoir si l'hypothèse que les différentes sous-séries admettent le même modèle (*cf.* paragraphe 2.1) était véritablement vérifiée. Compte tenu des difficultés rencontrées lors de l'estimation des paramètres, nous avons mené l'expérience suivante : nous avons fait fonctionner le filtrage et la prévision avec des valeurs des paramètres θ_W et θ_D différentes selon l'heure de la journée et de la semaine; différents jeux de valeurs ont été expérimentés; nous n'avons pas constaté une amélioration des résultats, bien au contraire. En fait, on observe une saisonnnalité journalière des variances des résidus hebdomadaires qui confirme l'hypothèse de saisonnalité journalière de la série W_a définie en (2.3).

3. Les interventions

Les modèles décrits au paragraphe 2 supposent que la série des consommations présente une bonne régularité en tendance et saisonnalité. En pratique cependant, certains événements socio-économiques perturbent fortement cette régularité; citons les jours fériés et les effets de «pont» qui les entourent, les périodes de congés et de fermeture des entreprises en été, les changements d'heure....

A ces instants, les hypothèses de régularité qui sont à la base du modèle SARIMA (1.1) et du modèle d'état (2.7) ne sont plus vérifiées. Néanmoins, connaissant à l'avance la date d'occurrence des événements perturbateurs, nous pouvons introduire dans le modèle leur effet sur la charge au moyen des techniques d'intervention : nous ajoutons une composante décrivant la transformation subie par la consommation au moment de l'événement.

3.1 Analyse d'intervention

Les techniques d'intervention sont utilisées habituellement en conjonction avec des modèles ARIMA (cf. [3]). Mais plus généralement, pour une série $u(t)$ décrite par

$$u(t) = M(t),$$

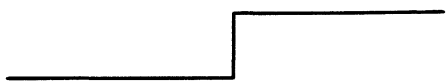
la mise en œuvre d'une intervention se traduit par l'introduction d'une *variable d'intervention* I_t et d'une fonction g

$$u(t) = M(t) + g(I_t).$$

On utilise couramment deux types d'intervention :

– l'*échelon*

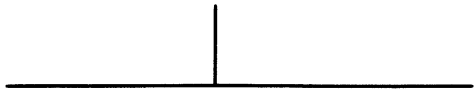
$$I_t = \begin{cases} 0, & \text{if } t < t_0 \\ 1, & \text{if } t \geqslant t_0 \end{cases}$$



pour les changements de niveau,

– l'*impulsion*

$$I_t = \begin{cases} 0, \text{ if } t \neq t_0 \\ 1, \text{ if } t = t_0 \end{cases}$$



pour les effets transitoires.

La fonction $g(I_t)$ peut prendre des formes variées. Pour exprimer les changements affectant la consommation, nous utilisons la fonction très simple

$$g(I_t) = d\, I_t.$$

où d représente l'écart de consommation provoqué par l'événement.

Considérons une série temporelle $z(t)$ observée à travers l'équation d'observation

$$y(t) = z(t) + B(t)$$

où le bruit de mesure $B(t)$ est un bruit blanc non corrélé à $z(t)$.

$z(t)$ admet une représentation d'état

$$\begin{aligned} z(t) &= ZX(t) \\ X(t) &= TX(t-1) + GA(t), \end{aligned}$$

où $X(t)$ est un vecteur d'état (2×1), Z est un vecteur (1×2), T est une matrice de transition (2×2), G est une matrice d'entrée (2×1) et $A(t)$ est le processus d'innovation (1×1), de variance σ^2.

Introduire une intervention dans le modèle conduit à écrire

$$X(t) = TX(t-1) + GA(t) + dI_v(t) \tag{3.1}$$

où $I_v(t)$ est le *vecteur d'intervention* et d représente l'écart de consommation provoqué par l'événement.

Si à t_0, *il y a une **intervention** de type **échelon**,*

$$I_v(t) = \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} & \text{si } t = t_0 \\ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

est le *vecteur d'intervention* utilisé pour le changement de niveau.

Si à t_0, *il y a une* ***intervention*** *de type* ***impulsion****, le vecteur d'intervention*

$$I_v(t) = \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} & \text{si } t = t_0 \\ \\ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} & \text{si } t \neq t_0 \end{cases}$$

modifie localement le niveau de la consommation.

L'écart d peut être une quantité déterministe, mais en pratique, il s'agit souvent d'une grandeur aléatoire. Nous supposons qu'elle n'est pas corrélée au vecteur d'état, et qu'elle admet une moyenne δ et une variance σ_δ^2. Les paramètres δ et σ_δ^2 sont estimés à l'extérieur du modèle, par une méthode spécifique appropriée.

La prévision s'écrit

$$X(t_0/t_0 - 1) = TX(t_0 - 1/t_0 - 1) + \delta I_v(t_0)$$

de covariance d'erreur

$$C(t_0/t_0 - 1) = TC(t_0 - 1/t_0 - 1)T' + Q + \sigma_\delta^2 I_v(t_0) I_v'(t_0) \tag{3.2}$$

avec
$$Q = GG'\sigma^2$$

A t_0, on observe $y(t_0)$ et on calcule le résidu

$$v(t_0) = y(t_0) - ZTX(t_0 - 1/t_0 - 1) - \delta Z I_v(t_0) \tag{3.3}$$

de variance

$$H(t_0) = R + ZTC(t_0 - 1/t_0 - 1)T'Z' + ZQZ' + \sigma_\delta^2 Z I_v(t_0) I_v'(t_0) Z' \tag{3.4}$$

Les équations de filtrage sont

$$\begin{aligned} X(t_0/t_0) &= X(t_0/t_0 - 1) + C(t_0/t_0 - 1)Z'(H(t_0))^{-1}v(t_0) \\ &= TX(t_0 - 1/t_0 - 1) + \delta I_v(t_0) + C(t_0/t_0 - 1)Z'(H(t_0))^{-1}v(t_0) \end{aligned}$$

avec $C(t_0/t_0) = C(t_0/t_0 - 1) - C(t_0/t_0 - 1)Z'(H(t_0))^{-1}ZC(t_0/t_0 - 1)$

et au pas suivant, les équations de prévision sont

$$X(t_0 + 1/t_0) = TX(t_0/t_0)$$

de covariance d'erreur
$$C(t_0 + 1/t_0) = TC(t_0/t_0)T' + Q$$

3.2 Application de l'analyse d'intervention au modèle de charge

Revenons à la consommation électrique. Le bruit de mesure est la conséquence des problèmes dus aux défauts des capteurs, aux erreurs de synchronisation, aux erreurs de transmission, ...; il est indépendant de la consommation proprement dite. Les interventions sont le résultat de facteurs socio-économiques; leur influence sur la consommation est significative mais ils n'affectent pas le bruit de mesure.

Pour chaque type d'événement perturbateur, l'écart induit sur la consommation est une variable aléatoire, dont la moyenne et la variance doivent être estimées à l'aide de méthodes spécifiques, extérieures au modèle[8]. Quand nous ajoutons la covariance de l'intervention à la covariance d'erreur du vecteur d'état, nous exprimons l'augmentation de l'incertitude sur la consommation au moment de l'événement.

Considérons par exemple le changement d'heure. Chaque année, le dernier dimanche de mars et le dernier dimanche d'octobre, à deux heures du matin, l'heure légale est augmentée ou diminuée d'une heure. La consommation due à l'éclairage est liée à l'heure solaire, alors que le reste de la consommation est lié à l'heure légale. Quand on passe de l'heure d'été à l'heure d'hiver, la charge est réduite au cours de la montée du matin, par contre le pic du soir est augmenté. Quand on passe de l'heure d'hiver à l'heure d'été, l'effet est inversé. D'une semaine à l'autre, la courbe de charge journalière est modifiée.

Dans le modèle (2.7), le changement d'heure légale implique que pour chaque point temporel de la semaine débutant le jour du changement d'heure, les composantes hebdomadaires sont modifiées par une composante d'intervention :

$$X_W(t_{w_0}) = T_W X_W(t_{w_0} - W) + G_W A_W(t_{w_0}) + \delta_{t_{w_0}} I_v(t_{w_0})$$

pour $$t_{w_0} = 1, 2, \ldots, W \qquad (3.5)$$

et la prévision s'écrit

$$\begin{aligned} X_W(t_{w_0}/t_{w_0} - W) &= T_W X_W(t_{w_0} - W/t_{w_0} - W) + \delta_{t_{w_0}} I_v(t_{w_0}) \\ \text{avec} \quad C_W(t_{w_0}/t_{w_0} - W) &= T_W C_W(t_{w_0} - W/t_{w_0} - W) T'_W \\ &\quad + Q_W + \sigma^2_{\delta_{t_{w_0}}} I_v(t_{w_0}) I'_v(t_{w_0}) \qquad (3.6) \end{aligned}$$

pour $t_{w_0} = 1, 2, \ldots, W$

Comme le changement sur la courbe de charge est durable, les $I_v(t_{w_0})$, pour $t_{w_0} = 1, 2, \ldots, W$ sont des vecteurs d'intervention de type échelon. La moyenne $\delta_{t_{w_0}}$ de l'écart (et sa variance $\sigma^2_{\delta_{t_{w_0}}}$) varie(nt) à l'intérieur de la semaine.

[8] Nous supposons que l'écart sur la consommation induit par les différents événements socio-économiques n'est pas corrélé à la consommation habituelle, et nous pouvons alors ajouter les variances de l'intervention et celles du vecteur d'état.

On estime

$$\delta_{t_{w0}} \text{ et } \sigma^2_{\delta_{t_{w0}}} \text{ pour } t_{w0} = 1, 2, \ldots, W$$

à l'aide des historiques de consommation aux périodes de changement d'heure des années précédentes.

Plus généralement, ***on applique l'intervention à la composante hebdomadaire du modèle d'état. Les composantes journalières et court terme ne sont pas modifiées***.

Les changements consécutifs aux congés d'été et aux changements d'heure sont des changements durables; les interventions ont la forme d'un échelon. Après un certain temps, des interventions de même type et de sens opposé viendront modifier la série. Les changements dus aux jours fériés ne modifient pas la courbe de charge des jours suivants; les interventions ont la forme d'une impulsion.

Les différents changements affectant la consommation ne peuvent pas être estimés de la même façon. Chaque événement perturbateur possède sa propre dynamique, et l'estimation est de la responsabilité de modèles indépendants. Ainsi, la modélisation de l'écart sur la consommation provoqué par les jours fériés est basée sur leur similarité avec les dimanches, mais aussi avec les jours fériés précédents de la même catégorie.

L'introduction de la variabilité dans l'analyse d'intervention permet de considérer séparément l'erreur sur le modèle d'état et l'erreur sur le modèle d'intervention. Ceci *conduit à une meilleure prise en compte de la variance de la consommation pendant l'intervention et après.*

Deux interventions peuvent apparaître en même temps; par exemple un jour férié et un changement d'heure; les écarts de consommation correspondants, qui résultent d'événements indépendants, sont non corrélés et leurs effets sont additionnés. La composante hebdomadaire s'exprime alors comme suit :

$$X_W(t) = T_W X_W(t-W) + G_W A_W(t) + \delta_{1,t} I_{v1}(t) + \delta_{2,t} I_{v2}(t) \tag{3.7}$$

Dans cet exemple, les deux vecteurs d'intervention ne sont pas du même type; un jour férié est représenté par une intervention ayant la forme d'une impulsion, alors que le changement d'heure est décrit par un échelon.

4. La prévision

4.1. La prévision

Utilisant (2.13), nous souhaitons calculer la prévision de la charge à l'horizon k : si $k < D$[9]

$$\begin{aligned} y(t+k/t) = {} & Z_W T_W X_W(t+k-W/t+k-W) \\ & + Z_D T_D X_D(t+k-D/t+k-D) + Z_5 X_5(t+k/t) \end{aligned}$$

[9] Si $k > D$, les trois termes de la prévision sont corrélés, et il faut en tenir compte dans le calcul de la variance de l'erreur de prévision.

$$\text{et } E[y(t+k) - y(t+k/t)]^2 = Z_W T_W C_W(t+k-W/t+k-W) T'_W Z'_W \\ + Z_D T_D C_D(t+k-D/t+k-D) T'_D Z'_D + Z_5 C_5(t+k/t) Z'_5 + R \quad (4.1)$$

Si un événement provoque une perturbation à l'instant $t + k = t_{w_0} \quad (k < D)$

$$y(t+k/t) = Z_W T_W X_W(t+k-W/t+k-W) + \delta_{t+k} Z_W I_v(t+k) \\ + Z_D T_D X_D(t+k-D/t+k-D) + Z_5 X_5(t+k/t)$$

$$\text{et } E[y(t+k) - y(t+k/t)]^2 = Z_W T_W C_W(t+k-W/t+k-W) T'_W Z'_W \\ + \sigma^2_{\delta_{t+k}} Z_W I_v(t+k) I'_v(t+k) Z'_W + Z_D T_D C_D(t+k-D)/t+k-D) T'_D Z'_D \\ + Z_5 C_5(t+k/t) Z'_5 + R \quad (4.2)$$

4.2 Analyse des résultats de la prévision

Nous avons fait fonctionner le modèle, à conditions météorologiques réalisées, en filtrage et prévision, sur un historique de consommation débutant le 01/01/1990.

Pour mesurer ses performances, nous avons lancé la prévision jusqu'à un horizon de une semaine (jour J + 7 jours, à minuit), chaque jour à midi, du 01/01/1993 au 30/06/1996, et avons calculé les erreurs moyennes de prévision. Le lecteur trouvera dans le tableau 1 un bilan de cette expérience : pour chaque jour de l'horizon, de J à J + 7, les erreurs moyennes, erreurs absolues moyennes, erreurs quadratiques moyennes, erreurs absolues en pourcentage moyennes et quantiles à 95 %, sur les trois ans et demi de l'expérience. On constate que la prévision est sans biais, et que les erreurs moyennes sont très stables le long de l'horizon de prévision. L'erreur quadratique moyenne pour J + 7 est de 914 MW, l'erreur absolue en pourcentage est de 1,64 %; en outre 95 % des erreurs sont inférieures à 1820 MW.

Nous avons cherché à comparer les performances de notre modèle avec celles des modèles que nous utilisons aujourd'hui. L'exploitation utilise actuellement deux modèles. Le plus ancien est décrit dans [6]. Un modèle récent utilise une représentation plus fine de la consommation liée à la météorologie, la consommation indépendante des variables météorologiques restant toutefois prévue par le modèle ARIMA (1.1). La nouvelle représentation de la consommation liée aux variables météorologiques[10] améliore les résultats de la prévision, mais nous ne disposons malheureusement pas de statistiques systématiques de résultats; il semble cependant que le modèle d'état conduise à des résultats plus précis. Le tableau 2 présente une comparaison des performances du modèle d'état et du modèle présenté en [6] sur les jours ne comportant pas de perturbation. On observe un gain significatif.

---

[10] La nouvelle représentation de la composante liée aux variables météorologiques est utilisée aussi en préalable au modèle d'état.

TABLEAU 1
Erreurs moyennes de prévision pour les différents jours de l'horizon, prévision lancée chaque jour à midi jusqu'à l'horizon J + 7 minuit du 01/01/1993 au 30/06/1996 à conditions météorologiques réalisées

Jour de l'horizon	Erreur	Erreur absolue	Erreur quadratique	Erreur en pourcentage	Quantile Q95
J	−1,6 MW	415 MW	545 MW	0.92 %	1 107 MW
J + 1	−2,8 MW	543 MW	709 MW	1.25 %	1 423 MW
J + 2	−1,1 MW	607 MW	786 MW	1.40 %	1 569 MW
J + 3	0,3 MW	636 MW	821 MW	1.47 %	1 638 MW
J + 4	1,2 MW	659 MW	849 MW	1.52 %	1 689 MW
J + 5	3,2 MW	679 MW	871 MW	1.57 %	1 734 MW
J + 6	4,6 MW	697 MW	893 MW	1.61 %	1 774 MW
J + 7	7,2 MW	712 MW	914 MW	1.64 %	1 820 MW

TABLEAU 2
Comparaison des résultats du modèle d'état avec le modèle présenté en [6], prévision lancée chaque jour à midi sur les jours normaux, à conditions météorologiques réalisées

	Erreur moyenne pour le jour J + 1			
	Modèle de [6]		Modèle d'état	
	Erreur quadratique	Erreur absolue en %	Erreur quadratique	Erreur absolue en %
16/01/1994–20/12/1994	1004 MW	2 %	673 MW	1,25 %
16/01/1995–20/12/1995	1097 MW	2 %	755 MW	1,36 %

5. Conclusion

Nous avons proposé une méthode généralisant l'utilisation des modèles d'état stationnaires et du filtrage de Kalman à des séries temporelles saisonnières. Les modèles d'intervention facilitent la description des conséquences des événements extérieurs qui affectent la série.

Utilisant cette méthode, nous avons construit un modèle de la charge électrique qui autorise le filtrage de données temps réel télémesurées et la prévision à court terme. Les performances du modèle et sa stabilité à l'horizon hebdomadaire nous permettent d'envisager son utilisation en prévision jusqu'à cet horizon.

Références bibliographiques

[1] ANDERSON B.D.O., MOORE J.B., (1979). *Optimal Filtering*, (Prentice-Hall).

[2] AZENCOTT R., DACUNHA-CASTELLE D., (1984). *Séries d'observations irrégulières, modélisation et prévision*, (Masson).

[3] BOX G.E.P., TIAO G.C., (1975). *Intervention analysis with applications to economic and environmental problems*, Journal of the American Statistical Association, n° 70, pp. 70-79.

[4] CAIRE P., CZERNICHOW T., DORIZZI B., IMHOF K., JACCARD Y., PIRAS A., (1996). *Short Term electrical load forecasting with Artificial Neural Networks*, Int. Journal of Eng. Int. Syst., Vol. 4,pp. 85-99.

[5] COTTRELL M., GIRARD B., GIRARD Y., MANGEAS M., MULLER C., (1995). *Neural modelling for time series : a statistical stepwise method for weight elimination*, IEEE Transactions on Neural Networks, 6, pp. 1335-1364.

[6] ERNOULT M., MATTATIA R., (1984). *Short-term load forecasting; the PRECOCE model*, EDF Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches. Série B. n° 3, pp. 37-44.

[7] GOURIEROUX CH. , MONTFORT A., (1990). *Séries temporelles et modèles dynamiques*, (Economica).

[8] GROSS G., GALIANA F.D., (Dec.1987). *Short-term loadforecasting*, Proc. IEEE, vol. 75, n° 12, pp. 1558-1572.

[9] HARVEY A.C., (1989). *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*, (Cambridge University Press).

[10] HARVEY A., KOOPMAN S.J., (1993). *Forecasting Hourly Electricity Demand Using Time-Varying Splines*, J. of American Statistical Association, vol. 88,424, pp. 1228-1236.

[11] MARTIN M.M., (1996). *Integrated model for very short-term load forecasting*, Power Systems Computation Conference 96, pp. 245-251.

[12] POGGI J.M., (1994). *Prévision non paramétrique de la consommation électrique*, Revue de Statistique Appliquée, 42(4), pp. 83-98.

[13] PRIESTLEY M.B., (1980). *Spectral Analysis and Time Series*, (London Academic Press).