Revue de statistique appliquée

W. Tinsson

Prédiction de la réponse moyenne au moyen d'un plan d'expérience à facteurs quantitatifs et effets de blocs aléatoires

Revue de statistique appliquée, tome 47, nº 4 (1999), p. 47-67

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1999__47_4_47_0>

© Société française de statistique, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Rev. Statistique Appliquée, 1999, **XLVII** (4), 47-67

PRÉDICTION DE LA RÉPONSE MOYENNE AU MOYEN D'UN PLAN D'EXPÉRIENCE À FACTEURS QUANTITATIFS ET EFFETS DE BLOCS ALÉATOIRES

W. Tinsson

Université de Pau et des Pays de l'Adour,
Laboratoire de Mathématiques Appliquées, UPRES A 5033
avenue de l'Université, 64000 Pau – France

RÉSUMÉ

Cet article s'intéresse à la prédiction de la réponse moyenne du modèle linéaire à effets de blocs aléatoires. Nous prouvons qu'avec ce modèle la propriété d'isovariance s'obtient de manière classique lorsque le plan est bloqué orthogonalement. De manière plus générale, la variance de prédiction est connue dès lors que le plan est en blocs usuel. Ceci permet alors la construction explicite de graphes des variances extrêmes.

Mots-clés : *modèle linéaire mixte, plans bloqués orthogonalement, plans usuels, isovariance, graphes des variances extrêmes.*

ABSTRACT

This paper deals with prediction of mean response in the case of mixed linear model. We prove that property of rotatability is achieve in a classical way when designs are orthogonally blocked. More generally, variance prediction is well known when designs are usuals. This result allows explicit construction of variance dispersion graphs.

Keywords : *mixed linear model, orthogonally blocked designs, usual designs, rotatability, variance dispersion graphs.*

1. Introduction

Dans certaines situations pratiques, l'introduction d'effets de blocs aléatoires s'impose. Nous songeons principalement aux cas de figure où l'expérimentateur utilise un petit nombre de blocs choisis au sein d'une population de grande taille. L'analyse est alors menée à l'aide du **modèle linéaire mixte**. Peu de publications sont consacrées à l'emploi de ce modèle pour l'ajustement de surfaces de réponse. Citons les travaux de Khuri [7], concernant l'estimation des paramètres de l'espérance dans le cas de plans bloqués orthogonalement, ainsi que la généralisation de ces résultats à la classe des plans en blocs qualifiés d'**usuels**, due à Collombier et Tinsson [3].

Ces résultats d'estimation étant acquis nous nous intéressons maintenant aux capacités de prédiction du modèle linéaire mixte. Pour le modèle linéaire simple (*i.e.* sans blocs), nous savons que la prédiction de la réponse moyenne est très facilement analysable lorsqu'on considère un plan à prédicteurs **isovariants par transformations orthogonales**. Nous prouvons ici que pour tout plan bloqué orthogonalement cette propriété est conservée lors du passage au modèle mixte.

Le blocage orthogonal est cependant parfois trop contraignant pour l'expérimentateur qui peut préférer l'utilisation de plans en blocs usuels. Nous proposons alors d'évaluer la qualité de la prédiction réalisée à l'aide de **graphes des variances extrêmes**. Ces graphes représentent la variance moyenne de prédiction ainsi que les variances extrémales sur toute sphère centrée. Jusqu'à présent ces courbes sont obtenues numériquement pour le modèle simple (Vining [11]) ou explicitement dans des cas très particuliers (Borkowski [1]). Nous étendons dans cet article la construction des graphes des variances extrêmes à tout plan en blocs usuel analysé au moyen du modèle linéaire mixte.

Le paragraphe 2 est consacré à la présentation du modèle linéaire mixte. Vu le rôle particulier joué par les plans bloqués orthogonalement, nous consacrons le paragraphe 3 à leur étude. Le paragraphe 4 aborde ensuite une généralisation à la classe des plans en blocs usuels.

2. Modèle linéaire mixte

2.1. Notations et définitions

Supposons que nous cherchions à modéliser un phénomène aléatoire dont on peut controler expérimentalement m **facteurs quantitatifs**. Considérons pour cela un **plan d'expérience** $\mathcal{D}$; notons $\mathcal{U}$ l'ensemble de ses n unités expérimentales et $Y_{u,x}$ l'aléa observé lorsque le traitement $x = {}^t(x_1 \dots x_m)$ est appliqué à l'unité expérimentale u. On suppose que :

$$Y_{u,x} = f(x) + \varepsilon_{u,x}$$

avec : $\begin{cases} f(x) \text{ **loi de réponse** en } x \text{ (la réponse en ce point)} \\ \varepsilon \text{ **résidu** lié aux erreurs expérimentales ou au modèle} \end{cases}$

Pour obtenir concrètement une approximation de la loi de réponse, nous supposons que f est assez régulière pour admettre un développement limité à l'ordre q dans le domaine expérimental $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^m$ contenant l'origine du repère utilisé. Nous travaillons ici avec des développements limités polynomiaux d'ordre $q = 2$, c'est-à-dire que :

$$u = 1 \dots n \text{ et } \forall\, x \in \mathcal{E}\ , Y_{u,x} = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}\sum \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon_{u,x}$$

Dans la suite, nous désignons par Y le vecteur des n observations, par ε le vecteur des n résidus et par β le vecteur des p paramètres du modèle (avec ici $p = (m+1)(m+2)/2$). On appelle alors **matrice du plan** considéré la matrice $n \times m$ ayant pour ligne u les m coordonnées du u-ième point du plan $\mathcal{D}$. Désignons par L_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ la j-ème colonne de cette matrice et notons $\odot$ l'opérateur du produit d'Hadamard (appelé encore produit terme à terme puisque si $u, v \in \mathbb{R}^n$ alors $u \odot v \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\forall\, i = 1 \dots n$, $(u \odot v)_i = u_i v_i$). En posant maintenant $Q_j = L_j \odot L_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ et $Q_{jk} = L_j \odot L_k$ $(1 \leqslant j < k \leqslant m)$ nous pouvons remarquer que la **matrice du modèle** s'écrit pour un modèle d'ordre 2 :

$$X = \left[1_n \mid L_1 \dots L_m \mid Q_1 \dots Q_m \mid Q_{12} \dots Q_{(m-1)m}\right]$$

A partir de ceci, la matrice :

$$M = M(L_1 \dots L_m) = \frac{1}{n} {}^t X X$$

a pour éléments tous les moments jusqu'à l'ordre 4 de la distribution des points du plan, c'est pourquoi M est appelée **matrice des moments** du plan $\mathcal{D}$.

Supposons maintenant que l'on veuille tenir compte d'éventuels effets d'hétérogénéité des unités expérimentales. Pour cela, on peut regrouper en **blocs** les observations associées aux unités expérimentales homogènes et introduire dans le modèle un effet de blocs. Désignons alors par B la matrice $n \times b$ des indicatrices des b blocs de tailles $k_1 \dots k_b$ et par γ le vecteur des effets de blocs qui lui est associé.

Définition 1 :

On appelle **modèle linéaire mixte** *le modèle à effets de blocs aléatoires donné par la relation matricielle :*

$$Y = X\beta + B\gamma + \varepsilon$$

avec : $E\,\varepsilon = E\,\gamma = 0$ *et* $\operatorname{Cov}\varepsilon = \sigma^2 I_n,\ \operatorname{Cov}\gamma = \sigma_b^2 I_b$
$\forall\, i = 1 \dots n$ *et* $\forall\, j = 1 \dots b,\ \varepsilon_i$ *et* γ_j *sont indépendants*

En d'autres termes, nous avons donc :

$$\boxed{\begin{cases} EY = X\beta \\ \operatorname{Cov} Y = \sigma^2 I_n + \sigma_b^2 B^t\, B \end{cases}}$$

Nous supposons dans la suite que la matrice $\operatorname{Cov} Y$ est **régulière** et on note :

$$\operatorname{Cov} Y = \sigma^2 V \text{ avec } V = I_n + \eta B^t\, B \text{ où } \eta = \frac{\sigma_b^2}{\sigma^2}$$

On a alors les résultats classiques suivants (se référer à Christensen [2]) :

L'équation normale du modèle linéaire mixte est donnée par :

$$\boxed{\left({}^tXV^{-1}X\right)\hat{\beta}\left(\eta\right) = {}^tXV^{-1}Y}$$

En désignant par A^- une inverse généralisée de toute matrice A (c'est-à-dire telle que $AA^-A = A$) nous pouvons dire de plus que si $K\beta$ est une application linéaire estimable alors :

$$\boxed{\mathrm{Cov}\,K\hat{\beta}\left(\eta\right) = \sigma^2 K\left({}^tXV^{-1}X\right)^{-}{}^tK}$$

Remarquons enfin que le **modèle linéaire simple** (qui néglige les effets de blocs) est le modèle mixte particulier obtenu lorsque $\eta = 0$. En effet, on a alors :

$$Y = X\beta + \varepsilon \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{E}Y = X\beta \\ \mathrm{Cov}Y = \sigma^2 I_n \end{cases}$$

2.2 Notion d'isovariance

Désignons dans la suite par $\widehat{EY}\left(x\right)$ l'estimateur de Gauss-Markov de la réponse moyenne du modèle mixte au point $x \in \mathbb{R}^m$. On a donc :

$$\widehat{EY}\left(x\right) = {}^tg\left(x\right)\hat{\beta}\left(\eta\right) \text{ avec } {}^tg(x) = \left(1, x_1 \ldots\ x_m, x_1^2 \ldots x_m^2, x_1x_2 \ldots x_{m-1}x_m\right)$$

En notant $O\left(\mathbb{R}^m\right)$ le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^m$, il vient :

Définition 2 :

Un plan d'expérience à m *facteurs quantitatifs est dit à prédicteurs* **isovariants par transformations orthogonales** *(ou plus simplement isovariant) si et seulement si :*

$$\boxed{\forall P \in O\left(\mathbb{R}^m\right), \forall x \in \mathbb{R}^m, \mathrm{Var}\,\widehat{\mathrm{E}Y}\left(Px\right) = \mathrm{Var}\,\widehat{\mathrm{E}Y}\left(x\right)}$$

Remarque. Ce résultat implique que si un plan est isovariant alors les prédicteurs obtenus ont une variance constante sur toute sphère centrée, cette variance ne dépend donc que de $r^2 = {}^txx$.

Pour le modèle simple ($\eta = 0$), une condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan d'expérience soit isovariant est (voir Myers [9] ou Draper *et al.* [4]) :

Proposition 3

Un plan d'expérience pour un modèle simple d'ordre 2 *est* **isovariant** *si et seulement si :*

$$\boxed{\forall\, i, j = 1 \ldots m \text{ tels que } i \neq j,\ \left[i^2\right] = \lambda_2,\ \left[i^2j^2\right] = \lambda_4, \left[i^4\right] = 3\lambda_4}$$

avec :

$$[i^2] = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2,\ [i^2j^2] = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^2 x_{uj}^2,\ [i^4] = \frac{1}{n}\sum_{u=1}^{n} x_{ui}^4.$$

3. Prédiction et plans bloqués orthogonalement

3.1. Plans bloqués orthogonalement

Rappelons ici la définition du blocage orthogonal ainsi que d'importantes propriétés liées à l'estimation (voir Collombier et Tinsson [3] pour les démonstrations).

Définition 4 :

Un plan d'expérience est dit **bloqué orthogonalement** *si et seulement si (en notant $J_n = 1_n{}^t 1_n$) :*

$$\boxed{{}^tX\left(I_n - \frac{1}{n}J_n\right)B = 0}$$

Ecrivons le modèle linéaire mixte sous la forme :

$$Y = \beta_0 1_n + W\tau + B\gamma + \varepsilon \text{ avec donc } {}^t\beta = \left(\beta_0 \mid {}^t\tau\right).$$

On montre alors que les fonctions paramétriques linéaires dépendant de τ admettent un estimateur linéaire sans biais **uniformément optimal** en η si et seulement si le plan utilisé est bloqué orthogonalement (donc quelle que soit la valeur de η les estimateurs obtenus sont les mêmes que dans le cas particulier correspondant au modèle simple où $\eta = 0$). En ce qui concerne la dispersion de ces estimateurs on a pour tout plan régulier bloqué orthogonalement :

$$\mathrm{Cov}\hat{\beta}(\eta) =$$

$$\sigma^2\begin{bmatrix} \sigma^{-2}\,\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_0(\eta)\right) & -\frac{1}{n}{}^t1_n W\left[{}^tW\left(I_n - \frac{1}{n}J_n\right)W\right]^{-1} \\ -\frac{1}{n}\left[{}^tW\left(I_n - \frac{1}{n}J_n\right)W\right]^{-1}{}^tW1_n & \left[{}^tW\left(I_n - \frac{1}{n}J_n\right)W\right]^{-1} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\mathrm{Var}\,\hat{\beta}_0(\eta) = \frac{\sigma^2}{n-\xi} + \frac{\sigma^2}{n^2}{}^t1_n W\left[{}^tW\left(I_n - \frac{1}{n}J_n\right)W\right]^{-1}{}^tW1_n$$

$$\text{où } \xi = \sum_{i=1}^{b} k_i^2\frac{\eta}{1+k_i\eta}$$

où, rappelons le, k_i est la taille du i-ème bloc ($i = 1 \ldots b$). On en déduit alors que le seul élément de $\mathrm{Cov}\hat{\beta}(\eta)$ dépendant du paramètre η est $\mathrm{Var}\hat{\beta}_0(\eta)$.

3.2. Précision de la prédiction

Notons maintenant $v_\eta(x)$ la variance de $\widehat{\mathrm{E}Y}(x)$ relative à la valeur η. Si l'on étudie alors les variations de $v_\eta(x)$ pour x fixé, en fonction du paramètre η, on obtient le résultat suivant :

Proposition 5

Pour tout plan d'expérience bloqué orthogonalement, la variance des prédicteurs de Gauss-Markov de $\mathrm{E}Y(x)$ *, avec* x *fixé, est une fonction* **strictement croissante** *de* η*. Plus précisément :*

$$\boxed{v_\eta(x) = v_0(x) + \sigma^2 \frac{\xi}{n(n-\xi)}} \quad \textit{avec}\ \xi = \sum_{i=1}^{b} k_i^2 \frac{\eta}{1+k_i\eta}$$

En particulier, il vient donc lorsque les blocs sont de même taille k *:*

$$v_\eta(x) = v_0(x) + \sigma^2 \frac{k\eta}{n} = v_0(x) + \frac{\sigma_b^2}{b}$$

Démonstration. L'expression de $v_\eta(x)$ est donnée par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^m \text{ et } \forall\, \eta \geqslant 0, v_\eta(x) = \mathrm{Var}\left[{}^t g(x)\hat{\beta}(\eta)\right] = {}^t g(x)\left(\mathrm{Cov}\,\hat{\beta}(\eta)\right) g(x)$$

Considérons les notations :

$$g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ h(x) \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{Cov}\,\hat{\beta}(\eta) = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}\hat{\beta}_0(\eta) & \mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_0(\eta), \hat{\tau}(\eta)\right) \\ {}^t\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_0(\eta), \hat{\tau}(\eta)\right) & \mathrm{Cov}\hat{\tau}(\eta) \end{bmatrix}$$

D'après les résultats du paragraphe 3.1 on obtient alors :

$$v_\eta(x) = \mathrm{Var}\,\hat{\beta}_0(\eta) + \underbrace{\left({}^t h(x)\left(\mathrm{Cov}\hat{\tau}(\eta)\right)h(x) + 2\mathrm{Cov}\left(\hat{\beta}_0(\eta), \hat{\tau}(\eta)\right)h(x)\right)}_{= C(x) \text{ puisque cette quantité est indépendante de } \eta}$$

On en déduit que :

$$\left.\begin{aligned} v_\eta(x) &= \mathrm{Var}\,\hat{\beta}_0(\eta) + C(x) \\ v_0(x) &= \mathrm{Var}\,\hat{\beta}_0(0) + C(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_\eta(x) - v_0(x) = \mathrm{Var}\,\hat{\beta}_0(\eta) - \mathrm{Var}\,\hat{\beta}_0(0)$$

Or, nous avons vu au paragraphe 3.1 la forme générale de $\mathrm{Var}\hat{\beta}_0(\eta)$, donc :

$$v_\eta(x) - v_0(x) = \frac{\sigma^2}{n-\xi} - \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \frac{\xi}{n(n-\xi)}$$

Remarquons alors que :

$$\xi = \sum_{i=1}^{b} k_i^2 \frac{\eta}{1 + k_i\eta} \;\Rightarrow\; \frac{\partial \xi}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{b} k_i^2 \frac{1}{(1 + k_i\eta)^2} > 0$$

donc, ξ est une fonction strictement croissante de η, ce qui démontre que pour x fixé $v_\eta(x)$ est bien elle aussi strictement croissante en η ■

Remarque. On constate que si $\eta \to +\infty$ alors $\xi \to n$, donc $v_\eta(x) \to +\infty$.

Les plans isovariants classiques, c'est-à-dire relativement au modèle simple, sont-ils encore isovariants pour le modèle linéaire mixte? La proposition 5 nous permet de répondre par l'affirmative à l'aide du corollaire suivant :

Corollaire 6

Un plan d'expérience bloqué orthogonalement est **isovariant pour le modèle linéaire mixte** *quel que soit η si et seulement si il est* **isovariant pour le modèle linéaire simple.**

Démonstration. Elle est immédiate d'après la proposition 5. En effet, un plan est isovariant pour le modèle linéaire mixte si et seulement si $v_\eta(x)$ est une fonction de $r = \sqrt{{}^txx}$ donc si et seulement si $v_0(x)$ est une fonction de r ■

3.3. Exemple d'application

Considérons les 3 plans d'expérience bloqués orthogonalement à $m = 4$ facteurs et $n = 30$ unités expérimentales.

Plan 1, *plan composite centré* tel que :

$$\begin{cases} \text{Bloc 1 : partie factorielle et 4 points centraux} & (k_1 = 20) \\ \text{Bloc 2 : partie axiale telle que } \alpha = 2 \text{ et 2 points centraux} & (k_2 = 10) \end{cases}$$

Plan 2 , *plan composite centré en blocs de même taille* tel que :

$$\begin{cases} \text{Bloc 1 : fraction régulière ABCD} = 1_8 \text{ et 2 points centraux} & (k_1 = 10) \\ \text{Bloc 2 : fraction régulière ABCD} = -1_8 \text{ et 2 points centraux} & (k_2 = 10) \\ \text{Bloc 3 : partie axiale telle que } \alpha = 2 \text{ et 2 points centraux} & (k_3 = 10) \end{cases}$$

Plan 3, *plan de Box et Behnken* tel que :

$$\begin{cases} \text{Bloc 1 : } (\pm 1, \pm 1, 0, 0) \cup (0, 0, \pm 1, \pm 1) \text{ et 2 points centraux} & (k_1 = 10) \\ \text{Bloc 2 : } (\pm 1, 0, 0, \pm 1) \cup (0, \pm 1, \pm 1, 0) \text{ et 2 points centraux} & (k_2 = 10) \\ \text{Bloc 3 : } (\pm 1, 0, \pm 1, 0) \cup (0, \pm 1, 0, \pm 1) \text{ et 2 points centraux} & (k_3 = 10) \end{cases}$$

La notation $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$ désigne l'ensemble constitué des points : $(1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 0)$, $(-1, 1, 0, 0)$ et $(-1, -1, 0, 0)$.

Quel plan d'expérience à facteurs quantitatifs constitué de 30 expériences est-il alors préférable d'utiliser? L'utilisateur peut, par exemple, choisir de privilégier la propriété d'isovariance par transformations orthogonales. Or, on vérifie en utilisant la proposition 3 que les plans proposés ici sont isovariants (avec $\lambda_2 = 4/5$ et $\lambda_4 = 8/15$ pour les plans 1 et 2, $\lambda_2 = 2/5$ et $\lambda_4 = 2/15$ pour le plan 3). Le critère d'isovariance ne permet donc pas de les départager. Nous pouvons maintenant tenter de les différencier à l'aide de la variance des prédicteurs donnée, d'après la proposition 5, par :

$$v_\eta(r) = v_0(r) + \sigma^2 \frac{\xi}{n(n-\xi)}$$

r désignant la distance entre un point de $\mathbb{R}^m$ et l'origine du domaine. Afin d'obtenir explicitement cette fonction, utilisons la valeur de $v_0\,(r)$ pour tout plan d'expérience isovariant (voir Khuri et Cornell [8]) :

$$\frac{1}{\sigma^2} v_0\,(r) = \frac{(2+m)\,n\lambda_4}{\phi} + \left(\frac{1}{n\lambda_2} - \frac{2n\lambda_2}{\phi}\right) r^2 + \left(\frac{1}{2n\lambda_4} + \frac{n\lambda_2^2 - n\lambda_4}{2\phi}\right) r^4$$

en notant : $\phi = (2+m)\,n^2\lambda_4 - mn^2\lambda_2^2$.

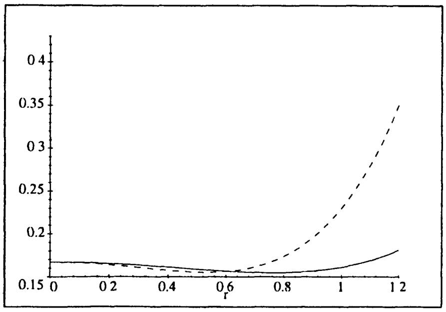

FIGURE 1
Fonctions de variance des plans 1, 2 *et* 3 *pour* $\eta = 0$
Plans : -1 *et* 2, $--3$

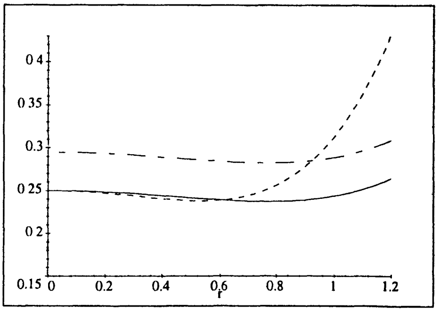

FIGURE 2
Fonctions de variance des plans 1, 2 *et* 3 *pour* $\eta = 0.25$
Plans : $-\cdot -1$, -2, $--3$

Les variances des prédicteurs des 3 plans considérés sont représentées sur les figures 1 et 2 (en prenant chaque fois $\sigma^2 = 1$). En ce qui concerne le modèle simple, nous constatons que pour des prédictions situées à une distance inférieure à approximativement 0.6 unités du centre du domaine, on a tout intérêt à utiliser le plan de Box et Behnken. *A contrario*, pour des prédictions plus lointaines l'expérimentateur pourra privilégier les plans 1 ou 2 (qui donnent les mêmes résultats vis-à-vis du modèle simple puisqu'ils ne comportent alors pas de blocs).

Pour le modèle linéaire mixte, la figure 2 nous indique dans un premier temps que les courbes associées aux plans 2 et 3 s'obtiennent à partir de celles de la figure 1 à une translation verticale près. Ceci est dû au fait que ces deux plans sont bloqués de la même manière (3 blocs de même taille à 10 unités expérimentales) donc la variance de leurs prédicteurs subit en tout point une augmentation identique par rapport à la valeur de $v_0(r)$. Nous pouvons alors reprendre les remarques de la figure 1 pour ces deux plans. En ce qui concerne maintenant le plan 1 il est clair que son emploi est à déconseiller au vu du comportement des deux autres plans d'expérience. La comparaison entre les deux plans composites centrés nous incite à penser qu'on a tout intérêt à se rapprocher le plus possible d'un plan en blocs de même taille afin de réduire au mieux la variance des prédicteurs.

Précisons maintenant la dégradation dans la qualité de l'estimation par passage du modèle simple au modèle linéaire mixte pour chacun des 3 plans. Représentons graphiquement l'accroissement entre $v_0(r)$ et $v_\eta(r)$ pour η fixé sous forme de pourcentage par rapport à $v_0(r)$. En d'autres termes, considérons la fonction :

$$\Phi_\eta(r) = 100\left[\frac{v_\eta(r) - v_0(r)}{v_0(r)}\right]$$

Les figures 3, 4 et 5 mettent en évidence la forte dégradation globale de la précision résultant du passage du modèle simple au modèle linéaire mixte, d'autant plus que les valeurs de η choisies ici sont relativement faibles. La comparaison des figures 3 et 4 nous permet encore de tirer la conclusion vue précédemment : le plan composite centré en blocs de même taille est préférable au plan composite centré en blocs de tailles inégales.

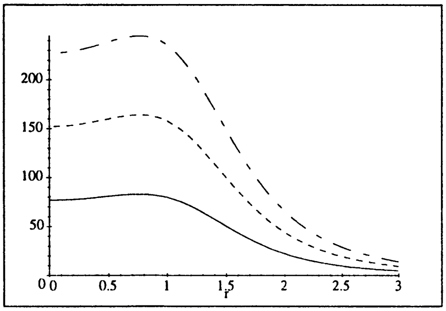

FIGURE 3
Fonctions Φ_η pour le plan 1
$\eta = -0.25, - - 0.5, - \cdot -0.75$

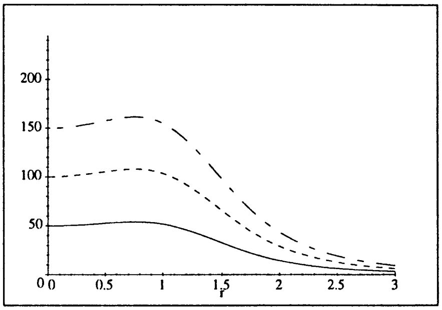

FIGURE 4
Fonctions Φ_η pour le plan 2
$\eta - 0.25, - - 0.5, - \cdot -0.75$

Remarque. Nous savons (*cf.* proposition 5) que pour tout $\eta \geqslant 0$, $v_\eta - v_0$ est une fonction convexe strictement croissante de ξ sur $[0, n[$. De plus, $\xi = \sum_i g(k_i)$ avec g fonction convexe sur $[0, +\infty[$, donc $v_\eta - v_0$ est une fonction convexe des k_i. Soit alors une famille de plans de même taille n, bloqués orthogonalement en b blocs, admettant la même fonction v_0. La recherche du minimum de $v_\eta - v_0$ sous la contrainte

$\sum_i k_i = n$ nous conduit au résultat suivant : s'il existe dans cette classe un plan tel que $\forall\, i = 1 \ldots b$, $k_i = n/b$ alors ce plan est préférable puisqu'il minimise $v_\eta - v_0$. De plus, si le nombre de blocs n'est pas fixé, c'est alors la configuration «limite» d'un plan en n blocs de taille 1 qui est préférable.

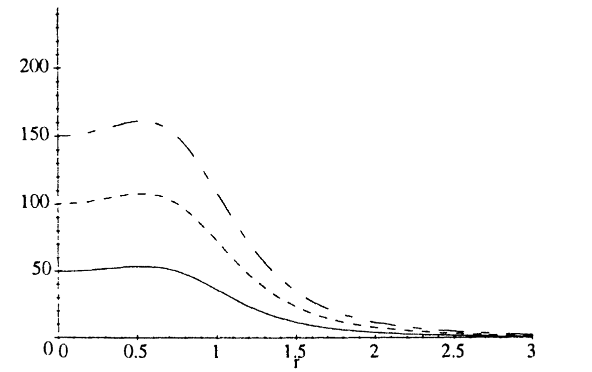

FIGURE 5
Fonctions Φ_η *pour le plan* 3
$\eta = -0.25, -- 0.5, -\cdot -0.75$

4. Prédiction et plans en blocs usuels

4.1. Plans en blocs usuels

Décomposons dans la suite le vecteur β en :

$$^t\beta = \left(\beta_0 \mid {}^t\beta_L \mid {}^t\beta_Q \mid {}^t\beta_I\right)$$

avec β_0 effet moyen général, β_L effets linéaires, β_Q effets quadratiques et β_I effets d'interaction. Tous les plans d'expérience utilisés sont supposés, de manière classique, être à matrice des moments canonique selon la définition suivante :

Définition 7

Un plan d'expérience est dit à matrice des moments **canonique** *pour un modèle d'ordre* 2 *si et seulement si :*

$$\frac{1}{n}\,{}^tXX = \begin{bmatrix} 1 & . & \lambda_2{}^t1_m & . \\ . & \lambda_2 I_m & . & . \\ \lambda_2 1_m & . & (c-1)\,\lambda_4 I_m + \lambda_4 J_m & . \\ . & . & . & \lambda_4 I_{\frac{m(m-1)}{2}} \end{bmatrix}$$

en désignant donc ici les seuls moments non nuls du plan jusqu'à l'ordre quatre par :

$$\forall\, i,j = 1 \ldots m \textit{ avec } i \neq j,\ \left[i^2\right] = \lambda_2,\ \left[i^2 j^2\right] = \lambda_4,\ \left[i^4\right] = c\lambda_4$$

Afin de prendre en compte l'organisation en blocs d'un plan d'expérience introduisons naturellement la notion de **moment par bloc** en posant :

$$\forall\, l = 1 \ldots b,\ \left[1^{\delta_1}\, 2^{\delta_2} \ldots m^{\delta_m}\right]_l = \frac{1}{k_l} \sum_{\text{bloc}l} x_{u1}^{\delta_1} x_{u2}^{\delta_2} \ldots x_{um}^{\delta_m}$$

Les plans en blocs utilisés actuellement vérifient presque tous les conditions suivantes que nous qualifions d'usuelles :

Définition 8

On appelle **plan en blocs usuel** *pour un modèle d'ordre* 2 *tout plan d'expérience à matrice des moments canonique régulière (i.e.* $rg\,(X) = p$*) et tel que :*

$$\boxed{\begin{cases} \forall\, i = 1 \ldots m, \forall\, l = 1 \ldots b, [i]_l = 0 \\ \forall\, i,j = 1 \ldots m \;\; avec \;\; i \neq j, \forall\, l = 1 \ldots b, [ij]_l = 0 \\ \forall\, l = 1 \ldots b, \left[1^2\right]_l = \left[2^2\right]_l = \ldots = \left[m^2\right]_l \end{cases}}$$

Désignons alors par μ_l *le moment pur d'ordre* 2 *commun aux unités du bloc* l *d'un plan d'expérience usuel.*

Remarque. Tout plan d'expérience **bloqué orthogonalement** à matrice des moments canonique est un plan en blocs usuel. En effet, un plan d'expérience est bloqué orthogonalement si et seulement si :

$${}^t X \left(I_n - \frac{1}{n} J_n\right) B = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, i,j = 1 \ldots m \text{ avec } i \neq j \text{ et } l = 1 \ldots b \\ [i]_l = [i]\,, [ij]_l = [ij]\,, \left[i^2\right]_l = \left[i^2\right] \end{cases}$$

On en déduit immédiatement la structure de plan en blocs usuel dès lors que la matrice des moments est canonique.

Il est prouvé dans Collombier et Tinsson [3] que la structure de plan en blocs usuel permet d'estimer les fonctions linéaires dépendant de β_L ou β_I ainsi que tout contraste sur les effets quadratiques de manière **uniformément optimale** en η. Il est aussi démontré que pour tout plan en blocs usuel $\hat{\beta}_L\,(\eta)$ et $\hat{\beta}_I\,(\eta)$ sont non corrélés avec les autres composantes de $\hat{\beta}\,(\eta)$ et :

$$\text{Cov}\ \hat{\beta}_L\,(\eta) = \frac{\sigma^2}{n\lambda_2} I_m,\ \text{Cov}\ \hat{\beta}_I\,(\eta) = \frac{\sigma^2}{n\lambda_4} I_{\frac{m(m-1)}{2}}$$

Pour $\hat{\beta}_0(\eta)$ et $\hat{\beta}_Q(\eta)$ il vient de même :

$$\operatorname{Var}\hat{\beta}_0(\eta) = \sigma^2\left(\frac{\delta_3+m\delta_4}{\phi}\right) \text{ et } \operatorname{Cov}\hat{\beta}_Q(\eta) = \frac{\sigma^2}{\delta_3}\left(I_m + \frac{\delta_2^2-\delta_1\delta_4}{\phi}J_m\right)$$

$$\operatorname{Cov}\left(\hat{\beta}_0(\eta), \hat{\beta}_Q(\eta)\right) = -\sigma^2\frac{\delta_2}{\phi}1_m$$

en notant :

$$\begin{cases} \delta_1 = n - \sum_{l=1}^{b}\frac{k_l^2\eta}{1+k_l\eta}, \delta_2 = n\lambda_2 - \left(\sum_{l=1}^{b}\frac{k_l^2\eta}{1+k_l\eta}\mu_l\right), \delta_3 = n\lambda_4(c-1) \\ \delta_4 = n\lambda_4 - \left(\sum_{l=1}^{b}\frac{k_l^2\eta}{1+k_l\eta}\mu_l^2\right), \phi = \delta_1(\delta_3+m\delta_4) - m\delta_2^2 \end{cases}$$

4.2. Précision de la prédiction

Evaluons ici, tout comme au paragraphe 3.2 dans le cas des plans bloqués orthogonalement, la dispersion de $\widehat{EY}(x)$. En posant $\sigma^2 = 1$, on obtient :

Proposition 9

Pour tout plan d'expérience en blocs usuel, la variance des prédicteurs de Gauss-Markov de $EY(x)$ est donnée pour le modèle linéaire mixte par :

$$\boxed{v_\eta(x) = f_\eta(r) + \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4}\right)\sum_{i=1}^{m}x_i^4}$$

avec : $f_\eta(r) = \dfrac{\delta_3+m\delta_4}{\phi} + \left(\dfrac{1}{n\lambda_2} - 2\dfrac{\delta_2}{\phi}\right)r^2 + \left(\dfrac{1}{2n\lambda_4} + \dfrac{\delta_2^2-\delta_1\delta_4}{\delta_3\phi}\right)r^4.$

Démonstration. Nous savons que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^m \text{ et } \forall\, \eta \geqslant 0, v_\eta(x) = \operatorname{Var}\left[{}^t g(x)\hat{\beta}(\eta)\right] = {}^t g(x)\left(\operatorname{Cov}\hat{\beta}(\eta)\right)g(x)$$

Nous pouvons alors dire, d'après les résultats du paragraphe 4.1, que pour tout plan en bloc usuel il vient avec $\sigma^2 = 1$:

$$v_\eta(x) = \frac{\delta_3+m\delta_4}{\phi} + \frac{1}{n\lambda_2}\sum_{i=1}^{m}x_i^2 + \frac{1}{\delta_3}\left(1+\frac{\delta_2^2-\delta_1\delta_4}{\phi}\right)\sum_{i=1}^{m}x_i^4 + \frac{1}{n\lambda_4}\sum\sum_{i<j}x_i^2x_j^2$$
$$-2\frac{\delta_2}{\phi}\sum_{i=1}^{m}x_i^2 + 2\frac{\delta_2^2-\delta_1\delta_4}{\delta_3\phi}\sum\sum_{i<j}x_i^2x_j^2$$

Après simplifications, on obtient :

$$v_\eta(x) = \frac{\delta_3 + m\delta_4}{\phi} + \left(\frac{1}{n\lambda_2} - 2\frac{\delta_2}{\phi}\right) r^2 + \frac{1}{\delta_3}\left(1 + \frac{\delta_2^2 - \delta_1\delta_4}{\phi}\right)\sum_{i=1}^{m} x_i^4 + \left(\frac{1}{n\lambda_4} + 2\frac{\delta_2^2 - \delta_1\delta_4}{\delta_3\phi}\right)\sum\sum_{i<j} x_i^2 x_j^2$$

Or :

$$r^4 = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^4 + 2\sum\sum_{i<j} x_i^2 x_j^2$$

donc :

$$\frac{1}{\delta_3}\left(1 + \frac{\delta_2^2 - \delta_1\delta_4}{\phi}\right)\sum_{i=1}^{m} x_i^4 + \left(\frac{1}{n\lambda_4} + 2\frac{\delta_2^2 - \delta_1\delta_4}{\delta_3\phi}\right)\sum\sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 = \left(\frac{1}{2n\lambda_4} + \frac{\delta_2^2 - \delta_1\delta_4}{\delta_3\phi}\right) r^4 + \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4}\right)\sum_{i=1}^{m} x_i^4 \qquad \blacksquare$$

Cette proposition nous permet là aussi de faire le lien avec l'isovariance puisque :

Corollaire 10

Un plan d'expérience en blocs usuel est **isovariant pour le modèle linéaire mixte** *quel que soit η si et seulement si il est* **isovariant pour le modèle linéaire simple**.

Démonstration. D'après la proposition 9 nous pouvons dire qu'un plan usuel est isovariant quel que soit η si et seulement si :

$$\forall\, x \in \mathcal{E}, v_\eta(x) = f_\eta(r) \Longleftrightarrow \frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4} = 0 \Longleftrightarrow c = 3$$

puisque $\delta_3 = n\lambda_4(c-1)$. Mais relativement au modèle simple tout plan à matrice des moments canonique est isovariant si et seulement si $c = 3$, d'où le résultat $\blacksquare$

4.3. Construction de graphes des variances extrêmes

Les graphes des variances extrêmes nous permettent d'évaluer la précision de la prédiction réalisée en représentant la variance moyenne ainsi que les variances extrémales de $\widehat{EY}$ sur toute sphère centrée. En notant $U_r = \left\{x \in \mathbb{R}^m \; {}^t xx = r^2\right\}$ on a alors la définition suivante :

Définition 11

On appelle **variance sphérique moyenne** *la quantité :*

$$\boxed{V_\eta (r) = \Psi \int_{U_r} v_\eta (x)\, dx \text{ avec } \Psi = \frac{1}{\displaystyle\int_{U_r} dx}}$$

On appelle **variances sphériques extrémales** *les quantités :*

$$\boxed{V\max_\eta (r) = \max_{x \in U_r} [v_\eta (x)] \text{ et } V\min_\eta (r) = \min_{x \in U_r} [v_\eta (x)]}$$

D'après les résultats du paragraphe 4.2 il vient :

Proposition 12

Pour tout plan d'expérience en blocs usuel, la **variance sphérique moyenne** *est donnée par :*

$$\boxed{V_\eta (r) = f_\eta (r) + \frac{3}{m+2} \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4} \right) r^4}$$

Démonstration. Par définition, il vient pour tout plan d'expérience usuel :

$$V_\eta (r) = \Psi \int_{U_r} v_\eta (x)\, dx = \Psi \int_{U_r} \left[f_\eta (r) + \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4} \right) \sum_{i=1}^{m} x_i^4 \right] dx$$

$$\Rightarrow V_\eta (r) = f_\eta (r) + \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4} \right) \Psi \int_{U_r} \sum_{i=1}^{m} x_i^4 dx$$

Or, la géométrie de U_r entraîne que :

$$\int_{U_r} x_1^4 dx = \int_{U_r} x_2^4 dx = \ldots = \int_{U_r} x_m^4 dx$$

donc :

$$\Psi \int_{U_r} \sum_{i=1}^{m} x_i^4 dx = \Psi \sum_{i=1}^{m} \int_{U_r} x_i^4 dx = m\Psi \int_{U_r} x_1^4 dx$$

La quantité $\Psi \int_{U_r} x_1^4 dx$ est bien connue puisqu'il s'agit du moment sphérique pur σ_4 d'ordre 4 (voir Giovannitti-Jensen et Myers [5] donné par :

$$\sigma_4 = \frac{3r^4}{m\,(m+2)}$$

Nous en déduisons alors la forme explicite de la variance sphérique moyenne ■

Remarque. Nous retrouvons bien ici que $V_\eta\,(r) = f_\eta\,(r) = v_\eta\,(x)$ lorsque le plan est isovariant ($c = 3$).

Proposition 13

Pour tout plan d'expérience en blocs usuel, les **variances extrémales** *sont données pour* $1 < c \leqslant 3$ *par :*

$$\boxed{\begin{aligned} V\min_\eta\,(r) &= f_\eta\,(r) + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4}\right) r^4 \\ V\max_\eta\,(r) &= f_\eta\,(r) + \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4}\right) r^4 \end{aligned}}$$

Lorsque $c \geqslant 3$ *nous avons le même résultat modulo une permutation de* $V\min$ *et* $V\max$.

Démonstration. Nous devons ici résoudre le problème :

$$(P) \quad : \text{optimiser } v_\eta\,(x) \text{ sachant que } \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = r^2$$

Comme $f_\eta\,(r)$ est constante sur toute sphère centrée il nous suffit alors d'optimiser la quantité :

$$\left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4}\right) \sum_{i=1}^{m} x_i^4$$

En ce qui concerne le coefficient prémultipliant, il vient :

$$\text{si } 1 < c \leqslant 3 \text{ alors } \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4}\right) \geqslant 0, \text{ si } c \geqslant 3 \text{ alors } \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4}\right) \leqslant 0.$$

Remarquons que l'on a toujours $c > 1$ puisque la matrice des moments du plan est, par définition, symétrique définie positive. Supposons dans la suite que $c \leqslant 3$ (si

$c \geqslant 3$ il suffira simplement de permuter le rôle des extrema obtenus). Le problème (P) se ramène alors à :

$$(P)\ :\ \text{optimiser}\ \sum_{i=1}^{m} x_i^4\ \text{sachant que}\ \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = r^2$$

La fonction à optimiser étant continue sur un compact atteint bien ses bornes. Celles-ci sont de plus obtenues immédiatement par le théorème des multiplicateurs de Lagrange qui nous dit que :

le maximum vaut r^4, il est atteint en $2m$ points de la forme :

$$(\pm r, 0, \ldots, 0)\ ,\ (0, \pm r, \ldots, 0) \ldots (0, 0, \ldots, \pm r)$$

le minimum vaut r^4/m, il est atteint en 2^m points de la forme :

$$\left(\pm r/\sqrt{m} \ldots \pm r/\sqrt{m}\right)$$

■

Corollaire 14

Pour tout plan d'expérience en blocs usuel, **l'amplitude** *des variations de la variance sur toute sphère centrée est une fonction indépendante de* η *, donnée explicitement par :*

$$(V\max - V\min)(r) = \left| \frac{m-1}{m} \left(\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4} \right) \right| r^4$$

Remarque. Nous pouvons utiliser les résultats de ce paragraphe dans le but de généraliser les résultats publiés actuellement pour le modèle simple. Reprenons ici l'étude du plan hybride de Roquemore 311B (voir Roquemore [10]) réalisée par Khuri [6]. On constate alors que ce plan d'expérience est bien à matrice des moments canonique avec :

$$\begin{cases} m = 3,\ n = 11,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_4 = 0.55,\ c = 4 \\ \delta_1 = \delta_2 = 11, \delta_3 = 1815, \delta_4 = 6.05 \text{ et } \phi = 36.3 \end{cases}$$

d'où :

$$f_0(r) = 1 - 0.515r^2 + 0.165r^4$$

On a de plus :

$$\frac{1}{\delta_3} - \frac{1}{2n\lambda_4} = -0.028$$

donc on obtient alors comme variance sphérique moyenne :

$$V_0(r) = 1 - 0.515r^2 + 0.149r^4$$

et comme variances sphériques extrémales :

$$\begin{cases} V\min_0(r) = 1 - 0.515r^2 + 0.138r^4 \\ V\max_0(r) = 1 - 0.515r^2 + 0.156r^4 \end{cases}$$

Ceci constitue une avancée par rapport aux résultats uniquement numériques obtenus par Khuri [6] à l'aide d'algorithmes d'optimisation des formes quadratiques. Remarquons aussi que cet exemple sort du cadre proposé par Borkowski [1] qui n'a déterminé explicitement les graphes des variances extrêmes que pour des plans composites centrés ou des plans de Box et Benhken.

4.4. Premier exemple d'application

Proposons maintenant une application des résultats de ce paragraphe à la construction explicite de graphes des variances extrêmes étendus au cas du modèle linéaire mixte. Pour cela, nous pouvons considérer un plan composite centré à 4 facteurs bloqué de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{Bloc 1 : fraction régulière } ABCD = 1_8 \text{ et 4 points centraux} & \text{(12 points)} \\ \text{Bloc 2 : fraction régulière } ABCD = -1_8 & \text{(8 points)} \\ \text{Bloc 3 : partie axiale telle que } \alpha = \sqrt{2} & \text{(8 points)} \end{cases}$$

Ce plan d'expérience est bien un plan en blocs usuel, non isovariant et non bloqué orthogonalement. On vérifie immédiatement que :

$$m = 4, n = 28, \lambda_2 = 5/7, \lambda_4 = 4/7, c = 3/2$$

De plus, la structure des blocs entraîne que l'on a :

$$b = 3, k_1 = 12, k_2 = k_3 = 8, \mu_1 = 2/3, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1/2$$

D'où :

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{4(72\eta + 7)}{(12\eta + 1)(8\eta + 1)}, \ \delta_2 = \dfrac{4(52\eta + 5)}{(12\eta + 1)(8\eta + 1)}, \ \delta_3 = 8 \\ \delta_4 = \dfrac{16(4\eta^2 + 11\eta + 1)}{(12\eta + 1)(8\eta + 1)}, \ \phi = \dfrac{32(9216\eta^3 + 3264\eta^2 + 364\eta + 13)}{(12\eta + 1)^2(8\eta + 1)^2} \end{cases}$$

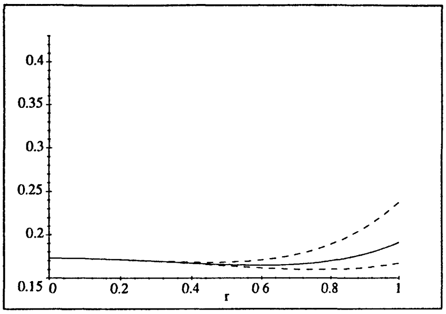

FIGURE 6
Graphe des variances extrêmes du CCD à 4 facteurs pour $\eta = 0$

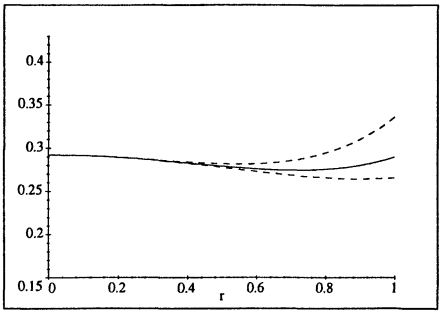

FIGURE 7
Graphe des variances extrêmes du CCD à 4 facteurs pour $\eta = 0.25$

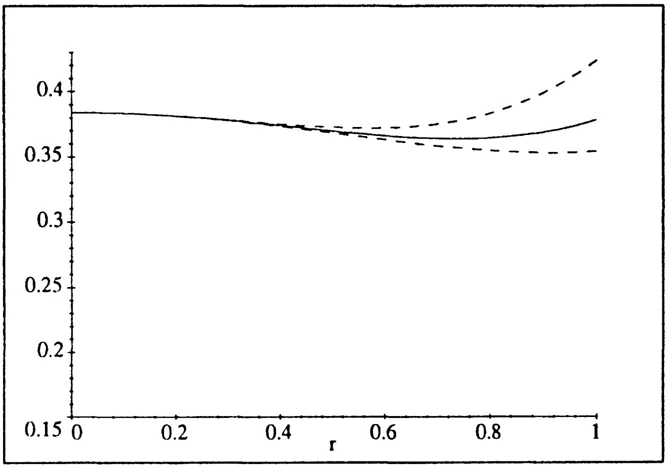

FIGURE 8
Graphe des variances extrêmes du CCD à 4 facteurs pour $\eta = 0.5$

L'examen des figures 6, 7 et 8 nous permet d'aboutir à la conclusion suivante : il y a une perte de précision dans l'estimation de la réponse moyenne par passage du modèle simple au modèle linéaire mixte, perte qui est de plus croissante en η. Prenons garde au fait que changer de valeur pour η induit la modification des 3 coefficients qui interviennent dans l'équation de chacune de ces courbes (coefficients relatifs à r^4, r^2 et r^0). Le passage de l'un à l'autre de ces 4 graphes ne se résume pas alors à une simple translation verticale comme pour les plans bloqués orthogonalement. Remarquons aussi que l'amplitude des variations de la variance sur toute sphère est bien la même quelque soit η (corollaire 14).

4.5. Deuxième exemple d'application

L'objectif de ce deuxième exemple est de faire le lien entre les paragraphes 3 et 4 en proposant une étude simultanée de plans bloqués orthogonalement et usuels. Considérons un phénomène dépendant de 5 facteurs, analysé à l'aide du plan composite centré suivant (le choix de $\alpha = 2$ ayant été fait dans le but d'obtenir l'isovariance) :

$$\begin{cases} \text{Bloc 1 : fraction régulière } ABCDE = 1_{16} & \text{(16 points)} \\ \text{Bloc 2 : partie axiale telle que } \alpha = 2 & \text{(10 points)} \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'il soit possible à l'expérimentateur de réaliser, au centre du domaine, 4 expériences supplémentaires. Il peut alors s'interroger sur la meilleure façon d'affecter celles-ci à chacun des blocs. Nous envisageons ici les 3 configurations suivantes :

Plan A : les 4 points centraux sont ajoutés au bloc 1.

Plan B : 2 points centraux sont ajoutés à chaque bloc.

Plan C : les 4 points centraux sont ajoutés au bloc 2.

Remarquons que le plan A est le seul des trois à être bloqué orthogonalement.

Au vu des fonctions de variance (figures 9, 10 et 11) nous constatons qu'il est préférable d'utiliser les plans A ou B puisqu'ils donnent des résultats sensiblement équivalents. Par contre, le choix de plan C est à déconseiller (du moins pour des prédictions proches du centre du domaine expériemental) car les variances obtenues sont alors bien supérieures à celles des deux autres plans.

Ce résultat est étonnant, en première analyse, car le plan C est celui qui se rapproche le plus d'une configuration en blocs de même taille, c'est-à-dire d'une configuration optimale en cas de blocage orthogonal (voir la remarque du paragraphe 3.3). Cependant, le raisonnement que nous avons tenu pour des plans bloqués orthogonalement découlait du fait que, dans ce cas, modifier la valeur de η n'entrainait que la modification du coefficient de r^0 dans l'équation de la fonction de variance. Pour le cas général des plan en blocs usuels, ce résultat n'est plus vrai puisque, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'exemple 1, tous les coefficients intervenant dans l'équation des fonctions de variance dépendent de η.

En conclusion, l'expérimentateur peut donc choisir d'utiliser ici les plans A ou B. Le choix du plan A semble cependant le plus judicieux. En effet, le blocage orthogonal de celui-ci va permettre de déterminer la plupart des estimateurs de manière plus simple que pour le plan B (voir Collombier et Tinsson [3]).

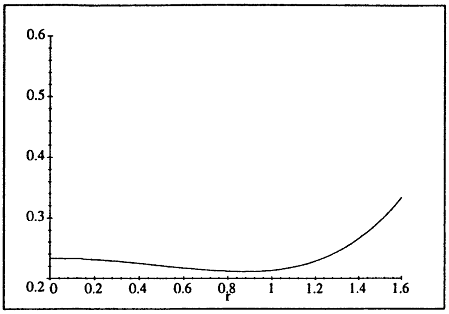

FIGURE 9
Fonction de variance des plans A, B et C pour $\eta = 0$

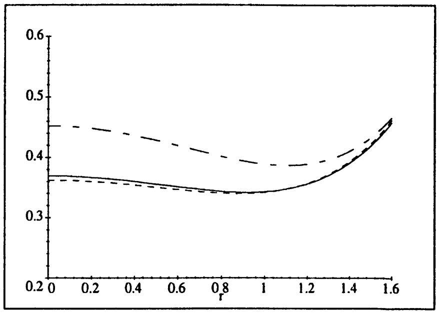

FIGURE 10
Fonctions de variance des plans A, B et C pour $\eta = 0.25$
Plans : – – A, – B, – · – C

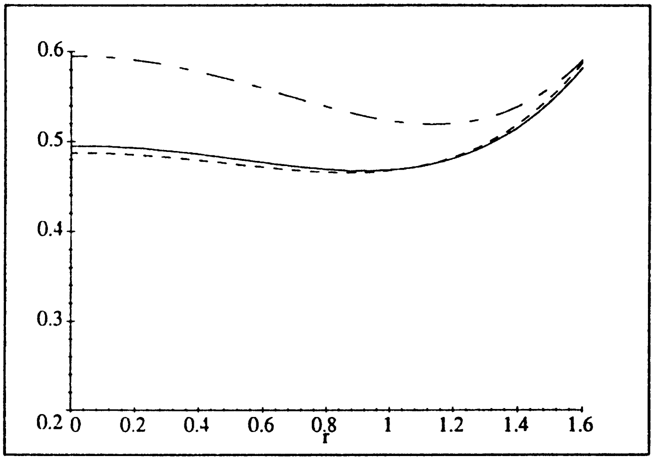

FIGURE 11
Fonctions de variance des plans A, B et C pour $\eta = 0.5$
Plans : – – A, – B, – · – C

Références

[1] BORKOWSKI J.J. (1995), Spherical prediction-variance properties of central composite and Box-Behnken designs. *Technometrics*, Vol. 37, No. 4, 399-410.

[2] CHRISTENSEN R. (1987), *Plane answers to complex questions*. Springers Texts in Statistics, Springer-Verlag.

[3] COLLOMBIER D. et TINSSON W. (1997), Propriétés caractéristiques de plans d'expérience en blocs à facteurs quantitatifs. *Revue de Statistique Appliquée*, XLV (1), 75-96.

[4] DRAPER R., GAFFKE N. et PUKELSHEIM F. (1993), Rotability of variance surfaces and moment matrices. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 36, 347-356.

[5] GIOVANNITTI-JENSEN A. et MYERS R.H. (1989), Graphical assessment of the prediction capability of response surface designs. *Technometrics*, Vol. 31, No. 2, 159-171.

[6] KHURI A.I. (1992), Diagnostic results concerning a measure of rotability. *J. R. Statist. Soc. B*, 54, No. 1, 253-267.

[7] KHURI A.I. (1992), Response surface models with random block effects. *Technometrics*, Vol. 34, No. 1, 26-37.

[8] KHURI A. et CORNELL J. (1987), *Response surfaces : designs and analyses*. Marcel Dekker, New-York.

[9] MYERS R.H. (1971), *Response surface methodology*. Boston : Allyn and Bacon.

[10] ROQUEMORE K.G. (1976), Hybrid designs for quadratic response surfaces. *Technometrics*, Vol. 18, No. 4, 419-423.

[11] VINING G.G. (1993), A computer program for generating variance dispersion graphs. *Journal of Quality Technology*, Vol. 25, No. 1, 45-58.