

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

A. CHAUCHE

E. PARENT

**Sur l'apport de la statistique bayésienne au contrôle de la qualité par attribut. Partie 3 : contrôle rétrospectif par détection de changement dans une série de variables binomiales**

*Revue de statistique appliquée*, tome 46, n° 1 (1998), p. 5-29

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1998\\_\\_46\\_1\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1998__46_1_5_0)

© Société française de statistique, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR L'APPORT DE LA STATISTIQUE BAYÉSIENNE  
AU CONTRÔLE DE LA QUALITÉ PAR ATTRIBUT;  
PARTIE 3 : CONTRÔLE RÉTROSPECTIF PAR DÉTECTION  
DE CHANGEMENT DANS UNE SÉRIE  
DE VARIABLES BINOMIALES**

A. Chaouche et E. Parent

*ENGREF, laboratoire de Gestion du Risque en Sciences de l'Eau (GRESE),  
19 avenue du Maine, 75732 Paris Cedex 15*

**RÉSUMÉ**

Cette étude propose un modèle bayésien de détection de la date de changement dans une série de variables binomiales. La distribution *a posteriori* de la date du changement est obtenue sous une forme explicite. L'intensité du changement est décrite par la distribution *a posteriori* de la différence entre les proportions de défectueux avant et après changement; une évaluation numérique de cette distribution est obtenue par simulation stochastique (échantillonnage de Gibbs). La détection de l'instant le plus probable d'un changement dans un processus de fabrication et l'obtention de lois pour les proportions de défectueux avant et après changement permettent de construire une stratégie, dans le cas d'un contrôle rétrospectif de la qualité par attribut, faisant intervenir des enjeux économiques. Les résultats sont illustrés par des données simulées. Un modèle décisionnel de contrôle rétrospectif de la qualité, fondé sur l'estimation de la date de changement par le maximum de vraisemblance, ainsi qu'un autre fondé sur la méthode des CUSUM, sont comparés à un modèle décisionnel bayésien complet : sur un grand nombre de données simulées, ce dernier s'avère en moyenne meilleur.

*Mots-clés : détection de changement, modèle binomial, décision bayésienne, contrôle rétrospectif de la qualité, échantillonnage de Gibbs, vraisemblance, CUSUM.*

**ABSTRACT**

A bayesian model to detect the change point and the magnitude of change in a sequence of binomial variables is considered. The posterior distribution of the location of change is obtained under an explicit form. The underlying intensity of change is described by the posterior law of the shift in means before and after the change: a Markov sampling technique is used to derive a numerical evaluation of this distribution. The inference of the most probable change point in the monitoring of a mass production process and the posterior distributions of the average number of defective items before and after the change allow to design a strategy in the off line monitoring of quality control by attribute and to take into account economical consequences. These results are illustrated on simulated data. Two decisionnal approaches for off line quality control based on change point estimation by maximum likelihood and by CUSUM are compared with the bayesian decision analysis: on a large amount of simulated data the latter performs better.

*Keywords : change point detection, binomial model, bayesian decision analysis, off line quality control, Gibbs sampling, likelihood, CUSUM.*

## 1. Introduction

Les premières approches du contrôle simple de la qualité par attribut supposent paradoxalement que la qualité, décrite par la proportion  $\theta$  de défectueux dans le lot soumis à contrôle, n'a pas varié dans le temps : on suppose en effet que le processus industriel se déroule entièrement sous un seul de deux états possibles : un état sous contrôle  $H_{nc}$  ou un état hors norme  $H_c$  (dans la suite on utilise les indices  $nc$  pour *non-changement* et  $c$  pour *changement*) et le problème statistique consiste à inférer dans quelle situation se trouve le processus à partir des informations obtenues par échantillonnage. Que ce soit par technique statistique classique (AFNOR [1]) ou par technique bayésienne (Parent et al, 1995 [21]), l'idée sous-jacente est généralement de construire des tests et des estimateurs optimisant certes des critères d'efficacité (planification expérimentale), mais en s'appuyant sur une hypothèse implicite de stationnarité : toutes les observations sont générées soit par l'état  $H_{nc}$  soit par l'état  $H_c$  : or si le lot résulte d'opérations répétitives de fabrication, la qualité résultant de chacune de ces opérations a pu varier. On peut supposer que la qualité se détériore de façon continue avec l'usure d'un organe de la machine, ou qu'elle s'améliore brusquement après la relève d'une équipe ou une livraison de matière première... Il paraît d'emblée intéressant d'un point de vue économique d'analyser le paramètre de qualité afin de remplacer les deux décisions habituelles : soit rejeter tout le lot, soit accepter tout le lot, par des décisions qui prennent en compte le changement de la qualité sous les effets inconnus de nombreux facteurs. Dans ces conditions on ne fait plus l'hypothèse arbitraire de stationnarité : la variabilité des observations résulte non seulement des aléas de la mesure mais aussi d'un possible passage du processus à tout instant d'un état ( $H_{nc}$ ) à l'autre ( $H_c$ ).

Ces deux sources de variabilité rendent l'inférence plus délicate et la présente étude traite du cas simple d'un unique changement avec saut brusque de la proportion de défectueux pour une série de variables binomiales; nous supposons que le responsable de la qualité analyse une séquence de mesures par attribut de la qualité et se propose de porter un jugement sur cette production (l'analyse est faite après coup, une fois connus les résultats des mesures relative à la totalité de la séquence). La connaissance de la date et de l'amplitude d'un dérèglement peut ainsi être utilisée pour éliminer une tranche de la production et pour remédier au dysfonctionnement de la chaîne de production. On propose donc ici une modélisation décisionnelle complète du contrôle par attribut (avec un changement brusque éventuel du niveau de la qualité). Les résultats du modèle décisionnel bayésien sont comparés avec les résultats obtenus par chacune des deux méthodes les plus couramment employées dans la pratique pour détecter un changement : la carte CUSUM et l'inférence classique fondée sur le maximum de vraisemblance. La détection en temps réel d'un changement, beaucoup plus complexe, n'est pas abordée.

Les méthodes de détection rétrospective (rétrospective par opposition à séquentielle ou en temps réel) de changement dans les séries chronologiques sont nombreuses, de complexité et de robustesse très diverses. La plupart des auteurs se concentrent sur les méthodes de détection d'un changement brusque de la moyenne des séquences d'observations indépendantes en utilisant une procédure des familles suivantes :

- tests non paramétriques : Berryman (1984) [7],
- techniques fondées sur les rapports de vraisemblance : Hinkley (1970) [14], Hinkley & Hinkley (1970) [15], Ghorbanzadeh (1995) [12], Ghorbanzadeh & Lounès (1996) [13].
- approches bayésiennes : Chernoff & Zacks (1964) [9], Box & Tiao (1965) [8], Lee & Heghinian (1977) [18], Bernier (1977) [5] et Bernier (1993) [6], Barry & Hartigan (1993) [2], Stephens (1994) [27].
- segmentation par exploration systématique : Hubert (1989) [16] a proposé une procédure de segmentation, couplée au test de Scheffé, pour détecter toutes les ruptures significatives dans une série.

Les résultats fournissent une estimation du moment éventuel de changement et, le cas échéant, de son amplitude.

Dans le cadre de la statistique classique, le problème de la détection de changement est étudié dans trois champs distincts : la théorie du signal (IEEE, Automatica), les processus (Stochastic Hydraulics and Hydrology, Annals of Statistics) et le contrôle de la qualité (Biometrika, Technometrics, J. of Quality Technology, R.S.A.).

En France, les équipes de Basseville et Benvéniste [3], celle de Duby et Daudin [10] [17] et celle de Picard [22] travaillent sur les tests de rupture et sur l'estimation de la date et de l'amplitude des changements avec la loi des estimateurs correspondants.

Dans la présente étude une attention toute particulière est portée au courant dit de statistique bayésienne qui exploite les idées de SAVAGE (1954) [25] et associe la probabilité *a priori* à une quantification du degré de croyance subjectif; ce dernier est mis à jour par apport d'information, grâce à la formule de Bayes interprétée comme la reconstruction « des probabilités des causes ».

Dans les publications citées, l'hypothèse explicite est l'existence d'un changement; l'hypothèse alternative de stationnarité reste implicite : c'est l'incapacité du modèle à décrire la réalité observée qui étaye l'hypothèse alternative; cela conduit à une interprétation un peu délicate des résultats du modèle lorsque la date de changement est proche des extrémités de la série observée.

Le présent article expose un modèle plus complet, construit en deux étapes :

- un premier modèle ( $M_1$ ) semblable aux modèles des publications citées, qui suppose l'existence d'un changement de type saut de moyenne;
- un second modèle ( $M_2$ ) qui, en explicitant l'hypothèse de stationnarité, complète le précédent et permet une prise en compte des effets de bord de la série.

Les autres particularités de cette étude sont :

- l'intérêt porté, non seulement à la date du changement, mais aussi à l'intensité du changement : l'analyse conjointe de ces deux paramètres éclaire les situations de forte incertitude.
- l'insertion du modèle ( $M_2$ ) dans un cadre décisionnel bayésien complet, l'objectif étant le choix de l'action optimale parmi un ensemble d'actions, avec prise en compte de la globalité des distributions *a posteriori* des paramètres.

## 2. Rappels sur la modélisation d'une rupture avec saut

Soit  $X_t$  une variable binomiale de paramètres  $\theta_t$  et  $N$  ( $\theta_t$  pourrait être la proportion inconnue d'objets défectueux dans une fabrication,  $N$  la taille du lot contrôlé;  $X_t$  est alors le nombre d'objets défectueux dans le lot);  $t$  varie de 1 à  $n$  et décrit les instants du contrôle.

### 2.1. Modèle $M_1$

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  une suite de variables binomiales indépendantes; chacune de ces variables  $X_t$  représente le nombre de défectueux observé à la date  $t$  lors d'un contrôle répétitif par attribut, effectué sur un échantillon de taille  $N_t$ .

$$\begin{cases} \text{pour } t = 1, \dots, \tau & \theta_t = \theta_1 & X_t \rightsquigarrow \mathcal{B}(\theta_1, N_t) \\ \text{pour } t = \tau + 1, \dots, n & \theta_t = \theta_2 & X_t \rightsquigarrow \mathcal{B}(\theta_2, N_t) \end{cases}$$

avec  $1 \leq \tau \leq n - 1$  et  $\theta_1 \neq \theta_2$

Nous supposons pour simplifier, que  $N_t$  est fixe ( $N_t = N$ ). Les paramètres de ce modèle sont :

$\theta_1$  proportion de défectueux avant rupture

$\theta_2$  proportion de défectueux après rupture

$\tau$  date de la rupture

Le modèle  $M_1$  suppose l'existence d'une rupture, celle-ci intervenant entre les dates  $\tau$  et  $\tau + 1$ .

#### 2.1.1. Information

C'est la suite des observations constituées par le nombre d'objets défectueux relevés au contrôle à date  $t$  dans un échantillon de taille  $N$ .

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\tau, x_{\tau+1}, \dots, x_n)$$

#### 2.1.2. Vraisemblance

Le principe d'indépendance expérimentale stipule que si chacune des mesures à date  $t$  est effectuée dans des conditions expérimentales indépendantes, alors les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_\tau, X_{\tau+1}, \dots, X_t$  sont statistiquement indépendantes.

En posant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\tau} x_i &= S_1(\tau) \quad (\text{nombre total de défectueux avant rupture}) \\ \sum_{i=\tau+1}^n x_i &= S_2(\tau) \quad (\text{nombre total de défectueux après rupture}), \end{aligned}$$

la vraisemblance de  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\tau, x_{\tau+1}, \dots, x_n)$  s'écrit :

$$L(\mathbf{x} | \theta_1, \theta_2, \tau) = c(\mathbf{x}) \theta_1^{S_1(\tau)} (1 - \theta_1)^{\tau N - S_1(\tau)} \theta_2^{S_2(\tau)} (1 - \theta_2)^{(n-\tau)N - S_2(\tau)} \quad (1)$$

$$\text{avec } c(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \binom{N}{x_i}$$

Cette expression de la vraisemblance montre qu'il n'existe pas de statistique exhaustive du triplet  $(\theta_1, \theta_2, \tau)$ , ce qui rend l'estimation statistique délicate; ceci est dû à la méconnaissance du paramètre  $\tau$  : par contre, à  $\tau$  connu,  $S_1(\tau)$ ,  $S_2(\tau)$  fournissent un résumé exhaustif de  $\theta_1, \theta_2$ .

On se place dans un cadre de statistique bayésienne dans lequel l'incertitude sur les paramètres est décrite par des distributions de probabilité sur les valeurs de ces paramètres. Pour le cas du contrôle par attribut de la qualité, ce cadre est détaillé dans [21].

### 2.1.3. Loi a priori des paramètres

Smith (1975) [26] utilise des lois beta incomplètes pour exprimer la croyance *a priori* sur les lois de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  et examine les cas suivants :

1. les lois *a priori* de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont indépendantes,
2.  $\theta_1 < \theta_2$ ,
3.  $\theta_1 > \theta_2$ ,

Plus généralement Berger (1985) [4] récapitule une dizaine de techniques opérationnelles pour construire ces lois de probabilité subjective. Si par exemple on sait que l'on ne peut aller que vers une dégradation, une loi *a priori* de la forme :

$$\frac{Be_{\alpha_1\beta_1}(\theta_1)Be_{\alpha_2\beta_2}(\theta_2)1_{\theta_2>\theta_1}}{\iint Be_{\alpha_1\beta_1}(\theta_1)Be_{\alpha_2\beta_2}(\theta_2)1_{\theta_2>\theta_1}d\theta_1d\theta_2}$$

(où  $Be_{\alpha\beta}$  désigne une loi beta d'hyperparamètres  $\alpha$  et  $\beta$ ) est candidate à la modélisation de cette dépendance entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ; en effet la famille des lois beta offre :

- une grande souplesse pour représenter les connaissances *a priori* sur des proportions et,
- du fait qu'elle est la conjuguée naturelle de la loi binomiale, une grande commodité pour les calculs.

Dans la présente étude on suppose l'indépendance *a priori* des variables aléatoires  $\theta_1, \theta_2, \tau$  :

$$b(\theta_1, \theta_2, \tau) = b_1(\theta_1) \times b_2(\theta_2) \times b_3(\tau)$$

En ce qui concerne la loi *a priori*  $b_3(\tau)$  de la date de changement, le choix d'une loi discrète uniforme semble représenter de façon appropriée une connaissance vague ne privilégiant aucun des  $(n - 1)$  instants possibles.

Pour la commodité des calculs nous adopterons pour lois *a priori* de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  des lois beta complètes :

$$b_1(\theta_1) = Be_{\alpha_1\beta_1}(\theta_1) = \frac{\theta_1^{\alpha_1-1}(1-\theta_1)^{\beta_1-1}}{\int_{\theta_1} \theta_1^{\alpha_1-1}(1-\theta_1)^{\beta_1-1}d\theta_1}$$

$$b_2(\theta_2) = Be_{\alpha_2\beta_2}(\theta_2) = \frac{\theta_2^{\alpha_2-1}(1-\theta_2)^{\beta_2-1}}{\int_{\theta_2} \theta_2^{\alpha_2-1}(1-\theta_2)^{\beta_2-1}d\theta_2}$$

#### 2.1.4. Loi *a posteriori* de $\theta$ ( $\pi(\theta|\mathbf{x})$ ) et loi prédictive des observations ( $g(\mathbf{x})$ )

Les propriétés des conjuguées naturelles (à  $\tau$  fixé) pour la binomiale permettent d'aboutir à des lois *a posteriori* explicites :

En notant  $\theta$  le triplet  $(\theta_1, \theta_2, \tau)$  et en appliquant la règle de Bayes, il vient

$$\pi(\theta|\mathbf{x}) = \frac{L(\mathbf{x}|\theta)b(\theta)}{\int_{\Theta} L(\mathbf{x}|\theta)b(\theta)d\theta} = \frac{L(\mathbf{x}|\theta)b(\theta)}{g(\mathbf{x})}$$

En notant :

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = B(a, b)$$

il vient

$$g(\mathbf{x}) = \frac{c(\mathbf{x})}{B(\alpha_1, \beta_1)B(\alpha_2, \beta_2)} \sum_{\tau=1}^{n-1} B(S_1(\tau) + \alpha_1, \tau N - S_1(\tau) + \beta_1) \\ \times B(S_2(\tau) + \alpha_2, (n - \tau)N - S_2(\tau) + \beta_2) \times b_3(\tau)$$

En posant :

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + S_1(\tau); \quad \alpha'_2 = \alpha_2 + S_2(\tau); \\ \beta'_1 = \beta_1 + \tau N - S_1(\tau); \quad \beta'_2 = \beta_2 + (n - \tau)N - S_2(\tau);$$

on trouve finalement :

$$g(\mathbf{x}) = \frac{c(\mathbf{x})}{B(\alpha_1, \beta_1)B(\alpha_2, \beta_2)} \sum_{\tau=1}^{n-1} (B(\alpha'_1, \beta'_1) \times B(\alpha'_2, \beta'_2) \times b_3(\tau)) \quad (2)$$

$$\pi(\theta_1, \theta_2, \tau | \mathbf{x}) = \frac{\theta_1^{\alpha'_1 - 1} (1 - \theta_1)^{\beta'_1 - 1} \theta_2^{\alpha'_2 - 1} (1 - \theta_2)^{\beta'_2 - 1} b_3(\tau)}{\sum_{\tau=1}^{n-1} (B(\alpha'_1, \beta'_1) \times B(\alpha'_2, \beta'_2) \times b_3(\tau))} \quad (3)$$

Afin d'alléger les écritures :

- la dépendance vis-à-vis de  $\tau$  et  $\mathbf{x}$  des fonctions  $\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2$  n'a pas été explicitée dans les équations précédentes;
- de même  $S_1$  et  $S_2$  dépendent aussi de  $\mathbf{x}$ ;
- nous posons  $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sum_{\tau=1}^{n-1} B(\alpha'_1, \beta'_1) \times B(\alpha'_2, \beta'_2) \times b_3(\tau)$ .

### 2.1.5. Loïs marginales de $\theta_1$ et $\theta_2$

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1 | \mathbf{x}) &= \frac{1}{\mathbf{h}(\mathbf{x})} \sum_{\tau=1}^{n-1} \theta_1^{\alpha'_1 - 1} (1 - \theta_1)^{\beta'_1 - 1} b_3(\tau) \int_0^1 \theta_2^{\alpha'_2 - 1} (1 - \theta_2)^{\beta'_2 - 1} d\theta_2 \\ \pi(\theta_1 | \mathbf{x}) &= \frac{1}{\mathbf{h}(\mathbf{x})} \sum_{\tau=1}^{n-1} B(\alpha'_2, \beta'_2) b_3(\tau) \theta_1^{\alpha'_1 - 1} (1 - \theta_1)^{\beta'_1 - 1} \end{aligned} \quad (4)$$

La loi marginale de  $\theta_1$  apparaît comme une somme pondérée de lois beta; de même pour la loi marginale de  $\theta_2$  :

$$\pi(\theta_2 | \mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{h}(\mathbf{x})} \sum_{\tau=1}^{n-1} B(\alpha'_1, \beta'_1) b_3(\tau) \theta_2^{\alpha'_2 - 1} (1 - \theta_2)^{\beta'_2 - 1} \quad (5)$$

### 2.1.6. Loi marginale de $\tau$ (loi de la date de rupture)

$$\begin{aligned} \pi(\tau | \mathbf{x}) &= \int_0^1 \int_0^1 \pi(\theta_1, \theta_2, \tau | \mathbf{x}) d\theta_1 d\theta_2 \\ \pi(\tau | \mathbf{x}) &= \frac{1}{\mathbf{h}(\mathbf{x})} B(\alpha'_1, \beta'_1) B(\alpha'_2, \beta'_2) b_3(\tau) \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.1.7. Loïs conditionnelles

$$\begin{aligned} \pi(\theta_1, \theta_2 | \tau, \mathbf{x}) &= \frac{\pi(\theta_1, \theta_2, \tau | \mathbf{x})}{\pi(\tau | \mathbf{x})} \\ \pi(\theta_1, \theta_2 | \tau, \mathbf{x}) &= \frac{\theta_1^{\alpha'_1 - 1} (1 - \theta_1)^{\beta'_1 - 1} \theta_2^{\alpha'_2 - 1} (1 - \theta_2)^{\beta'_2 - 1}}{B(\alpha'_1, \beta'_1) B(\alpha'_2, \beta'_2)} \end{aligned}$$



$$\pi(\theta_1|\theta_2, \tau, \mathbf{x}) = Be(\alpha'_1, \beta'_1) = \pi(\theta_1|\tau, \mathbf{x}) \quad (7)$$

$$\pi(\theta_2|\theta_1, \tau, \mathbf{x}) = Be(\alpha'_2, \beta'_2) = \pi(\theta_2|\tau, \mathbf{x}) \quad (8)$$

Ainsi,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  conditionnellement à  $\tau$  et à  $\mathbf{x}$  sont des variables aléatoires indépendantes.

Pour ce qui est de l'instant de rupture  $\tau$ ,

$$\pi(\tau|\theta_1, \theta_2, \mathbf{x}) = \frac{\theta_1^{\alpha'_1-1}(1-\theta_1)^{\beta'_1-1}\theta_2^{\alpha'_2-1}(1-\theta_2)^{\beta'_2-1}b_3(\tau)}{\sum_{\tau=1}^{n-1} \theta_1^{\alpha'_1-1}(1-\theta_1)^{\beta'_1-1}\theta_2^{\alpha'_2-1}(1-\theta_2)^{\beta'_2-1}b_3(\tau)} \quad (9)$$

## 2.2. Résultats du modèle $M_1$ et commentaires

La comparaison de distributions *a posteriori* de la date de changement  $\tau$ , obtenues par la formule 6 et relatives à :

- des séries stationnaires (figures 1.a),
- à des séries non-stationnaires par construction (figures 1.b),

permet de constater que, lorsque la série est non-stationnaire et que l'information apportée n'est pas trop pauvre, la distribution *a posteriori* présente toujours un mode qui se détache nettement des autres. Inversement une distribution sans mode bien détaché est interprétée comme une incapacité du modèle  $M_1$  à détecter un changement; on en conclut que celui-ci n'existe pas.

On voit que le modèle  $M_1$  permet un test classique de l'hypothèse  $H_c$  dans lequel l'hypothèse alternative  $H_{nc}$  n'est pas formulée de manière explicite.

Par information *pauvre* nous entendons une série trop courte (moins de 20 observations), ou une des sous-séries trop courte (10 observations semblent constituer un minimum), ou un contraste trop faible entre les deux sous-séries stationnaires. Cependant les simulations ont été faites avec des valeurs de paramètres  $\theta_1, \theta_2$  assez faibles et pas trop contrastées afin de décrire l'évolution de la qualité au cours d'un processus répétitif de fabrication. Quand le contraste entre les sous-séries augmente la détection de la date de rupture par le mode devient plus précis (figure 1).

Dans le cas d'une rupture trop proche d'une extrémité de la série, la procédure perd en robustesse et en précision; en présence d'une série stationnaire, la distribution des dates de rupture présente ses plus grandes valeurs aux deux extrémités de la série; il est par conséquent difficile de faire la distinction entre une vraie rupture, proche d'une extrémité, et un effet de bord. Ceci restreint l'utilisation de cette procédure, en temps réel, comme outil d'alerte immédiate, dans le cas d'un dérèglement d'une opération de fabrication.

## 2.3. Modèle $M_2$

Des travaux mettant en oeuvre des modèles de type  $M_1$ , utilisent une distribution *a priori* de la date de changement en forme de U, qui charge les dates proches

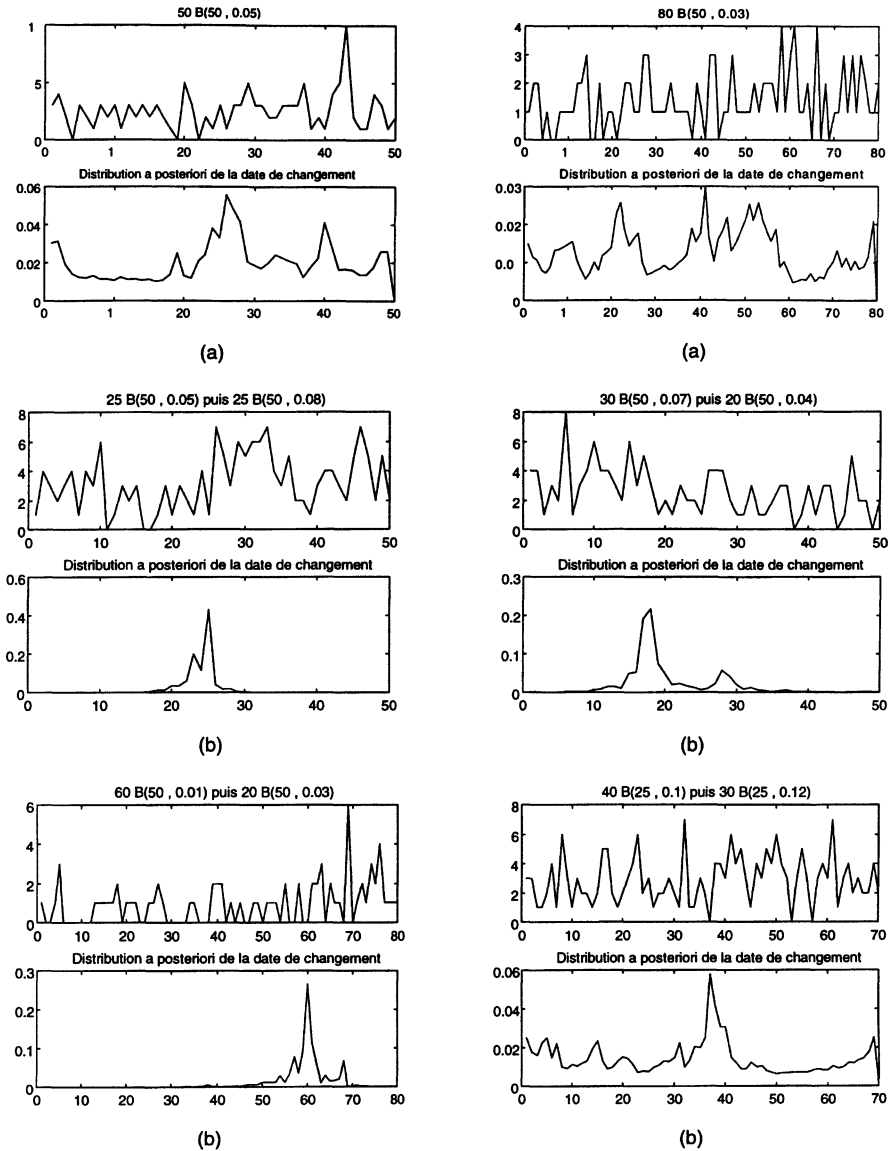


FIGURE 1

*Exemples de séries de variables binomiales et distributions a posteriori des dates de rupture*

*(a) séries stationnaires*

*(b) séries non-stationnaires*

des extrémités de la série; le modèle  $M_2$  montrera comment le choix d'une telle distribution *a priori* revient à accorder à l'hypothèse de non changement (qui reste non formulée) une probabilité *a priori* non nulle.

Le modèle  $M_1$  est complété dans le but d'obtenir un modèle  $M_2$  qui explicite deux hypothèses – celle de stationnarité de la série et celle de non-stationnarité – et attribue une probabilité non-nulle à l'hypothèse  $H_{nc}$ .

Le modèle  $M_2$  peut se résumer en :

$$\begin{cases} H_{nc} : & \text{absence de changement} \\ H_c : & \text{modèle } M_1 \end{cases}$$

Dans ce modèle la nature est dans deux états :

- un état dit «antérieur» caractérisé par  $\theta_1$
- un état (postérieur au précédent), caractérisé par  $\theta_2$ .

L'hypothèse  $H_{nc}$  équivaut à : «soit  $\mathbf{x}$  est régi entièrement par l'état  $\theta_1$ , soit  $\mathbf{x}$  est régi entièrement par l'état  $\theta_2$ »; alors que dans le cadre de l'hypothèse  $H_c$  : « $\mathbf{x}$  est régi en partie par l'état  $\theta_1$  puis en partie par l'état  $\theta_2$ ».

**Vraisemblance de  $\mathbf{x}$  sous  $(H_{nc}, \theta_1)$**

$$L_1(\mathbf{x} | H_{nc}, \theta_1) \propto \theta_1^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta_1)^{nN - \sum_{i=1}^n x_i}$$

**Vraisemblance de  $\mathbf{x}$  sous  $(H_{nc}, \theta_2)$**

$$L_2(\mathbf{x} | H_{nc}, \theta_2) \propto \theta_2^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta_2)^{nN - \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\text{De la convention d'écriture : } \begin{cases} S_1(0) & = 0 \\ S_2(n) & = 0 \end{cases}$$

$$\text{et sachant que } S_1(n) = S_2(0) = \sum_{i=1}^n x_i,$$

il résulte :

$$L_1(\mathbf{x} | H_{nc}, \theta_1) \propto \theta_1^{S_1(n)} (1 - \theta_1)^{nN - S_1(n)} \theta_2^{S_2(n)} (1 - \theta_2)^{(n-n)N - S_2(n)} \\ \propto L(\mathbf{x} | \theta_1, \theta_2, \tau = n)$$

$$L_2(\mathbf{x} | H_{nc}, \theta_2) \propto \theta_1^{S_1(0)} (1 - \theta_1)^{0 \times N - S_1(0)} \theta_2^{S_2(0)} (1 - \theta_2)^{(n-0)N - S_2(0)} \\ \propto L(\mathbf{x} | \theta_1, \theta_2, \tau = 0)$$

En modifiant les bornes de sommation de la vraisemblance du modèle  $M_1$ , de sorte que 0 et  $n$  soient des valeurs possibles de  $\tau$ , les vraisemblances sous  $H_{nc}$  ou

sous  $H_c$  ont alors la même forme :  $L(\mathbf{x}|\theta_1, \theta_2, \tau)$  (équation 1); pour ce qui est des vraisemblances, on établit ainsi :

$$\begin{aligned} H_{nc} &\iff \tau = 0 \text{ ou } \tau = n \\ H_c &\iff 1 \leq \tau \leq n - 1 \end{aligned} \quad (10)$$

Si dans les équations (2) à (6), on étend les sommations aux valeurs  $\tau = 0$  et  $\tau = n$ , ces mêmes équations sont valables dans le cadre du modèle  $M_2$ .

La loi *a priori* de  $\tau$  est modifiée pour tenir compte :

- des équivalences (10),
- d'une pondération  $\beta$  sur  $H_{nc}$  et  $1 - \beta$  sur  $H_c$ ,
- à l'intérieur de  $H_{nc}$  d'une pondération  $1 - \alpha$  sur  $\tau = 0$  et  $\alpha$  sur  $\tau = n$ ,
- à l'intérieur de  $H_c$  d'une répartition uniforme de la date de changement sur les  $n - 1$  autres valeurs de  $\tau$ .

Ainsi la loi *a priori* de  $\tau$  devient :

$$\begin{cases} b_3(\tau = 0) = (1 - \alpha)\beta \\ b_3(\tau = n) = \alpha\beta \\ b_3(\tau|\tau \neq 0, \tau \neq n) = (1 - \beta)/(n - 1) \end{cases} \quad (11)$$

Elle correspond à une pondération *a priori* de  $\beta$  en faveur de l'hypothèse  $H_{nc}$  répartie en  $\alpha$  sur l'état  $\theta_1$  et  $(1 - \alpha)$  sur l'état  $\theta_2$ , tandis que l'hypothèse de changement est répartie uniformément sur les  $(n - 1)$  valeurs de  $\tau = 1, \dots, n - 1$ .

On passe alors du modèle  $M_2$  au modèle  $M_1$  en faisant  $\beta = 0$ .

En l'absence d'information autre que celle apportée par  $x$ , nous choisissons dans la suite de cette étude  $\alpha = \beta = 1/2$ .

### 2.3.1. Loi *a posteriori* de l'intensité de la rupture

Pour faire apparaître le paramètre d'intérêt  $\delta$ , intensité du changement, posons  $\theta = \theta_1$  et  $\theta_2 = \theta + \delta$ .

L'équation 3 devient :

$$\pi(\theta, \delta, \tau|\mathbf{x}) = \frac{\theta^{\alpha'_1 - 1} (1 - \theta)^{\beta'_1 - 1} (\theta + \delta)^{\alpha'_2 - 1} (1 - \theta - \delta)^{\beta'_2 - 1} b_3(\tau)}{\sum_{\tau=0}^n B(\alpha'_1, \beta'_1) \times B(\alpha'_2, \beta'_2) \times b_3(\tau)} \quad (12)$$

Le dénominateur de l'expression précédente est fonction de  $x$  seul et des hyper-paramètres; par conséquent, à un facteur de normalisation près, la loi *a posteriori* de

$\delta$ , conditionnellement à  $x$ , est :

$$\varphi(\delta|\mathbf{x}) \propto$$

$$\begin{cases} \sum_{\tau=0}^n \int_{-\delta}^1 \theta^{\alpha'_1-1} (1-\theta)^{\beta'_1-1} (\theta+\delta)^{\alpha'_2-1} (1-\theta-\delta)^{\beta'_2-1} b_3(\tau) d\theta & \text{si } -1 \leq \delta \leq 0 \\ \sum_{\tau=0}^n \int_0^{1-\delta} \theta^{\alpha'_1-1} (1-\theta)^{\beta'_1-1} (\theta+\delta)^{\alpha'_2-1} (1-\theta-\delta)^{\beta'_2-1} b_3(\tau) d\theta & \text{si } 0 \leq \delta \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

Une expression plus explicite de  $\varphi(\delta|x)$  semble difficile à atteindre; une intégration numérique de l'équation (13) s'est révélée impraticable avec des données réalistes issues d'un contrôle de fabrication, pour lequel les hyper-paramètres  $\alpha'_j$  ou  $\beta'_j$  peuvent être de l'ordre de quelques centaines. Une approximation analytique par des lois de Poisson permet d'expliciter  $\varphi(\delta|x)$  à l'aide d'une somme de fonctions gamma si  $\delta \geq 0$  ou de fonctions gamma-incomplètes si  $\delta \leq 0$ ; mais du fait des grandes valeurs des coefficients  $\alpha'_j$  ou  $\beta'_j$  la difficulté de calcul de ces gamma-incomplètes, sur des machines du type PC, reste encore difficilement surmontable.

#### 2.4. Evaluation par simulation stochastique des lois a posteriori des paramètres $\tau, \theta_1, \theta_2$ et $\delta = \theta_2 - \theta_1$

Le calcul de lois *a posteriori*, pour des modèles complexes est une difficulté constante en calcul bayésien : en 1985, J. Berger [4] conseillait au Bayésien pratiquant de se lier d'amitié avec le plus grand nombre possible de numériciens («*The practicing Bayesian is well advised to become friends with as many numerical analysts as possible*»). Depuis, l'utilisation de méthodes de simulation pour approcher la loi *a posteriori*, échappatoire au calcul formel exact ou aux méthodes numériques, s'est généralisée.

Ici, quoique pour chaque paramètre on dispose d'une forme explicite exacte, on rencontre des difficultés numériques de calcul, notamment pour (13); pour cette raison la méthode d'échantillonnage de Gibbs (Robert (1992) [23] et Robert (1995) [24]; Gelman et al (1995) [11]; Stephens (1994) [27]) est employée pour obtenir des échantillons du triplet  $(\theta_1, \theta_2, \tau)$  obéissant à la loi conjointe (3) à partir des lois conditionnelles de :

$$\theta_1 | \theta_2, \tau, \mathbf{x} \text{ (loi } Be(\alpha'_1, \beta'_1), \text{ équation (7))}$$

$$\theta_2 | \theta_1, \tau, \mathbf{x} \text{ (loi } Be(\alpha'_2, \beta'_2), \text{ équation (8))}$$

$$\tau | \theta_1, \theta_2, \mathbf{x} \text{ (loi discrète, équation (9) où au dénominateur la sommation va de 0 à } n),$$

par lesquelles on peut aisément simuler des valeurs de  $\theta_1, \theta_2, \tau$ .

L'algorithme d'échantillonnage de Gibbs consiste à :

- partir d'une valeur quelconque  $(\theta_2^{(0)}, \tau^{(0)})$  (du domaine de  $(\theta_2, \tau)$ ),

- générer  $\theta_1^{(1)}$  par  $\pi(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, \tau^{(0)}, \mathbf{x})$ ,  $\theta_2^{(1)}$  par  $\pi(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, \tau^{(0)}, \mathbf{x})$ ,  $\tau^{(1)}$  par  $\pi(\tau | \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, \mathbf{x})$
- en répétant cette opération, les triplets  $(\theta_1, \theta_2, \tau)$  de valeurs ainsi générés obéissent asymptotiquement à la loi stable du processus markovien ergodique défini par l'algorithme d'échantillonnage de Gibbs (Robert (1995) [24]).

L'algorithme est construit de telle sorte que cette loi soit la distribution *a posteriori* conjointe des paramètres (équation (3)).

Des simulations de séries, aussi bien stationnaires que non-stationnaires montrent une convergence assez rapide vers la loi 3 : on constate en effet que les distributions marginales *a posteriori* calculées et simulées des paramètres  $\tau$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont proches. Cette technique permet d'atteindre par échantillonnage une approximation de la loi conjointe de l'intensité de la rupture et de la date de rupture, obtenue par intégration sur  $\theta$  du second membre de l'équation (12). Les figures 2.a et 2.b présentent l'aspect de cette variation conjointe dans le cas d'une série stationnaire et dans celui d'une série non stationnaire.

## 2.5. Utilisations du modèle $M_2$ et commentaires

### 2.5.1. Estimation bayésienne des paramètres d'intérêt

Le modèle peut être employé comme outil d'inférence sur les paramètres, en particulier pour l'estimation :

- de la date de changement,
- de l'intensité du changement,
- de la dépendance entre la date et l'intensité.

Pour l'estimation de la date de changement :

- si l'on adopte pour fonction de coût l'écart quadratique ([4]) on obtient l'estimateur :

$$\hat{\tau}_1 = E_\pi(\tau|\mathbf{x}) = \sum_{\tau=1}^n \tau \pi(\tau|\mathbf{x}) \quad (14)$$

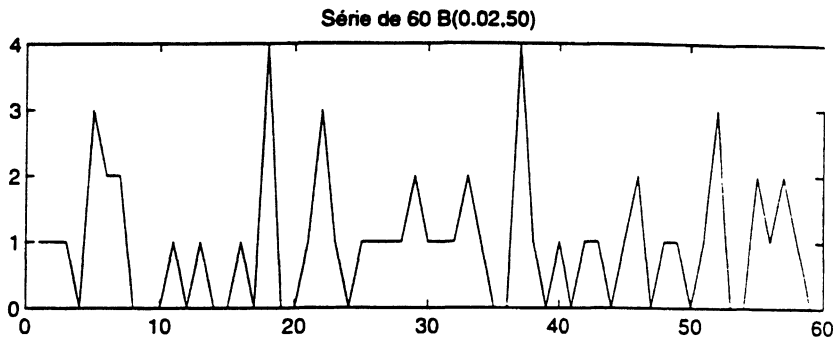
espérance *a posteriori* de  $\tau$ .

- si l'on adopte pour fonction de coût l'écart absolu on obtient l'estimateur :

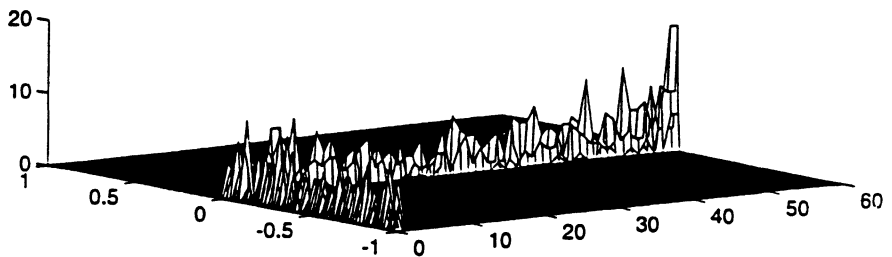
$$\hat{\tau}_2 = \text{médiane}(\tau|\mathbf{x}) \quad (15)$$

### 2.5.2. Vérification de l'hypothèse de stationnarité

L'examen visuel des distributions *a posteriori* consécutives à des simulations montre que :



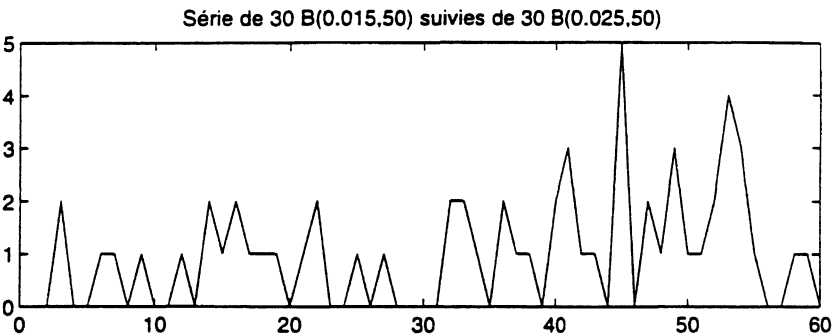
loi conjointe de la date et de l'intensité



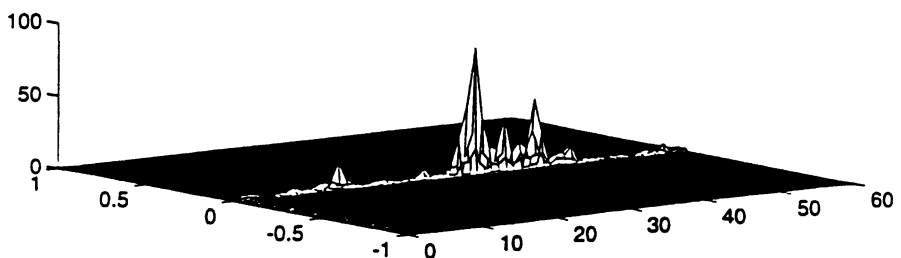
intensité du changement

date de changement

FIGURE 2.a



loi conjointe de la date et de l'intensité



intensité du changement

date de changement

FIGURE 2.b

- dans le cas d'une série stationnaire la distribution *a posteriori* de la date de changement est concentrée sur 0 et  $n$  : ainsi l'hypothèse  $H_{nc}$  n'est presque jamais rejetée alors qu'elle est vraie;
- le modèle rejette facilement  $H_c$  alors qu'elle est vraie;
- la probabilité d'acceptation de  $H_c$  alors qu'elle est fautive est très faible.

Vu comme test de l'hypothèse  $H_c$ , le modèle  $M_2$  paraît relativement puissant, au contraire du modèle  $M_1$ .

### 2.5.3. Insertion du modèle dans une démarche décisionnelle

Dans la pratique du contrôle de la qualité, l'estimation des paramètres n'est pas une fin en elle-même. Dans la démarche classique, l'estimation se situe à l'*amont* du problème décisionnel, déconnectée de celui-ci; la décision est alors fondée :

- sur une fonction de coût standard (par exemple écart quadratique à la moyenne), utilisée au stade de l'estimation;
- sur une fonction de coût économique, en général distincte de la précédente, intervenant pour le choix de l'action à entreprendre, la date et l'intensité du changement ayant été fixées au stade de l'estimation.

On aura ainsi dédoublé le problème initial du choix d'une décision en un problème statistique et en un problème économique.

L'emploi du modèle  $M_2$  dans une vision statistique classique, découplant inférence et décision, est possible mais comporte deux inconvénients :

- la non-prise en compte de la globalité de la distribution des paramètres dans l'élaboration de la décision;
- la séparation arbitraire et le traitement en cascade du volet estimation et du volet économique, dommageables à la nécessaire cohérence des fonctions de coût.

Dans ce qui suit, le modèle statistique  $M_2$  est inséré dans une démarche décisionnelle *bayésienne complète*, dans laquelle la décision choisie découle non pas d'une estimation ponctuelle, mais de toute la distribution des valeurs possibles du paramètre.

## 3. Application au contrôle par attribut de la qualité

On s'intéresse à la situation suivante :

un atelier produit de façon périodique des lots d'objets; un  $N$ -*échantillon*, tiré du  $t^{\text{ième}}$  lot, est soumis à un contrôle par attribut à l'issue duquel on observe  $X_t$  objets défectueux. Après fabrication de  $n$  lots, le décideur dispose de l'information suivante :

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  série du nombre de défectueux observés durant les  $n$  périodes.



Cette information, composée des  $n$ -échantillons de taille unitaire constante  $N$ , est plus riche que celle obtenue par cumul en un échantillon de taille  $nN$ ; elle peut être aussi plus coûteuse.

Cette richesse accrue de l'information doit permettre une règle plus efficace que celle qui résulterait de la non-prise en compte de l'aspect temporel.

### 3.1. Ensemble des actions

C'est dans la définition de l'ensemble des actions que l'importance de l'aspect temporel sera prise en compte :

$a_0$  : livrer tous les lots

$a_i$  : rejeter les  $i$  premiers lots, livrer le reste

$b_0$  : rejeter tous les lots

$b_i$  : livrer les  $i$  premiers lots, rejeter le reste

avec  $1 \leq i \leq n$

Comme  $a_0 = b_n$  et  $a_n = b_0$ , il suffit de prendre  $1 \leq i \leq n$

L'ensemble des actions est alors :

$$A = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$$

### 3.2. Ensemble des états de la nature

En reprenant les notations du modèle  $M_2$  l'ensemble des états de la nature est  $\Theta = \{\theta, \delta, \tau\}$ , où

- $\tau$  est la date du changement,
- $\theta$  est la proportion de défectueux avant changement et
- $\theta + \delta$  la proportion de défectueux après changement.

### 3.3. Fonction de coût

On peut schématiser, à des fins d'illustration, les enjeux du contrôle de la façon suivante :

le coût d'une mise au rebut (ou coût de fabrication) d'un objet est pris pour unité; soient  $K$  le coût du retour d'un objet défectueux et  $N^*$  la taille (supposée constante) du lot contrôlé.

Coût d'une action  $a_i$  :

Si  $i \leq \tau$  :

- $N^* \times i$  objets sont mis au rebut; soit un coût partiel de  $N^* \times i$
- $(\tau - i)N^*\theta + (n - \tau)(\theta + \delta)N^*$  objets défectueux sont livrés; soit un coût partiel de  $(\tau - i)N^*\theta K + (n - \tau)(\theta + \delta)N^*K$

d'où :

$$\begin{aligned} W(a_i, \theta, \delta, \tau) &= N^*i + (\tau - i)N^*\theta K + (n - \tau)(\theta + \delta)N^*K \\ &= N^*i + [(n - i)\theta + (n - \tau)\delta] N^*K \end{aligned}$$

Si  $i \geq \tau$  :

- $N^* \times i$  objets sont mis au rebut; soit un coût partiel de  $N^* \times i$
- $(n - i)(\theta + \delta)N^*$  objets défectueux sont livrés; soit un coût partiel de  $(n - i)(\theta + \delta)N^*K$

d'où :

$$W(a_i, \theta, \delta, \tau) = N^*i + (n - i)(\theta + \delta)N^*K = N^*i + [(n - i)\theta + (n - i)\delta] N^*K$$

On voit que pour toute valeur de  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) :

$$W(a_i, \theta, \delta, \tau) = N^*i + \{(n - i)\theta + [n - \text{Sup}(\tau, i)] \delta\} N^*K \quad (16)$$

Un calcul analogue conduit à :

$$W(b_i, \theta, \delta, \tau) = N^*(n - i) + \{i\theta + [i - \text{Inf}(\tau, i)] \delta\} N^*K \quad (17)$$

### 3.4. Règle de décision

La règle de Bayes est la fonction  $\delta_b$  qui, à toute série d'observations  $\mathbf{x}$ , associe l'action qui minimise l'espérance *a posteriori* du coût [28], c'est-à-dire, en notant  $A$  l'ensemble des actions :

$$\delta_b(\mathbf{x}) = \text{Arg} \underset{a \in A}{\text{Min}} \{E_{\pi(\theta, \delta, \tau | \mathbf{x})} [W(a, \theta, \delta, \tau)]\} \quad (18)$$

$$E_{\pi(\cdot | \mathbf{x})} [W(a_i, \theta, \delta, \tau)] = N^*i + KN^*(n - i)E[\theta] + KN^*nE[\delta] - KN^*E[\text{Sup}(\tau, i)\delta]$$

De même :

$$E_{\pi(\cdot | \mathbf{x})} [W(b_i, \theta, \delta, \tau)] = N^*(n - i) + KN^*iE[\theta] + KN^*iE[\delta] - KN^*E[\text{Inf}(\tau, i)\delta]$$

### 3.5. Résultats et commentaires

Chacune des figures 3, 4 et 5 présente :

- une série  $X$  de variables binomiales (décrivant l'évolution dans le temps de la qualité de fabrication),
- la distribution de la date de changement (selon l'équation (6) avec des *a priori* égaux à 1/2 pour chacune des hypothèses de rupture ou de non-rupture,

- la décision  $\delta(\mathbf{x})$ , fonction de  $K$ , rapport entre le coût de retour d'un objet (livré alors qu'il est défectueux) et son coût de fabrication.

La fonction de coût  $W$  dépend de  $K$  (équations (16) et (17)); la décision optimale dépend par conséquent aussi (en plus de l'information  $\mathbf{x}$ ) de  $K$  (équation(18)). Il revient au même de dire que, une fois  $\mathbf{x}$  connu, à chaque valeur de  $K$  correspond un indice  $i$  tel que  $a_i$  ou  $b_i$  soit la décision optimale. Sur les figures 3, 4 et 5 les indices négatifs correspondent aux décisions  $b_i$  (livrer les  $i$  premiers lots, rejeter le reste), les indices positifs aux décisions  $a_i$  (rejeter les  $i$  premiers lots, livrer le reste).

Si  $\theta$  (la proportion de défectueux) était connue, et dans le cas d'une série stationnaire ( $\delta = 0$ ), la décision serait de livrer si  $K < 1/\theta$  et de rejeter si  $K > 1/\theta$ .

Pour la figure 3, l'information est constituée par une série stationnaire avec  $\theta = 0.02$  (les probabilités de changement sont concentrées sur les dates 0 et  $n = 100$ ). La décision parfaite serait de tout accepter pour les valeurs de  $K < 50$  et tout rejeter pour  $K > 50$ . L'aléa de l'échantillonnage et l'incertitude sur  $\theta$  conduisent à des décisions qui s'écartent de la décision idéale, lorsque  $48 = K_1 < K < K_2 = 50$ . Mais on peut penser qu'il existe aussi une incertitude du décideur sur la valeur de  $K$ , plus importante que l'intervalle  $[K_1, K_2]$ , celui-ci pouvant si nécessaire être réduit par un apport d'information.

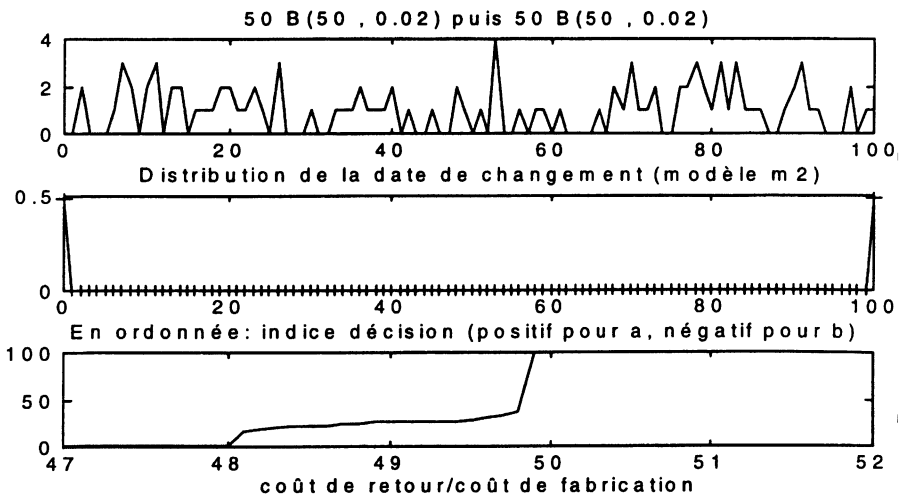


FIGURE 3

La figure 4 montre que

- si  $K < 25$  la décision  $b_{50}$  (tout livrer) est la meilleure;
- si  $K$  varie entre 25 et 65 les meilleures décisions varient entre  $b_{30}$  (livrer les 30 premiers lots) et  $b_{20}$  (livrer les 20 premiers lots);
- si  $K > 65$  la décision  $a_{50}$  (tout rejeter) est la meilleure.

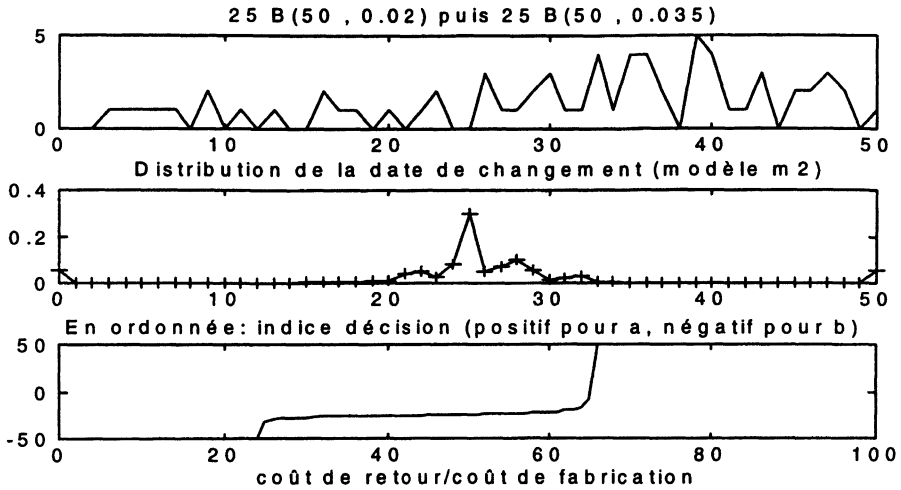


FIGURE 4

La figure 5 correspond à une rupture d'intensité négative (qui pourrait se produire si par exemple l'usure de la machine est bien compensée par une amélioration d'autres facteurs); elle montre entre autre que si  $K$  est compris entre 17 et 45, c'est une décision proche de  $a_{30}$  (rejeter les 30 premiers lots) qui est la meilleure; avec des transitions vers la décision  $a_0$  (tout livrer) pour des coûts relatifs de retour plus faibles que 17 et des transitions vers la décision  $a_{50}$  (tout rejeter) pour des coûts plus élevés que 45.

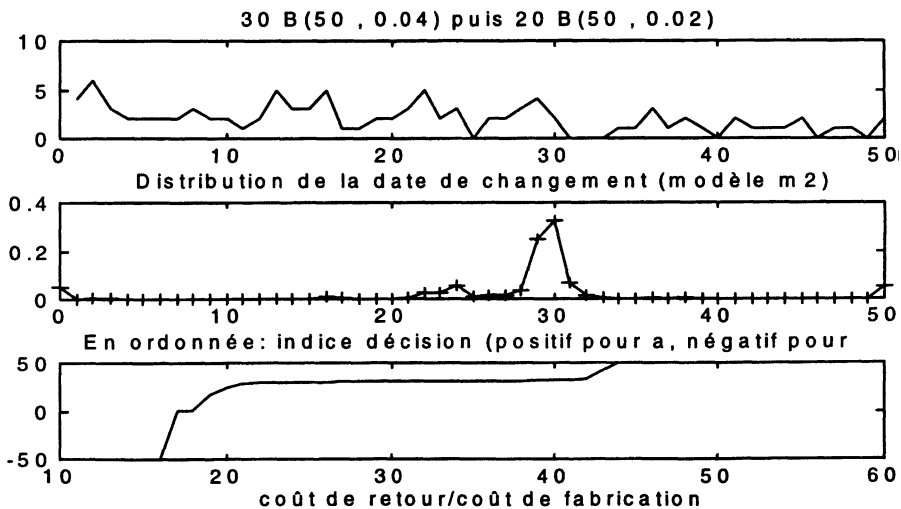


FIGURE 5

#### 4. Comparaison des efficacités de trois procédures de décision : bayésienne, cusum, maximum de vraisemblance

Afin d'évaluer l'intérêt de l'approche bayésienne, on compare ses résultats à ceux fournis par deux techniques classiques employées pour la détection de changement : la carte CUSUM (Page [20], Moustakides [19]) et l'inférence fondée sur le maximum de vraisemblance (Ghorbanzadeh [12]).

##### 4.1. Procédure de comparaison

On simule une série de variables binomiales qui comporte une rupture; puis, par le test du maximum de vraisemblance ou la technique CUSUM :

- on décide (au niveau de signification de 0.05) si cette série est stationnaire ou non; si oui on calcule la proportion  $\hat{\theta}$  de défectueux; sinon on estime la date de rupture  $\hat{\tau}$  par l'estimateur du maximum de vraisemblance ou par celui du CUSUM. Les proportions  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$  sont ensuite calculées par moyenne des résultats défectueux, de part et d'autre de  $\hat{\tau}$ .
- on détermine la «meilleure» décision résultant de ces estimations et du rapport  $K$  entre le coût de retour et le coût d'une mise au rebut, de la façon suivante :
  - si la série est reconnue stationnaire la décision préconisée est soit de tout mettre au rebut, soit de tout livrer, selon que  $K$  est plus grand ou plus petit que  $1/\hat{\theta}$ .
  - si la série est reconnue non-stationnaire, avec  $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ , la décision consiste à :
    - \* tout mettre au rebut si  $K > 1/\hat{\theta}_1$
    - \* tout livrer si  $K < 1/\hat{\theta}_2$
    - \* livrer jusqu'à  $\hat{\tau}$ , mettre au rebut après  $\hat{\tau}$  si  $1/\hat{\theta}_2 < K < 1/\hat{\theta}_1$
- ayant déterminé cette meilleure décision, au sens du CUSUM ou du max de vraisemblance, on calcule son coût par référence à l'état de la nature, c'est-à-dire aux paramètres  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\tau$  qui ont servi à simuler la série, selon les équations (16) et (17).

Sur la même série on détermine, par la méthode bayésienne, avec une loi *a priori* du type 11 l'action la moins coûteuse (de type *a* ou *b*) et on calcule le coût de celle-ci par rapport à l'état de la nature.

##### 4.2. Résultats et discussion

L'opération précédente a été réalisée sur 400 séries simulées composées de 45 variables  $\mathcal{B}(0.015, 50)$  suivies de 30 variables  $\mathcal{B}(0.025, 50)$ ; les 15 premiers termes de chaque série ont servi à caler les paramètres de moyenne et de variance en régime stationnaire pour les CUSUM.

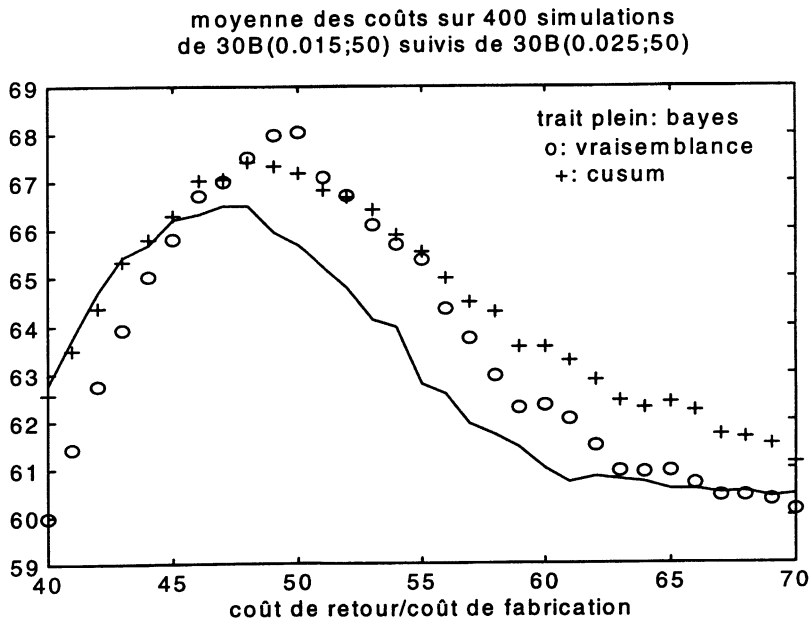
Les trois méthodes ont ainsi été appliquées, pour différentes valeurs de  $K$ , à 400 séries de 60 termes comportant un saut;

Lorsque  $K$  est trop grand (plus grand que  $1/\theta_1$ ) ou trop petit (plus petit que  $1/\theta_2$ ) la bonne décision est évidente : soit tout rejeter (dans le premier cas) soit tout accepter; les valeurs de  $K$  intéressantes sont donc celles qui sont situées approximativement entre  $1/\theta_2$  et  $1/\theta_1$ , soit dans le présent cas entre 40 et 70.

De même lorsque le contraste entre les deux sous-séries stationnaires est grand, l'estimation des dates de rupture est précise par les trois méthodes et la bonne décision est facile à déterminer. Le cas intéressant en pratique est celui où le contraste entre les deux sous-séries stationnaires est faible (on n'imagine pas de processus réel de fabrication passant instantanément de 1% à 5% de défectueux); pour cette raison les trois méthodes sont comparées pour des intensités de changement assez faibles.

Les résultats sont reproduits dans la figure 6 : on constate que pour des coûts de retour  $K$  compris entre 45 et 65 la méthode de Bayes conduit en moyenne à des décisions meilleures; pour des valeurs extrêmes de  $K$  la méthode bayésienne semble moins bonne que celle du maximum de vraisemblance. La comparaison n'est certes que visuelle; cependant ces résultats sont la moyenne de 400 simulations. La figure 7 présente les résultats d'une autre simulation avec un autre état de la nature ( $\theta_1, \theta_2, \tau$ ) : là aussi on constate que les coûts moyens des décisions résultant de la procédure bayésienne sont plus petits que ceux résultant des deux autres procédures.

Lorsque le contraste entre les sous-séries stationnaires est très faible (ce qui est souvent le cas dans un processus de fabrication), les trois méthodes exposées de détection de changement souffrent d'un manque de puissance et d'un manque de précision dans l'estimation de la date de changement.



moyenne des coûts sur 200 simulations  
de 30B(0.01;50) suivis de 30B(0.03;50)

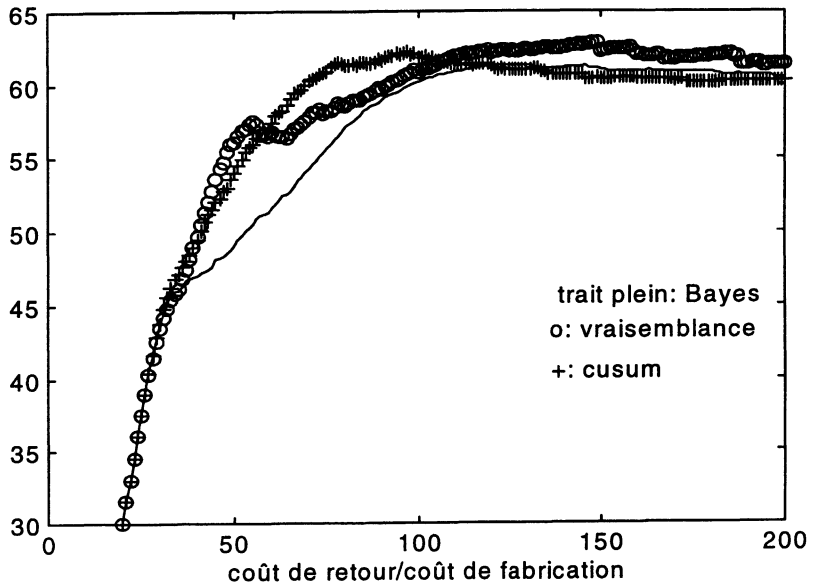


FIGURE 7

## 5. Conclusion

### 5.1. Du point de vue de la modélisation statistique

Un modèle avec une hypothèse explicite de non-changement permet d'interpréter la concentration des probabilités de changement sur l'une ou sur l'autre extrémité de la série (cette concentration est souvent appelée «*effet de bord*»).

La formulation ( $M_2$ ) montre qu'une distribution en forme de U ne signifie pas nécessairement que le changement est aux bords de la série; il pourrait être localisé loin des bords, en dehors du champ des observations, bien que la probabilité qui lui est affectée soit reportée sur  $\tau = 0$  ou sur  $\tau = n$ . Cela permet de faire la différence conceptuelle, entre un «*effet de bord*» dû à un changement à l'intérieur de la série (qui se manifeste par des probabilités sur  $\tau > 0$  ou  $\tau < n$ ), et un (véritable) effet de bord dû à un changement à «l'extérieur» de la série.

### 5.2. Du point de vue décisionnel

L'évaluation des performances de l'approche bayésienne a été réalisée à partir de données simulées; le caractère arbitraire de ces données vient du fait qu'elles simulent un seul changement avec rupture. Des données réelles peuvent comporter plusieurs changements dont certains peuvent être des sauts, d'autres des dérives (par exemple, la considération d'une dérive linéaire nécessite un paramètre supplémentaire). Est-il

utile pour autant, de construire le modèle de changement le plus général, comportant plus d'un changement ?

Si l'on cherche à construire un modèle de prise de décision en temps réel, c'est le dernier changement en date qui est générateur de décision; on cherchera à le détecter le moins tard possible et à le distinguer de l'effet de bord généré par l'extrémité de la série. Si l'on s'intéresse à l'aspect opérationnel il semble que l'effort doit porter sur l'analyse de l'effet de bord plus que sur l'élaboration du modèle descriptif le plus général.

$K$ , rapport du coût de retour au coût de fabrication, intervient comme un paramètre important dans la modélisation proposée. Une étude de sensibilité a été systématiquement faite dans l'approche décisionnelle. En effet considérer  $K$  comme un état de la nature, au même titre que  $\theta_1, \theta_2$  et  $\tau$ , n'aurait pas permis d'intégrer l'influence de ses variations possibles sur les résultats de l'analyse : compte tenu de la forme linéaire en  $K$  de la fonction de coût, dans une analyse bayésienne complète,  $K$  ne serait intervenu que par son espérance. Pour une application opérationnelle du modèle il faut déterminer le plus soigneusement possible le paramètre  $K$  qui traduit les enjeux économiques.

Enfin l'approche présentée offre l'avantage de travailler explicitement sur la loi conjointe de la date et de l'amplitude de changement et de ne pas séparer l'estimation statistique des enjeux du contrôle de la qualité.

### 5.3. Du point de vue de l'inférence statistique

Il convient de souligner la difficulté de l'entreprise de détection de changement dans des situations réelles de faible contraste (que nous avons essayé de reproduire) : si l'on considère, par exemple, la situation illustrée par la figure 5, même en supposant connue sans incertitude la date de changement, une rapide approximation normale montre que l'on cherche à mettre en évidence une différence de moyenne à partir de deux échantillons de taille 25, le premier régi par une  $\mathcal{N}(0.04, 8 * 10^{-4})$ , le second par une  $\mathcal{N}(0.02, 4 * 10^{-4})$ ; ceci revient à vouloir détecter un changement

de 0.02 avec un écart-type de  $\sqrt{\frac{12}{25} 10^{-4}} \simeq 10^{-2}$  ! En d'autres termes, même lorsque

l'imprécision sur la date de changement n'est pas prise en compte, on se trouve proche de la frontière classique des deux écarts-type pour conclure à une différence significative. La procédure bayésienne, exploitant au mieux l'information contenue dans l'échantillon, vis-à-vis des enjeux décisionnels, propose donc une solution innovante, dans une situation où une démarche classique laisse souvent démuni. Il faut cependant souligner que les calculs et les comparaisons ont été faits avec des *a priori* non informatifs et que la démarche bayésienne prend tout son sens avec un véritable *a priori* : il est tout à fait concevable que le responsable de la production, se fondant sur d'autres renseignements que ceux apportés par l'échantillon, ait déjà quelque idée sur l'époque où un dérèglement est susceptible de se produire; seule l'approche bayésienne peut tirer parti de cette information exogène.



### Remerciements

Nous tenons à remercier J. Bernier pour ses conseils et ses remarques qui ont orienté une grande partie de ce travail, ainsi que C. Duby et J.J. Daudin pour l'aide apportée à la constitution de la bibliographie et pour les réflexions stimulantes sur la détection de changement dans le domaine du contrôle de la qualité qu'ils nous ont fait partager.

### Références bibliographiques

- [1] AFNOR, *Statistique; tome 2*. AFNOR, Paris la Défense, 1988.
- [2] BARRY D., HARTIGAN J.A. *Journal of the American Statistical Association*. A bayesian analysis for change point problems. 88(421) : pp. 309–319, march 1993.
- [3] BASSEVILLE M., BENVENISTE A., *Detection of Abrupt Changes in Signals and Dynamical Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1985.
- [4] BERGER J.O., *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. Springer Verlag, New York, second edition, 1985.
- [5] BERNIER J., Étude de la stationnarité des séries hydrométéorologiques. *La Houille blanche*, 4 : pp. 313–319, 1977.
- [6] BERNIER J., In *Engineering Risk in Natural Resources Management*, pp. 159–176. Kluwer Academic Publishers, P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands, 1994. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Engineering Risk and Reliability in a Changing Physical Environment, Dauville, France, May 24-Jun, 1993.
- [7] BERRYMAN D., La détection des tendances dans les séries temporelles de paramètres de la qualité de l'eau à l'aide des tests non-paramétriques. Mémoire de Maîtrise en sciences de l'eau, INRS-Eau, Université du Québec.
- [8] BOX G., TIAO G., A change in level of a non stationary time series. *Biometrika*, 52(1 and 2) : pp. 181–192, 1965.
- [9] CHERNOFF, H., ZACKS S., Estimating the current mean of a normal distribution which is subjected to changes in time. *Annals of Mathematical Statistics*. 35 : pp. 999-1018, 1964.
- [10] DAUDIN J.J., Double sampling xbar charts. *Journal of Quality Control*. 24(2) : pp. 78–87, 1992.
- [11] GELMAN A., CARLIN J.B., STERN H.S., RUBIN D.B., *Bayesian Data Analysis*. Text in Statistical Science. Chapman and Hall, London, 1<sup>st</sup> edition, 1995.
- [12] GHORBANZADEH D., Un test de détection de rupture dans un modèle gaussien. *Rev. Statistique Appliquée*, XLIII(2) : pp. 67–76, 1995.
- [13] GHORBANZADEH D., LOUNÈS R., Deux procédures de détection de rupture pour des observations poissonniennes groupées. *Rev. Statistique Appliquée*, XLIV(3) : pp. 47–61, 1996.

- [14] HINKLEY D.V., Inference about the change-point in a sequence of random variables. *Biometrika*, 57(1) : p. 1, 1970.
- [15] HINKLEY D.V., HINKLEY E.A., Inference about the change-point in a sequence of binomial variables. *Biometrika*, 57(3) : p. 477, 1970.
- [16] HUBERT P., CARBONNEL J.P., CHAOUCHE A., Segmentation des séries hydrométéorologiques; application à des séries de précipitations et de débits de l'Afrique de l'Ouest. *Journal of Hydrology*, 110 : pp. 349–367, 1989.
- [17] LAGRANGE D., Estimation de la date et l'amplitude d'une rupture conditionnellement à sa détection. Rapport de recherche, Laboratoire de Biométrie de l'INAPG.
- [18] LEE A.F.S., HEGHINIAN S., A shift of the mean level in a sequence of independent normal random variables—a bayesian approach-. *Technometrics*, 19(4) : pp. 503–506, 1977.
- [19] MOUSTAKIDES G., Optimal stopping times for detecting changes in distributions. *Ann Statist.*, 14 : pp. 1379–1387, 1986.
- [20] PAGE E., Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 41 : pp. 100–114, 1954.
- [21] PARENT E., CHAOUCHE A., GIRARD PH., Sur l'apport des statistiques bayésiennes au contrôle de la qualité par attribut; partie 1 : contrôle simple. *Rev. Statistique Appliquée*, XLIII(4) : pp. 5–18, 1995.
- [22] PICARD D., Testing and estimating change-points in time series. *Advances in applied probability*, 17(4) : pp. 841–867, 1985.
- [23] ROBERT C., *L'analyse Statistique Bayésienne*. Economica, PARIS, 1992.
- [24] ROBERT C., *Méthodes de simulation en statistique (Introduction aux méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov)*. CREST, INSEE, PARIS, 1995.
- [25] SAVAGE L., *The Foundations of Statistics*. Wiley, New-York, 1954.
- [26] SMITH A.F.M., Bayesian retrospective multiple-changepoint identification. *Biometrika*, 62(2) : p. 407, 1975.
- [27] STEPHENS D.A., Bayesian retrospective multiple-changepoint identification. *Appl. Statist.*, 43(1) : pp. 159–178, 1994.
- [28] ULMO J., BERNIER J., *Éléments de Décision Statistique*. Presses Universitaires de France, Paris, 1<sup>st</sup> édition, 1973.