REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. PARENT
G. LANG
PH. GIRARD

Sur l'apport des statistiques bayesiennes au contrôle de la qualité par attribut. Partie 2 : contrôle progressif tronqué

Revue de statistique appliquée, tome 44, nº 1 (1996), p. 37-54
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1996__44_1_37_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1996, **XLIV** (1), 37-54

SUR L'APPORT DES STATISTIQUES BAYESIENNES AU CONTRÔLE DE LA QUALITÉ PAR ATTRIBUT, PARTIE 2 : CONTRÔLE PROGRESSIF TRONQUÉ

E. Parent, G. Lang, Ph. Girard

Département des Mathématiques Appliquées
ENGREF, 19 Avenue du Maine
75732 - PARIS Cedex 15 - France

RÉSUMÉ

Les méthodes de statistiques bayesiennes peuvent être utilisées pour calculer un plan de contrôle statistique progressif de la qualité par attribut. Par rapport aux procédures très standardisées recommandées par l'AFNOR, cette démarche non classique présente l'avantage de construire une règle de décision adaptée à un critère relié aux enjeux d'ordre économique de chaque problème particulier. De plus, ces règles bayesiennes valorisent toutes les informations disponibles pour résoudre le problème décisionnel de contrôle de la qualité en intégrant aussi bien les informations issues de l'échantillonnage que celles provenant de connaissances subjectives. La construction d'un plan progressif tronqué de contrôle de la qualité selon les principes de la statistique bayesienne est illustrée par le calcul de la règle séquentielle d'arrêt et de décision optimale pour un modèle béta-binomial avec coût linéaire. L'algorithme de calcul, fondé sur les concepts de la programmation dynamique stochastique, peut être facilement implémenté comme outil d'aide à la décision en situation opérationnelle.

Mots-clés : *Bayes, Contrôle statistique de la qualité, Echantillonnage binomial, Statistique décisionnelle, Programmation dynamique stochastique.*

ABSTRACT

Bayesian statistical techniques can be used to design a sequential truncated sampling plan for quality control. As compared to the usual methods advocated by the french association for normalisation, this approach exhibits the advantage to elaborate a decision rule taking explicitely into account economic concerns related to the quality control problem at hand to solve. In addition, bayesian statistics allow to incorporate information coming from sequential sampling and original subjective knowledge. The bayesian design of a sequential truncated sampling plan by attribute is illustrated by the calculation of the optimal decision and stopping rules for a beta-binomial model with linear cost. The algorithm derived from this approach is based on the stochastic dynamic programming approach. It can be easily implemented as a decision aid tool in an operational context.

Keywords : *Bayes, Statistical quality control, Binomial sampling, Statistical decision theory, Stochastic dynamic programming.*

Introduction

Les praticiens du contrôle de la qualité utilisent souvent des plans d'échantillonnages séquentiels, d'ailleurs codifiés par l'AFNOR (1988) : à efficacité égale, les plans séquentiels permettent en moyenne une économie sur la taille des échantillons à prélever, et donc une économie en terme de coût de contrôle. Ils semblent aussi plus naturels car le contrôleur a la sensation de réaliser une «meilleure utilisation de l'information». L'idée d'*optimiser* un plan séquentiel de contrôle de la qualité se rencontre en statistique classique. Par exemple, Daudin *et al.* (1990) ont proposé des stratégies d'obtention des *meilleurs* plans d'échantillonnage double par attribut et par variable. Assez répandue dans les problèmes d'ingénierie de l'eau (Duckstein *et al.*, 1987), l'approche statistique bayesienne offre une alternative intéressante pour les problèmes du contrôle de la qualité dans les industries agro-alimentaires (Martz, 1976; Cressie et Seheult, 1985) en ne séparant pas les aspects statistiques des conséquences économiques des décisions qui en résultent. Par construction, cette approche fournit directement une règle de décision qui minimise un critère de risque que l'on définira par la suite.

On cherche ici à porter un jugement sur la qualité inconnue d'une fabrication supposée homogène, c'est-à-dire stationnaire au cours du temps, à partir d'objets examinés en séquence. Après chaque inspection, le contrôleur peut décider le refus ou l'acceptation du lot fabriqué ou bien ne pas se prononcer et examiner un échantillon supplémentaire. Nous supposerons ici que pour des raisons diverses (nombre limité de contrôleurs, etc...) le fabriquant doit porter un jugement d'acceptation ou de refus sur un lot en prélevant au maximum T objets (plan d'échantillonnage tronqué).

La démarche bayesienne consiste à utiliser le même cadre probabiliste pour traiter deux niveaux d'incertitude :

– l'incertitude proprement dite relative à notre connaissance réduite de la qualité de la fabrication. Cette incertitude peut être levée au moins partiellement par apport d'informations fournies par exemple par les résultats de l'échantillonnage. On emploiera une variable aléatoire pour décrire l'incertitude relative aux valeurs du paramètre décrivant la qualité; on exprimera ensuite la distribution de cette variable aléatoire conditionnellement aux résultats de l'échantillonnage.

– l'aléa «naturel» qui, lui, ne peut être réduit par apport d'information. Il désigne ici le phénomène aléatoire d'obtention d'un échantillon d'objet de la fabrication qui sera modélisé à l'aide de probabilités quantifiant la mesure d'événements physiques qui peuvent se réaliser.

Dans le premier cas, la probabilité est dite subjective car elle est utilisée pour quantifier une connaissance subjective à propos d'un paramètre inconnu; dans le second cas, elle est dite objective car reliée directement à la fréquence limite d'observation effective d'un phénomène. Les débats et controverses à propos de cette double face de l'utilisation des probabilités durent depuis près de trois siècles et sont particulièrement bien décrits et commentés dans Weber (1973).

Cet article n'entre pas dans cette discussion épistémologique, mais souligne les grands traits de l'approche de type bayesien pour le contrôle de la qualité par attribut. Il en illustre les potentialités d'application intéressantes pour un plan d'échantillonnage progressif tronqué.

La construction d'un plan bayesien de contrôle séquentiel par attribut n'est guère plus difficile que celle du contrôle à taille d'échantillon fixe présenté dans Billion et Parent (1991) et développé dans Parent *et al.* (1995). L'idée maîtresse est de comparer, après chaque inspection d'un nouvel objet, le risque bayesien d'une décision immédiate avec le coût moyen anticipé de poursuite d'échantillonnage que l'on actualisera à chaque étape. Cet article est organisé de la façon suivante : nous présentons d'abord quelques rappels et notations indispensables à la modélisation du problème de l'échantillonnage séquentiel en contrôle séquentiel de la qualité, puis la démarche d'établissement de la règle optimale de décision et d'arrêt est développée à partir des principes de la programmation dynamique; enfin le mode opérationnel de la démarche est illustrée par une application pratique. En conclusion, nous discutons des avantages, des limites et des extensions possibles de cette approche.

1. Le modèle statistique béta-binomial

1.1. Loi binomiale

Rappelons que la loi binomiale de paramètres (n, p) est la loi de probabilité de la variable aléatoire X :

$$\text{Prob}\,(X = x|\, p, n = \binom{x}{n} p^x (1-p)^{n-x} \tag{1}$$

Dans toute la suite du texte, on fera l'hypothèse que la loi du nombre d'objets défectueux parmi les n objets de l'échantillon de contrôle d'un lot de taille N suit une telle loi, en appelant p la proportion de défectueux dans le lot. Cette hypothèse est légitime si le rapport n/N est faible et que les tirages successifs s'effectuent dans des conditions expérimentales indépendantes.

1.2. Les informations

On suppose que l'on réalise un échantillonnage séquentiel objet par objet : à l'étape n on aura tiré un échantillon de taille n et le résultat de cette expérience est le nombre d'objets défectueux observés dans l'échantillon de taille n, réalisation de la v.a. X_n. La loi de X_n sachant p est une binomiale de paramètres n et p, donnée par l'équation (1). A l'étape $n+1$, on réalise le tirage d'un objet supplémentaire : s'il est défectueux, l'accroissement $x_{n+1} - x_n$ vaut 1, sinon il vaut zéro.

Nous manions aussi des événements plus complexes, à savoir des séquences d'observations, éventuellement suspendues avant leur terme. Pour travailler avec ces trajectoires, nous appelons comme Berger (1985) $\mathbf{x}^n$ le «passé» d'une série jusqu'à l'instant n; $\mathbf{x}^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est donc la trajectoire formée de l'ensemble des résultats de mesures jusqu'à la date n. Une telle trajectoire a pour loi de probabilité $f_n(\mathbf{x}^n|p) = p^{x_n}(1-p)^{n-x_n}$ et on peut dénombrer $\binom{x_n}{n}$ trajectoires différentes allant de l'origine à x_n (nombre total de défectueux total après le $n^{\text{ème}}$ contrôle) par accroissements de 0 ou 1. L'information maximale qu'aura éventuellement à disposition le statisticien sera donc ici le vecteur de taille T composé d'une suite finie de T tirages $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots, x_T)$. Par convention, on appellera x_0 l'état originel d'information avant prise d'échantillon, x_0 signifiant «aucune expérience effectuée». Il est commode de baptiser π_0 la loi de p sachant x_0, c'est-à-dire l'*a priori* de p selon la démarche bayesienne. Cette distribution regroupe les informations subjectives que l'industriel possède sur les valeurs de p. Cette connaissance préalable imprécise provient par exemple d'expériences antérieures sur une production identique ou d'estimations subjectives du comportement de la chaîne de fabrication sur un produit analogue. On trouvera dans Robert (1992) un résumé des techniques pratiques d'estimation de cette loi *a priori*.

Il est commode de choisir pour $\pi_0(p|x_0)$ une loi de type béta, conjuguée naturelle de la binomiale (Ulmo et Bernier, 1973), dont les coefficients a et b seront appelés ici hyperparamètres. Ces deux coefficients confèrent une grande souplesse au choix de la distribution *a priori* du paramètre p.

$$\pi_0(p|x_0) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} \times \mathbf{1}_{[0,1]} \tag{2}$$

Le cas $a = b = 0.5$ correspond à la loi non informative de Jeffreys pour un modèle d'échantillonnage binomial. Le cas $a = b = 1$ donne la loi uniforme, distribution *a priori* maximisant l'entropie utilisée comme mesure quantitative de l'incertitude par Tribus (1969) et qui tire sa justification de considérations de traitement du signal.

En appliquant la formule de Bayes (1763), la loi *a posteriori* de p, c'est-à-dire la distribution du paramètre p après avoir eu connaissance du résultat x_n des résultats de l'échantillonnage jusqu'à l'étape n, est donnée par :

$$\pi(p|x_n) = \frac{\Gamma(a+b+n)}{\Gamma(a+x_n)\Gamma(b+n-x_n)} p^{a+x_n-1}(1-p)^{n+b-x_n-1} \times \mathbf{1}_{[0,1]} \tag{3}$$

La loi *a posteriori* de p reste dans la même famille de type bêta que la loi *a priori* puisque la loi bêta est «conjuguée naturelle» de la loi binomiale : l'incorporation de l'information x_n se traduit en pratique par un simple décalage des hyperparamètres :

$$\begin{aligned} a &\xrightarrow[\text{échantillonnage}]{} a + x_n \\ b &\xrightarrow[\text{échantillonnage}]{} b + n - x_n \end{aligned} \tag{4}$$

Cette propriété n'est pas essentielle pour mener à bien les calculs formels développés dans les paragraphes qui suivent. Néanmoins, c'est un outil agréable qui permettra de mener analytiquement tous les calculs jusqu'à leur terme en visualisant de façon explicite comment intervient l'information x_n collectée à l'étape n dans la démarche bayesienne.

On peut aussi évaluer la loi non conditionnelle de la variable aléatoire X, appelée aussi loi prédictive. Elle est donnée par :

$$g(x) = \int_0^1 \text{Prob}\,(x|p)\pi(p)\mathrm{d}p = \int_0^1 \binom{x}{n} \frac{\Gamma(a+b)p^{a+x-1}(1-p)^{n+b-x-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} dp$$

$$g(x) = \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(a+x)\Gamma(b+n-x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-x+1)\Gamma(a+b+n)\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(x+1)} \tag{5}$$

On reconnaît dans la formule (5) un modèle d'urne de Polya (Feller, 1966). Bernier (1993) a souligné les proximités conceptuelles et opérationnelles entre l'emploi de la loi prédictive en statistique bayesienne et l'utilisation d'un générateur aléatoire fondé sur des mécanismes de type «bootstrap» par suréchantillonnage en statistique classique.

2. Étude de la structure séquentielle des informations

Nous allons montrer que la série des X_n forme un processus markovien d'ordre un : en effet, la loi des accroissements $X_{n+1} - X_n$ est une Bernoulli de paramètre p pour lequel x_n constitue une statistique exhaustive à chaque étape n. Nous utiliserons ensuite cette propriété pour calculer en chaîne l'espérance mathématique d'une fonction de p et $\mathbf{x}^n$.

2.1. Propriété 1 : Les X_n forment un processus Markovien d'ordre un

Considérons pour cela :

$$\text{Prob}(X_{n+1} = y|\mathbf{x}^n) = \int_0^1 \text{Prob}\,(X_{n+1} = y|p, \mathbf{x}^n)\pi_n(p|\mathbf{x}^n)dp \tag{6}$$

Dans la formule 6 on a noté π_n la loi de p sachant $\mathbf{x}^n$; or, puisque x_n est une statistique exhaustive de p, la loi de p sachant $\mathbf{x}^n$ est identique à la loi de p sachant x_n. Elle est donnée par la formule (3). De plus, connaissant p et $\mathbf{x}^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la v.a X_{n+1} ne peut prendre que les valeurs x_n ou $x_n + 1$. De ces considérations, il vient :

$$\int_0^1 \text{Prob}\,(X_{n+1} = y|p, \mathbf{x}^n)\pi_n(p|\mathbf{x}^n)dp = \int_0^1 \text{Prob}\,(X_{n+1} = y|p, x_n)\pi_n(p|x_n)dp$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}\,(X_{n+1} = y|\mathbf{x}^n) &= \text{Prob}\,(X_{n+1} = y|x_n) \\ &= \int_0^1 \{p\mathbf{1}_{y=x_n+1} + (1-p)\mathbf{1}_{y=x_n}\}\,\pi_n(p|x_n)dp \end{aligned} \tag{7}$$

Inconditionnellement à p, la série des X_n forme donc un processus markovien d'ordre un, dont la loi de transition φ_n a pour expression :

$$\begin{aligned}\varphi_n(y, x_n) &= \text{Prob}\,(X_{n+1} = y | X_n = x_n) \\ &= \frac{a + x_n}{a + b + n} \mathbf{1}_{y=x_n+1} + \frac{n + b - x_n}{a + b + n} \mathbf{1}_{y=x_n}\end{aligned} \quad (8)$$

où a et b sont les hyperparamètres de la loi *a priori* $\pi_0(p|x_0)$ donnée par la formule 2.

2.2. Propriété 2 : expression d'une espérance mathématique en $\mathbf{X}^n$ *par conditionnements successifs*

Cette propriété est une conséquence directe de la propriété précédente. Considérons $h(\mathbf{x}^n, p)$ une fonction intégrable de p et de $\mathbf{x}^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Pour rechercher $\boldsymbol{E}_{X_1 \ldots X_n, p}(h(\mathbf{x}^n, p))$, on utilise le fait que la décomposition de l'espérance de cette fonction pour la loi conjointe de p et des $(x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots x_T)$ sous forme de conditionnements successifs s'écrit, pour tout n et pour toute fonction $h(\mathbf{x}^n, p)$:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_{X_1 \ldots X_n, p}(h(\mathbf{x}^n, p)) \\ &\quad = \boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|\mathbf{X}^1}\left(\boldsymbol{E}_{X_3|\mathbf{X}^2} \ldots \left(\boldsymbol{E}_{X_n|\mathbf{X}^{n-1}}\left(\boldsymbol{E}_{p|\mathbf{X}^n} h(\mathbf{x}^n, p)\right) \ldots\right)\right)\right)\end{aligned} \quad (9)$$

Le caractère Markovien d'ordre un de la série des X_n et le caractère exhaustif de x_n pour p permettent de réduire ces conditionnements à deux pas de temps successifs seulement sous la forme :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_{X_1 \ldots X_n, p}(h(\mathbf{x}^n, p)) \\ &\quad = \boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_3|X_2} \ldots \left(\boldsymbol{E}_{X_n|X_{n-1}}\left(\boldsymbol{E}_{p|X_n} h(\mathbf{x}^n, p)\right) \ldots\right)\right)\right)\end{aligned} \quad (10)$$

3. Règles de décision et coûts

On notera $\Delta = (\tau, \delta)$ une règle de décision. Δ est un doublet composé :

– d'une stratégie d'arrêt τ,

– d'une stratégie d'action δ.

Une règle réalise une application de l'ensemble des informations mises à disposition du contrôleur de la qualité dans l'ensemble des actions qu'il peut entreprendre. Ces règles seront donc des fonctions des $(x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots x_T)$ uniquement et non du niveau de qualité p. Contrairement au cas du contrôle de la qualité à taille d'échantillon fixé, l'aspect séquentiel rend leur structure un peu plus compliquée en introduisant deux niveaux pour répondre aux questions suivantes.

3.1. Quand doit-on s'arrêter? La règle d'arrêt T

Une stratégie d'arrêt est une variable aléatoire :

$$\tau : \mathbf{x}^T \mapsto \tau(\mathbf{x}^T) \in \{1, 2 \dots T\} \tag{11}$$

qui indique pour une trajectoire $\mathbf{x}^T$ de $\mathbf{X}^T$, l'instant auquel on cesse d'échantillonner. La décision d'arrêter l'échantillonnage à l'instant n est prise en fonction du passé observé $\mathbf{x}^n$. Cette propriété implique que τ est un temps d'arrêt (Dacunha-Castel et Duflo, 1983), c'est-à-dire que les événements de type $\{\tau = n\}$ sont mesurables suivant la filtration engendrée par la suite $\mathbf{X}^n = X_1, X_2, \dots X_n$ constituée des v.a. d'informations jusqu'à l'étape n uniquement.

Le fait de construire la stratégie d'arrêt comme une fonction des réalisations $\mathbf{x}^T$ de $\mathbf{X}^T$ implique que les événements $\{\tau = n\}$ pour $n \in \{1, 2 \dots T\}$ forment une partition de l'ensemble des trajectoires. Cette partition ne dépend pas de la valeur de p. Ceci ne signifie pas que la variable τ est indépendante de p, mais que l'événement $\{\tau = n\}$ conditionnellement à x_n est indépendant de p, considérée comme une v.a. selon l'approche bayesienne.

3.2. Lorsqu'on s'arrête, que faire? La stratégie d'actions δ

Une stratégie d'actions est définie par :

$$\delta,\ x^n \mapsto \delta(\mathbf{x}^n) \in \{d_1, d_2\} \tag{12}$$

δ est une application qui affecte à toutes les trajectoires $\mathbf{x}^n$ suivies entre l'origine et l'étape $n \leqslant T$, un élément de l'ensemble $\{d_1,\ d_2\}$ indiquant un choix entre l'une des deux actions, si l'on arrêtait l'inspection à l'étape n :

d_1 : «livrer»

ou d_2 : «mettre au rebut»

Quand la valeur d'arrêt τ est connue, la stratégie d'action δ indique en fonction de la trajectoire $\mathbf{x}^\tau$ suivie entre l'origine et l'étape τ la décision opérationnelle après arrêt de l'échantillonnage, $\delta(\mathbf{x}^\tau)$.

3.3. Fonction de coût

La fonction de coût W associe à chaque action et à chaque état de la nature une évaluation numérique des pertes occasionnées par l'action. Nous utiliserons ici la fonction de coût simple, définie dans Ulmo et Bernier (1973), soit :

$$W_n(d_1, p) = W(\text{livraison à l'étape}\quad n,\ p) = pCN + kn \tag{13}$$

Si l'on choisit de livrer (décision d_1), parmi les N objets du lot, on admet que pN produits défectueux seront retournés à l'industriel. La valeur pCN représente alors une évaluation des frais de retour et de perte d'image de marque : c'est le coût de la «non-qualité»; si l'on exprime C dans la même unité de coût que celle du prix de fabrication d'un objet, C prend des valeurs supérieures à 1. On ajoute un coût d'échantillonnage unitaire : k, exprimé dans la même unité de coût que celle du prix de fabrication d'un objet, représente un coût d'examen et de contrôle par objet. Le coût de la mise au rebut est dans ce cas simplement estimé à une unité monétaire pour chacun des N objets de la fabrication contrôlée.

$$W_n(d_2, p) = W(\text{rébut à l'étape } n,\, p) = N + kn \tag{14}$$

3.4. Contrôle statistique classique

Remarquons que le contrôle statistique classique de la qualité procède par familles de règles «standard» Δ_{c_1,c_2} indicée par deux fonctions seuil $n \to c_1(n)$ et $n \to c_2(n)$ avec $c_1(n) \leqslant c_2(n)$ et $c_1(T) = c_2(T)$ telles que :

$$\begin{aligned}
\tau_{c_1,c_2}(\mathbf{x}^n) > n \quad & \text{si } c_2(n) \geqslant x_n \geqslant c_1(n)\\
\tau_{c_1,c_2}(\mathbf{x}^n) = n \quad & \text{si } x_n \notin]c_1(n), c_2(n)[\\
\delta_{c_1,c_2}(\mathbf{x}^n) = d_1 \quad & \text{si } x_n \leqslant c_1(n)\\
\delta_{c_1,c_2}(\mathbf{x}^n) = d_2 \quad & \text{si } x_n > c_2(n)
\end{aligned} \tag{15}$$

Notons que, du point de vue opérationnel, la stratégie d'action ne nous intéresse que quand $\tau(\mathbf{x}^n) = n$. Alors $\delta(\mathbf{x}^n) = d_2$ si $T \geqslant x_n > c_2(n)$, $\delta(\mathbf{x}^n) = d_1$ si $0 \leqslant x_n < c_1(n)$. En pratique, n'importe quelle valeur de la règle d'action peut être affectée aux points $x_n \in]c_1(n), c_2(n)[$.

4. Risque bayesien et règles de décision bayesienne

4.1. Risque bayesien séquentiel

Quel critère peut-on adopter pour exprimer le coût global encouru par la règle séquentielle Δ lorsqu'on réalise des séries d'observations $(x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots x_T)$ sous l'état de non-qualité p? On définit, dans le contexte séquentiel, le risque par l'expression suivante, moyenne des coûts (terminaux) possibles évaluée sur tous les aléas de l'échantillon obtenu à l'étape n :

$$R(\Delta, p) = \boldsymbol{E}_{X_1 \ldots X_T}\big(W_\tau(\delta(\mathbf{X}^\tau), p)\tag{16}$$

Puis on calcule le risque bayesien en intégrant sur toutes les valeur possibles de p avec la distribution *a priori* π_0 :

$$\overline{R}_{\pi_0}(\Delta) = \boldsymbol{E}_{\pi_0(p)} R(\Delta, p) = \boldsymbol{E}_{X_1 \ldots X_T, p}\big(W_\tau(\delta(\mathbf{X}^\tau), p)\big) \tag{17}$$

En d'autres termes, l'équation (17) évalue un coût moyen calculé sur toutes les trajectoires depuis le démarrage de l'échantillonnage jusqu'à la décision d'arrêt en considérant à la fois tous les aléas des tirages possibles de l'échantillonnage et l'incertitude de l'état de qualité de la fabrication. C'est ce critère, prenant en compte à la fois des considérations de risque de variabilité du tirage et de sensibilité aux incertitudes, qui est adopté par l'approche bayesienne.

4.2. *Éléments d'analyse du risque bayesien*

En s'appuyant sur $\left(\mathbf{1} = \sum_{n=1}^{T} \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}\right)$ l'équation (17) devient :

$$\begin{aligned} \overline{R}_{\pi_0}(\Delta) &= \boldsymbol{E}_{X_1 \ldots X_T, p}\left(\left(\sum_{n=1}^{T} \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}\right) W_\tau(\delta(\mathbf{X}^\tau), p)\right) \\ \overline{R}_{\pi_0}(\Delta) &= \sum_{n=1}^{T} \boldsymbol{E}_{X_1 \ldots X_n, p}\left(\mathbf{1}_{\{\tau=n\}} W_n(\delta(\mathbf{X}^n), p)\right) \end{aligned} \tag{18}$$

En utilisant l'équation (10) (seconde propriété due au caractère markovien d'ordre un des $\mathbf{x}^n$) pour $h(\mathbf{x}^n, p) = \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} W_n(\delta(\mathbf{x}^n), p)$ l'équation (18) peut encore s'écrire :

$$\overline{R}_{\pi_0}(\Delta) = \sum_{n=1}^{T} \boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|X_1} \ldots \boldsymbol{E}_{X_n|X_{n-1}}\left(\boldsymbol{E}_{p|X_n} \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} W_n(\delta(\mathbf{x}^n), p)\right) \ldots\right) \tag{19}$$

Dans l'équation (19) la v.a. $\mathbf{1}_{\{\tau=n\}}$ ne dépend que des $\mathbf{X}^n$ mais pas de p, une fois connus les x_n, de sorte que l'on peut l'extraire du terme d'espérance sur p et écrire :

$$\overline{R}_{\pi_0}(\Delta) = \sum_{n=1}^{T} \boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|X_1} \ldots \boldsymbol{E}_{X_n|X_{n-1}} \mathbf{1}_{\{\tau=n\}}\left(\boldsymbol{E}_{p|X_n} W_n(\delta(\mathbf{x}^n), p)\right) \ldots\right) \tag{20}$$

Pour mener à bien les calculs successifs d'espérance conditionnelle de l'équation 20, on utilisera la loi de transition du processus donnée à la formule 8.

5. Construction d'une règle bayesienne

Nous allons schématiquement indiquer le procédé de construction d'une règle Δ^* minimisant le risque bayesien séquentiel grâce à une technique de récurrence sur les valeurs du temps d'arrêt.

$$R_\pi(\Delta^*) = \min_{\delta, \tau} \boldsymbol{E}_{X_1 \ldots X_T, p}(W_\tau(\delta(\mathbf{X}^\tau), p)) \tag{21}$$

5.1. Recherche de la stratégie d'action optimale

Il apparaît de façon claire sur l'équation (20) que la stratégie d'action optimale doit être composée de tactiques $\delta(x_n)$ minimisant l'espérance *a posteriori* des fonctions de coûts $\boldsymbol{E}_{p|x_n}(W_n(\delta(\mathbf{x}^n),p))$. A cause de la forme particulière de la fonction de coût (qui ne dépend pas de toute la trajectoire mais du dernier point atteint) et en raison du caractère exhaustif de x_n pour p quand on considère un échantillon de taille n, la tactique optimale δ^* et le coût optimal *a posteriori* associé ne sont fonctions que de l'observation x_n à l'étape n et non de toute la trajectoire jusqu'à n. Par abus de notation, on écrira alors dans la suite du texte $\delta^*(x_n) = \delta^*(\mathbf{X}^n)$. δ^* est telle que :

$$\begin{array}{l}\text{Si } \boldsymbol{E}_{\pi_n(p|x_n)}(W_n(d_1,p) < \boldsymbol{E}_{\pi_n(p|x_n)}(W_n(d_2,p) \text{ alors } \delta^*(x_n) = d_1 \\ \text{Sinon } \delta^*(x_n) = d_2\end{array} \tag{22}$$

Dans les espérances dites *a posteriori* de la formule (22), la loi de probabilité de la variable aléatoire p conditionnellement à x_n , notée $\pi_n(p|x_n)$ est, d'après (3), la loi bêta de paramètres $a + x_n$ et $b + n - x_n$.

Avec cette forme particulière des lois de probabilités *a posteriori* données par l'équation (3) et des coûts donnés par les équations (13) et (14), il est facile de montrer que, sachant que la décision de livrer ou de rejeter doit être prise à l'étape n, la tactique $\delta^*(x_n)$ est caractérisée par un niveau d'acceptation égal à $c = \dfrac{n+b-(C-1)a}{C}$, comme dans Parent *et al.* (1995), c'est-à-dire que si $X_n \leqslant c$ on livre le lot (décision d_1) sinon on le met au rebut (décision d_2).

Nous noterons désormais dans la suite de l'article :

$$W_n^*(x_n)\boldsymbol{E}_{p|x_n}(W_n(\delta^*(x_n),p)) = \int_0^1 \pi_n(p|x_n)W_n(\delta^*(x_n),p)dp$$

Ayant résolu le problème de la stratégie d'action, il s'agit maintenant de rechercher la stratégie d'arrêt optimale telle que :

$$\overline{R}_{\pi_0} = \min_{\tau} \sum_{n=1}^{T} \boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|X_1} \ldots \boldsymbol{E}_{X_n|X_{n-1}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau=n\}} W_n^*(X_n)\right) \ldots\right) \tag{23}$$

5.2. Recherche de la stratégie d'arrêt optimale

La difficulté principale réside dans la détermination de τ. Nous allons utiliser le principe de Massé (1946)-Bellman (1957) pour évaluer en chaîne les temps d'arrêt. Ce principe énonce que lorsqu'on connaît une «politique» optimale (au sens de «règle» telle que définie ci-dessus), toute sous-politique (au sens morceau constitué d'une série de tactiques) est elle même optimale à condition d'imposer aux trajectoires de la sous politique considérée les conditions initiales et finales définie par la politique optimale originelle.

Au préalable, illustrons l'idée générale de construction de la récurrence sur les trajectoires atteignant les étapes T et $T-1$, c'est-à-dire celles à temps d'arrêt $\{\tau \geqslant T-1\}$: cette préoccupation est légitime car l'expression (23) étant une somme de termes positifs, le minimum sera réalisé si chacun des termes de la somme est minimum. D'autre part, compte-tenu des conditions terminales (τ borné par T), nous pouvons, avec un calcul simple d'espérance mathématique détaillé dans Parent *et al.* (1995), évaluer les coûts *a posteriori* en T et $T-1$:

$$\begin{aligned} W_T^*(x_T) &= kT + N \times \text{Min}\left(1,\, C\frac{a+x_T}{a+b+T}\right) \\ W_{T-1}^*(x_{T-1}) &= k(T-1) + N \times \text{Min}\left(1,\, C\frac{a+x_{T-1}}{a+b+T-1}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

En individualisant les trajectoires pour lesquelles les temps d'arrêt valent $\{\tau = T-1\}$ et $\{\tau = T\}$, l'expression 23 de $\overline{R}_{\pi_0}(\Delta)$ devient :

$$\min_{\tau}\left[\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{T-2} \boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|X_1}\ldots\boldsymbol{E}_{X_n|X_{n-1}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau=n\}}W_n^*(X_n)\right)\ldots\right) \qquad (25)\\ +\boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|X_1}\ldots\boldsymbol{E}_{X_{T-1}|X_{T-2}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{\{\tau=T-1\}}W_{T-1}^*(X_{T-1})\\ +\boldsymbol{E}_{X_T|X_{T-1}}\mathbf{1}_{\{\tau=T\}}W_T^*(X_T)\end{pmatrix}\ldots\right)\end{array}\right.\right]$$

Sous cette forme, on voit que sur une trajectoire se prolongeant jusqu'à $T-1$ au moins et passant par l'observation $X_{T-1} = x_{T-1}$, il s'agit de rendre minimum la quantité :

$$\min_{\tau}\left(\mathbf{1}_{\{\tau=T-1\}}W_{T-1}^*(x_{T-1}) + \boldsymbol{E}_{X_T|x_{T-1}}\mathbf{1}_{\{\tau=T\}}W_T^*(X_T)\right) \tag{26}$$

On compare donc $W_{T-1}^*(x_{T-1})$ à $\boldsymbol{E}_{X_T|x_{T-1}}W_T^*(X_T)$. La tactique d'arrêt optimale sur les trajectoires appartenant à l'événement $\{\tau = T-1\}$ est donc fonction uniquement de x_{T-1} et non de toute la trajectoire $\mathbf{x}^{T-1}$ jusqu'en x_{T-1}. En d'autres termes, la seule v. a. X_{T-1} (et non toute la tribu engendrée par la série des suffit $\mathbf{X}^{T-1}$!) suffit pour déterminer la valeur du temps d'arrêt optimal $\{\tau = T-1\}$.

5.3. Programmation dynamique pour la recherche de la stratégie d'arrêt optimale

Supposons que τ est un temps d'arrêt optimal. Nous avons vu que les événements $\{\tau = k\}$ constituent une partition des trajectoires et que le risque bayesien peut être écrit comme une somme de termes positifs indicés par les valeurs de k. Le paragraphe précédent montre comment partitionner à l'étape $T-1$ l'ensemble des trajectoires telles que $\{\tau \geqslant T-1\}$ en un sous-ensemble $\{\tau = T-1\}$ et son complémentaire $\{\tau = T\}$. Cette partition de $\{\tau \geqslant T-1\}$ ne dépend que de x_{T-1}, valeur de X_{T-1} à l'étape $T-1$ et non de toute la trajectoire passée pour atteindre ce point. Nous allons généraliser une propriété analogue à chaque pas de temps par récurrence rétrograde.

Considérons la valeur $k=n$, d'après (23) la part du risque bayesien concernant les trajectoires telles que $\tau > n$ est égale à :

$$\boldsymbol{E}_{X_1}\left(E_{X_2|X_1}\ldots\boldsymbol{E}_{X_{n+1}|X_n}\left(\mathbf{1}_{\{\tau>n\}}U^*_{n+1}(\mathbf{X}^{n+1})\right)\ldots\right) \tag{26}$$

où :

$$U^*_{n+1}(X_1, X_2, \ldots X_{n+1}) = \begin{cases} \sum_{k=n+2}^{T}\left(\boldsymbol{E}_{X_{n+2}|X_{n+1}}\ldots\boldsymbol{E}_{X_k|X_{k-1}}\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}\right. \\ \left.(w^*_k(X_k))\right) + \mathbf{1}_{\{\tau=n+1\}}(W^*_n(X_{n+1})) \end{cases} \tag{27}$$

Cette quantité permet d'exprimer le risque minimal pour un temps d'arrêt optimal, conditionnellement au fait que l'on a décidé que ce temps d'arrêt était supérieur ou égal à $n+1$. C'est une espérance conditionnelle sur des fonctions de X^{n+1} et de $(X_1, X_2, \ldots X_T)$ par l'intermédiaire de τ, de sorte qu'en premier examen elle ne dépende que des trajectoires possibles jusqu'à l'instant $n+1$ engendrées par la v.a. X^n.

L'hypothèse de récurrence consiste à supposer que :

a) pour tout $k > n$, le temps d'arrêt optimal $\{\tau = k\}$ est une fonction de la seule v.a. X_n et non des valeurs possibles $\mathbf{x}^n$ de la trajectoire passée aboutissant en $X_n = x_n$.

b) compte tenu de ces propriétés, la valeur de la part de risque concernant les trajectoires de l'événement $\{\tau \geqslant n+1\}$ ne dépend que de la valeur x_{n+1} et non de tout le passé jusqu'au temps $n+1$: $U^*_{n+1}(X_1, X_2, \ldots X_n, X_{n+1}) = U^*_{n+1}(Xn+1)$; on sait d'ailleurs expliciter les valeurs du temps d'arrêt optimal pour les trajectoires dont le temps d'arrêt est supérieur à n et calculer par la formule (27) le risque minimal correspondant à ce groupe de trajectoires.

Les propriétés $a)$ et $b)$ sont vraies à l'étape T et $T-1$, comme le montre immédiatement la formule 26. Le calcul par programmation dynamique consiste à supposer ces propriétés de $n+1$ à T et à démontrer qu'elles sont vraies aussi à l'étape n.

En séparant l'arrêt immédiat à l'étape n des autres, la formule (27) devient :

$$\min_{\tau}\left[\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|X_1}\ldots\boldsymbol{E}_{X_k|X_{k-1}}\left(\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}W^*_k(X_k)\right)\ldots\right) \\ +\boldsymbol{E}_{X_1}\left(\boldsymbol{E}_{X_2|X_1}\ldots\boldsymbol{E}_{X_n|X_{n-1}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}_{\{\tau=n\}}W^*_n(X_n) \\ +\mathbf{1}_{\tau>n}\boldsymbol{E}_{X_{n+1}|X_n}U^*_{n+1}(X_{n+1})\end{pmatrix}\ldots\right) \end{array}\right. \tag{28}$$

La formule 28 montre que l'on peut écrire :

$$U_n^*(\mathbf{x}^n) = \min_{\tau} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1}_{\{\tau=n\}} W_n^*(x_n) + \\ \mathbf{1}_{\{\tau>n\}} \boldsymbol{E}_{X_{n+1}|X_n} U_n^*(X_{n+1}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xleftarrow{\text{trajectoires à temps d'arrêt } \tau>n} \\ \xleftarrow{\text{trajectoires à temps d'arrêt } \tau=n} \end{array} \qquad (29)$$

L'équation 29 démontre clairement que $U_n^*(\mathbf{x}^n) = U_n^*(x_n)$, et que le choix de s'arrêter en n ne dépend que de x_n. Les conditions $a)$ et $b)$ sont donc transférées à l'étape n.

On peut alors utiliser le principe de Massé-Bellman pour calculer de proche en proche et de façon rétrograde les valeurs successives $U_n^*(x_n)$ et construire la partition des trajectoires entre les événements $\{\tau = k\}$, $k = 1 \ldots T$ jusque $\overline{R}_{\pi_0}(\Delta^*) = U_0^*(x_0)$.

La figure 1 schématise cette procédure de calcul rétrograde par programmation dynamique. Notons que le doublet stratégie d'arrêt et stratégie d'actions permet de construire une règle séquentielle optimale, valable non seulement avant toute prise d'échantillon, mais aussi depuis n'importe quelle étape en cours de l'échantillonnage : en effet, la quantité $U_n^*(x_n)$ s'interprète comme le risque bayesien sous la condition de démarrer l'échantillonnage en plaçant l'origine en n avec une information initiale x_n et un *a priori* $\pi_n(p|x_n)$ pour la description de la connaissance sur p.

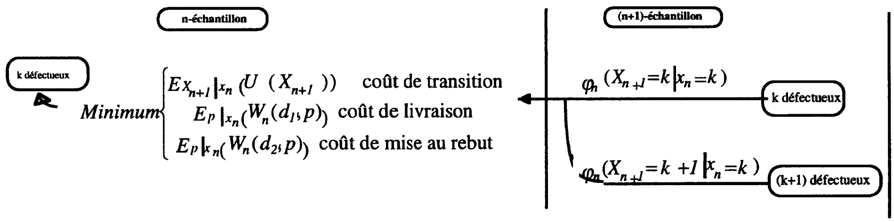

FIGURE 1 : *Principe de calcul récursif de la règle optimale pour un échantillonnage séquentiel tronqué*

6. Applications

La programmation de l'algorithme donné par les équations 28 et 29 peut être effectué facilement sur un tableur. A titre d'exemple, une programmation sous Excel a permis de réaliser rapidement le diagramme de contrôle de la figure 2 :

– les colonnes représentent l'ensemble des réalisations aléatoires de X_n (par exemple, pour la colonne H15, le nombre cumulé d'objets défectueux varie de 0 à 15),

– le type de hachures de chaque case (*cf.* légende de la figure 2) indique la règle de décision optimale compte tenu du nombre d'objets défectueux observés jusqu'à l'horizon concerné.

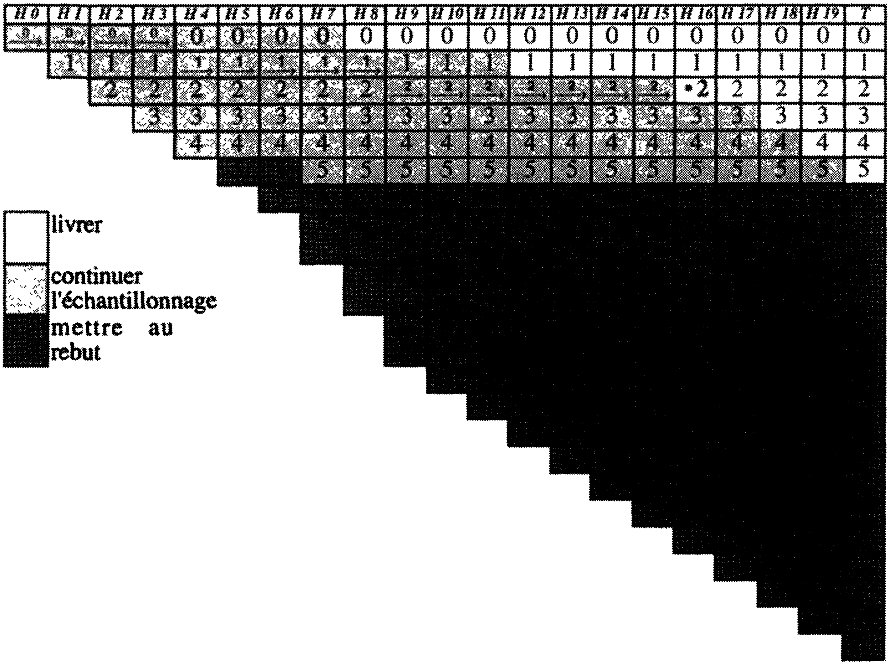

FIGURE 2 : *Exemple de diagramme de contrôle : la loi a priori a pour paramètres* $a = 1$ *et* $b = 10$, *la fonction de coût est telle que* $W_n(d_1, p) = n+5pN$; $W_n(d_2, p) = n + N$; $T = 20$.

Sur la figure 2, à titre d'illustration de l'utilisation de tels diagrammes, un cheminement possible du nombre cumulé d'objets défectueux observés et des décisions de poursuite ou d'arrêt a été matérialisé par des flèches : ici, le processus séquentiel de contrôle s'arrête après avoir prélevé 16 objets dont deux sont défectueux. On trouvera dans Girard (1994) d'autres diagrammes de contrôle séquentiel de la qualité par attribut et une analyse de sensibilité des divers coefficients de la fonction de coût et des hyperparamètres de la distribution *a priori* du paramètre p.

7. Discussion et conclusions

Le contrôle statistique séquentiel illustre le paradigme de l'ingénierie sous incertitudes (Krzysztofowicz, 1994) : il s'agit d'établir un compromis entre trois compétitions temporelles concomitantes :

• retarder une prise de décision permet d'acquérir plus d'informations; l'incertitude sur le phénomène étudié diminue, ce qui permet de réduire le caractère aléatoire du pari engagé par le choix d'une alternative de décision. Cet apprentissage sur les valeurs inconnues du paramètre p au fur et à mesure de l'acquisition d'informations nouvelles est effectué ici par l'utilisation de la formule de Bayes.

• l'utilité globale de l'adéquation d'une décision donnée à un état possible du phénomène inconnu diminue au cours du temps au fur et à mesure que cette décision est retardée, ne serait-ce qu'à cause des coûts d'acquisition d'informations. Dans notre exemple, pour un état de connaissance fixé sur p, on a bien $W_n(d_1, p) < W_{n+1}(d_1, p)$ et $W_n(d_2, p) < W_{n+1}(d_2, p)$.

• plus le temps passe et plus la taille du domaine réalisable des alternatives techniques diminue : il y a perte de flexibilité. Cette évolution ne se manifeste que très peu dans l'exemple du contrôle statistique de la qualité sauf à l'étape ultime où l'ensemble des tactiques possibles est contraint à se restreindre.

En adoptant le point de vue précédent, la décision d'arrêt d'un processus séquentiel doit être prise lorsque la valeur escomptée d'une information supplémentaire ne surpasse plus les coûts marginaux, directs et indirects, qui sont engagés pour obtenir cette information.

Le modèle développé dans ce papier a été simplement obtenu à partir d'un schéma de Bernouilli sur lequel ont été employées des fonctions de coûts élémentaires et un ensemble volontairement restreint d'actions très schématiques. De nombreuses améliorations peuvent être envisagées pour ce modèle.

Tout d'abord, on peut modifier les hypothèses du tirage et considérer par exemple un tirage sans remise dans un lot de qualité homogène mais de taille faible (type fabrication de luxe). Dans ce cas, l'action du contrôle limitera le nombre d'objets disponibles fabriqués et aura une influence économique directe sur la production. L'approche bayesienne peut apporter une procédure efficace dans ce cas, même si l'on suppose inconnue la taille de la fabrication (estimation par contrôle destructif de la qualité d'une ressource inconnue). De la même façon, on pourrait enrichir le nombre d'actions permises en permettant par exemple de vendre le lot fabriqué moins cher en fonction de la classe de qualité estimée par le contrôle statistique.

Ensuite, un obstacle important à la démarche concerne la fonction de coût : l'obtention de sa forme et de ses divers coefficients auprès des industriels peut ne pas être aisée (malgré la norme AFNOR NFX 50-126 qui explicite les méthodes d'évaluation des coûts de non-qualité!), car c'est un problème qui demande la collaboration entre plusieurs services (Études et Développements, Marketing, Qualité et Contrôle de production pour le moins).

Plus généralement, comme l'avait fait remarquer Wetherill (1966), on peut s'étonner de cette démarche bayesienne de contrôle de la qualité qui vise à fournir un optimum économique et non à encourager directement le producteur à fournir la qualité désirée... notons que l'on pourrait introduire par un formalisme analogue les préoccupations du «client» dans la fonction de coût. Cela semble d'ailleurs une façon séduisante d'analyser les arbitrages entre client et producteur : le fabricant choisit une valeur de T tandis que le consommateur fixe les enjeux.

D'autre part, le cas limite théorique difficile et intéressant du plan séquentiel non tronqué ($T \rightarrow +\infty$) n'est pas traité dans cet article. Le lecteur intéressé trouvera dans Wald (1947) et dans Berger (1985) les développements théoriques utiles pour compléter le traitement statistique complet et bayesien de toutes les situations rencontrées en contrôle statistique par attribut.

Enfin, on peut développer un contrôle statistique de la qualité par variable mono ou multidimensionnelle (Albright et Collins, 1977) en suivant une démarche tout à fait analogue à l'approche bayesienne décrite ici pour le contrôle par attribut : on trouvera dans Krzysztofowicz (1987) les fondements d'un modèle normal avec lois *a priori* bétanormales. Ce modèle est directement utilisable pour la construction d'un contrôle statistique bayesien de la qualité par variable et il ne présente pas plus de difficultés conceptuelles que celles exposées dans ce document. Seul l'espace des états du processus de Markov généré par les informations est différent (il s'agit alors de R^2 et il faut dans ce cas, à chaque étape, suivre l'évolution de deux grandeurs continues : la moyenne et la variance empiriques, statistiques exhaustives pour le modèle normal).

Pour conclure, d'un point de vue conceptuel, la démarche bayesienne comble le fossé qui existait entre les connaissances subjectives, les données expérimentales et les critères économiques qu'elle intègre dans une même démarche décisionnelle pour trouver une règle de décision optimale. De plus, cette optique nous semble plus intuitive et plus simple à exposer qu'une démarche à base de tests classiques d'hypothèses, que le responsable qualité en entreprise perçoit hélas, encore trop souvent, comme des «recettes de cuisine statistiques».

Remerciements : Les auteurs ont bénéficié des critiques et suggestions de A. Chaouche et J. Bernier. Cet article s'appuie sur un rapport scientifique de fin d'études (Girard, 1994) réalisé conjointement à l'École Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts et à l'Institut National Agronomique Paris-Grignon.

Références bibliographiques

AFNOR *Statistiques Tome 2*. Paris. La Défense : AFNOR, 1988.

ALBRIGHT S.C., COLLINS R.S. A bayesian approach to the optimal control of continuous industrial processes. *Int. J. Product. Res.* 15(1). 1977.

BAYES Th. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans; Roy. Soc.* 53, 1763.

BELLMAN, R.E. *Dynamic programming*. Princeton University Press, Princeton, N.J., USA, 1957.

BERGER J. O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. 2^{nd} Ed. New York : Springer Verlag, 1985.

BERNIER J. *Simulation, Bayes et bootstrap en hydrologie statistique*. Note interne de recherche. Québec : INRS-Eau, 1993.

BILLON C., PARENT E. *Statistiques Bayesiennes et contrôle de qualité par attribut. Proceedings*, 2^{nd}European Conference on food industries and statistical methods. Nantes, June 13-14, France, 1991.

BOX G.E.P., TIAO G.C. *Bayesian inference in statistical analysis*. Massachusetts, Reading : Addison-Wesley, 1973.

CRESSIE N., SEHEULT A. Empirical Bayes estimation in sampling inspection. *Biometrica*, 72(2), 1985.

DACUHNA-CASTELLE D., DUFLO M. *Probabilités et statistiques. T. 2 : Problèmes à temps mobile*. Paris : Masson, 1983.

DAUDIN J.J., DUBY C., TRECOURT P. Plans de contrôle double optimaux (Maîtrise des procédés et contrôle de réception). *Rev. Statistique Appliquée*, XXXVIII(4), 1990.

DeGROOT M.H. *Optimal statistical decisions*. New York : McGraw-Hill, 1970.

DUCKSTEIN L., BOBEE B., BOGARDI I. *Bayesian forecasting of hydrological variables under changing climatology. Proceedings*, International Association of Hydrological Sciences, Vancouver, B.C., August 1987.

FELLER W. *An introduction to probability theory and its applications*. New-York : Wiley, 1966.

FERGUSON T.S. *Mathematical statistics : a decision-theoretic approach*. New-York : Academic Press, 1967.

GIRARD P. *Contrôle de la qualité par attribut : contribution des statistiques bayésiennes et applications aux industries agro-alimentaires*. Rapport scientifique de fin d'études à l'Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts, Paris, 1994.

JEFFREY H. *Theory of probability*. Oxford University Press, 1961.

KRZYSTOFOWICZ R. Generic utility theory : explanatory model, behavioral hypotheses, empirical evidence. *in Cardinalism, a fundamental approach*. Eds ALLAIS M. and HAGEN O. Kluwer Academic Publishers, 1994.

KRZYSTOFOWICZ R. Markovian forecast processes. *Journal of the American Statistical Association*, march 1987.

KRZYSTOFOWICZ R. Strategic decisions under nonstationary conditions : a stopping-control paradigm. *in Engineering risk in natural resources management*, Eds DUCKSTEIN L. and PARENT E. NATO ASI series, Kluwer Academic Publishers, 1994.

LETERME F., VAN HOECKE A. Etude des risques d'erreurs de décision (risque client et fournisseur) lors de contrôles unitaires de produits en fonction de l'aptitude du procédé de frabrication et de l'aptitude du procédé du moyen de mesure. *Rev. Statistique Appliquée*, XLI(3), 1993.

MARTZ H.F. Empirical bayes single sampling plans for specified posterior consumer and producer risks. *Nav. Res. Logist. Quart.*, 22(4). 1976.

MASSE P. *Les réserves et la régulation de l'avenir*. Herrman, 1946.

PARENT E., CHAOUCHE A., GIRARD P. Sur l'apport des statistiques bayesiennes au contrôle de la qualité par attribut, partie 1 : contrôle simple. *Rev. Statistique Appliquée*, LXIII(3), 1995.

ROBERT C. *L'analyse statistique bayesienne*. Econometrica, 1992.

SAVAGE L. J. The subjective Basis of Statistical Practice. *Technical Report,* University of Michigan : Department of Statistics, Ann Arbor, 1961.

TRIBUS M. *Rational, Descriptions, Decisions and Design*. New York : Pergamon Press Inc, 1969.

ULMO J., BERNIER J. *Eléments de Décision Statistique*. Paris : Presses Universitaires de France, 1973.

VESSEREAU A. Une collection de plans d'échantillonnage pour les contrôles de réception. *Rev. Statistique Appliquée*, XXXV(4), 1987.

WALD A. *Sequential analysis*. New York : Wiley, 1947.

WEBER J.D. Historical aspects of the bayesian controversy with comprehensive bibliography. Research note. College of business and Public Administration. University of Arizona; Tucson : University of Arizona, 1973.

WETHERILL G.B. *Méthodes séquentielles en statistique*. Paris : Dunod, 1966.