REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

P. LYONNET

J. FAUCHON

Comparaison de la méthode d'estimation des rangs de défaillances dans le cas de données fortement censurées proposée par Johnson avec celle proposée par Patrick Lyonnet

Revue de statistique appliquée, tome 40, n° 3 (1992), p. 73-78

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1992__40_3_73_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1992, **XXXX** (3), 73-78

COMPARAISON DE LA MÉTHODE D'ESTIMATION DES RANGS DE DÉFAILLANCES DANS LE CAS DE DONNÉES FORTEMENT CENSURÉES PROPOSÉE PAR JOHNSON AVEC CELLE PROPOSÉE PAR PATRICK LYONNET

P. Lyonnet*, J. Fauchon**

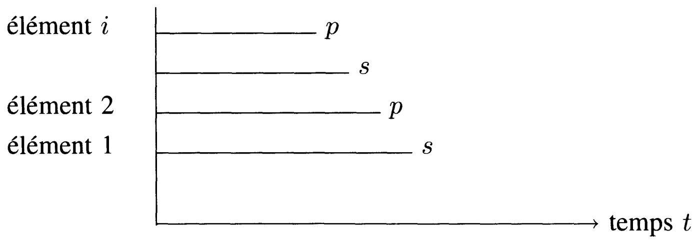
* *Enise, Professeur d'Ensam*

** *Insa, Professeur de l'Université de Lyon*

Lors de la modélisation de la survie d'élèments mécaniques dans le cadre de calculs de fiabilité, on rencontre souvent des échantillons censurés à 25% ou 50%. Ceci est une difficulté pour l'obtention d'un modèle de type loi de Weibull à trois paramètres. Une solution est donnée à ce problème à l'aide de la formule de Johnson qui permet de trouver l'incrément aprés censure pour le calcul du rang de la défaillance. Cette méthode est toutefois fortement biaisée. A cet effet, une nouvelle technique utilisant une itération «loi uniforme/loi de Weibull» a été présentée par le premier auteur dans la Revue de Statistique Appliquée en juin 91 (cf [2]). L'objet du présent article est de vérifier la valeur de cette théorie sur des données fortement censurées.

1. Quelques définitions de base

1.1 Echantillon censuré multiple à droite



P = panne S = suspendu

Les éléments suspendus le sont naturellement par le fait que l'observation cesse à l'instant où des systèmes fonctionnent encore d'une part et d'autre part certains éléments ont été mis en fonctionnement dans des périodes différentes, et de ce fait ne totalisent pas le même nombre d'heures d'utilisation . Notons également que le cas de censurées simples à droite est un cas particulier de celui-ci.

1.2 Rappels de fiabilité

$R(t) =$ Fonction fiabilité : représente la probabilité de fonctionnement à l'instant t

$F(t) =$ Fonction cumulée de défaillances

$F(t) + R(t) = 1$

• Loi de Weibull :

$$R(t) = e^{-((t-G)/E)^{\beta}}$$

$G =$ paramètre de décalage d'origine (dimension d'un temps)

$E =$ paramètre d'échelle (dimension d'un temps)

$\beta =$ paramètre de forme (sans dimension)

1.3 Estimation de la fonction de défaillance cumulée

Cette estimation se fait suivant la méthode des rangs médians à l'aide de la formule approchée suivante :

• $F(ti) = (ni - 0,3)/(N + 0,4)$

où : $N =$ (Nombre d'éléments observés défaillant + suspendus)

• $ni =$ Rang de la i^{e} défaillance (C'est la caractéristique dont l'estimation fait l'objet de la méthode proposée).

• $ti =$ Temps jusqu'à la défaillance du i^{e} élément.

• Méthode de «Johnson» :

Elle se résume à l'utilisation d'une formule qui permet de déterminer le rang après censure en ajoutant un incrément «I» au rang de la défaillance précédente.

Formule de Johnson :

$$I = \frac{N + 1 - \text{Ordre de la défaillance précédente}}{1 + \text{Nombre d'individus vivants après le dernier suspendu du groupe}}$$

• Méthode de calcul de l'espérance mathématique du rang (EMR) aprés censures :

Cette méthode présentée dans RSA, 2-91 (pages 59/68) et qu'on appelera méthode Lyonnet consiste à calculer EMR sachant que l'on a eu 1,2 ou C censures. Cependant pour faire ce calcul il faut connaître la loi de comportement des éléments ce qui est justement ce que l'on est en train de chercher, d'ou l'idée de procéder en deux étapes la première sera le calcul de l'EMR à partir d'un modèle ne demandant pas l'estimation de paramètres (loi uniforme ou formule de Johnson). La deuxième étape utilisera le modèle trouvé la première fois et réitérera le calcul.

2. Comparaison de la méthode Lyonnet avec la méthode de «Johnson» au travers d'une population simulée

L'intérêt de cette nouvelle approche du calcul des rangs à affecter aux défaillances dans le cas d'échantillonnage à censures multiples à droite, ne peut être démontré que si le résultat obtenu apparait plus «robuste». Il justifie alors sa difficulté de mise en œuvre plus grande que celle de la formule de Johnson.

2.1 Méthodologie utilisée

On partira d'un échantillon complet issu d'une population connue. Cet échantillon sera ici obtenu par simulation de Monte-Carlo à l'aide d'un logiciel du Laboratoire de M. FAUCHON de l'INSA de LYON..

Cet échantillon sera censuré artificiellement à 25%, et à 50 %.

Les résultats obtenus avec le logiciel Prevent (1) qui effectue l'itération méthode de Johnson – loi de Weibull à trois paramétres seront présentés et comparés.

Population d'origine

Distribution de Weibull de paramètre :

$$E = 640$$
$$\beta = 1,6$$
$$G = 2\,150$$

Echantillon de taille $n = 20$ obtenu par simulation.

Lecture des résultats expérimentaux				
2217	2274	2346	2368	2413
2468	2492	2499	2527	2579
2633	2733	2738	2759	2914
2935	3028	3072	3466	3566

Résultat obtenu avec «Prevent»(1) sur l'échantillon précédent «complet».

Notons que dans le cas où il n'y a pas de censures (échantillon complet) l'incrément apporté aux rangs pour le calcul de $F(t)$ sera égal à 1, d'où :

$$E = 636$$
$$\beta = 1,57$$
$$G = 2\,138$$

(1) Ce logiciel est un logiciel d'aide à la décision en matière de maintenance préventive développé par Lyonnet P. et Goujon T.

Comparaison des méthodes en extrayant un échantillon à censures multiples à droite à 25%.

			Méthode «Johnson»			Méthode «Lyonnet»	
N°	A/S	Données	Incrément	Rang	$F(t)$	Rang	$F(t)$
1	A	2217		1	0.034		0.034
2	A	2274		2	0.083		0.083
3	A	2346		3	0.131		0.131
4	A	2368		4	0.181	4	0.181
5	S	2413					
6	A	2468	1.0625	5.0625	0.2334	5.092	0.2596
7	S	2492					
8	A	2499	1.13839	6.2008	0.2892	6.208	0.2896
9	A	2527	"	7.3392	0.3450	7.208	0.3386
10	S	2579					
11	A	2633	1.2418	8.5811	0.4059	8.700	0.41176
12	A	2733	"	9.823	0.4668	10.175	0.4841
13	A	2738	"	11.065	0.5279	11.27	0.5378
14	A	2759	"	12.306	0.5885	12.430	0.5946
15	S	2914					
16	A	2935	1.449	13.755	0.6595	13.169	0.63083
17	A	3028	"	15.204	0.70358	14.804	0.71098
18	S	3072					
19	A	3466	1.932	17.136	0.8252	18.420	0.8882
20	A	3566	"	19.068	0.920	19.597	0.9459

«A» signifie élément avec défaillance, «S» élément sans défaillance donc suspendu.

avec $1/4$ de censurés, on obtient :

Méthode «Lyonnet»

$E = 710$
$\beta = 1,63$
$G = 2115$

Méthode «Johnson»

$E = 800$
$\beta = 1,37$
$G = 2155$

Comparaison des méthodes en extrayant un échantillon à censures multiples à droite à 50%.

			Méthode «Johnson»			Méthode «Lyonnet»	
N°	A/S	Données	Incrément	Rang	$F(t)$	Rang	$F(t)$
1	A	2217		1	0.034		0.034
2	A	2274		2	0.083		0.083
3	A	2346		3	0.131		0.131
4	A	2368		4	0.181	4	0.181
5	S	2413					
6	S	2468					
7	S	2492					
8	S	2499					
9	A	2527	1.3076	5.3076	0.245	6.7347	0.3154
10	S	2579					
11	S	2633					
12	A	2733	1.5692	6.876	0.322	8.346	0.3944
13	A	2738	"	8.446	0.399	8.94	0.4235
14	S	2759					
15	S	2914					
16	S	2935					
17	A	3028	2.510	10.956	0.5223	13.52	0.6480
18	S	3072					
19	A	3466	3.348	14.3	0.686	17.98	0.8666
20	A	3566	"	17.65	0.8504	18.92	0.9127

Méthode «Lyonnet»

$E = 860$
$\beta = 1,55$
$G = 2115$

Méthode «Johnson»

$E = 1200$
$\beta = 1,2$
$G = 2155$

2.2 Conclusion

Il apparaît au vu de ce résultat que la méthode d'estimation du rang moyen après censure faisant intervenir la probabilité conditionnelle de défaillance conduit à un résultat beaucoup plus près de la réalité.

La méthode des incréments de Johnson est source d'erreur dans le cas de forte censure (50 %) ; il suffit d'examiner le tableau précédent.

On peut dire, en final, que cette nouvelle méthode est plus «robuste» d'un point de vue statistique et doit être utilisée pour les fortes «censures». Notons également que le cas des données censurées à gauche peut étre abordé avec cette méthode.

Bibliographie

[1] Johnson L. G. (1964) The Statistical Treatment of Fatigue Experiment, Elsevier Publishing Company.

[2] Lyonnet P. (1991) Estimation de la fonction de répartition des défaillances à partir d'une itération loi uniforme/loi de Weibull, RSA, vol 39 n° 2 pages 59-68.