Revue de statistique appliquée

J. J. Daudin
C. Duby
P. Trécourt

Plans de contrôle double optimaux (maîtrise des procédés et contrôle de réception)

Revue de statistique appliquée, tome 38, nº 4 (1990), p. 45-59
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1990__38_4_45_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1990, **XXXVIII** (4), 45-59

PLANS DE CONTRÔLE DOUBLE OPTIMAUX (MAITRISE DES PROCÉDÉS ET CONTRÔLE DE RÉCEPTION)

J.J. DAUDIN, C. DUBY, P. TRÉCOURT

Institut National Agronomique Paris Grignon
Département de Mathématique et Informatique
16 rue Claude Bernard 75231 Paris Cedex 05

RÉSUMÉ

Il y a plusieurs plans doubles de contrôle de réception (par attribut ou par variable) ayant une même efficacité. Parmi ceux-ci, on peut chercher celui qui est le plus économique en nombre moyen d'objets échantillonnés. Dans cet article, nous proposons des algorithmes d'optimisation des plans doubles, et nous donnons une illustration des gains que l'on peut espérer. Nous traitons également le problème des cartes de contrôle doubles.

Mots-clés : *Carte de contrôle, Carte de contrôle double, Contrôle de qualité, Optimisation, Plan double.*

SUMMARY

For a same given efficiency, there are several double sampling plans, by attribute or by variable. It is then possible to pick off among them the most economical, i. e. the one whose average sample size is minimum. Optimization algorithms are proposed in this paper for double attribute and variable sampling plans and for the double Shewhart control chart. Some examples are given which give some indication about the save of sample size which may be attained by this method.

Key-words : *Attribute Sampling Plan, Double Sampling Plan, Double Sampling $\overline{X}$-chart, Variable Sampling Plan.*

1. Introduction

Le calcul des risques statistiques est un outil indispensable au contrôle de la qualité des produits et des processus de production. En particulier le choix de plans d'échantillonnage dans le contrôle de réception est fondé sur le calcul des risques de mauvaises décisions (risque du consommateur et du producteur), c'est à dire sur la courbe d'efficacité statistique. De même, le choix de la taille des échantillons dans le cas de la carte de contrôle de Shewhart, celui des limites de contrôle et celui de l'intervalle entre 2 échantillons successifs doit être fondé sur l'efficacité statistique de la carte et notamment sur le rang moyen d'arrivée du premier point hors des limites de contrôle (Average Run Length). En réalité le choix final est un compromis entre la volonté de diminuer les risques et le coût du contrôle (que l'on considère ici comme proportionnel à l'effort d'échantillonnage), ainsi que sa faisabilité sur le terrain. On sait en effet que pour obtenir des risques d'erreur nuls, il faut contrôler toute la production et que les risques augmentent quand diminue la taille de l'échantillon.

Cet article développe des méthodes de plans doubles optimaux, basées sur des algorithmes d'optimisation, qui permettent d'obtenir un meilleur compromis que les méthodes anciennes; on peut ainsi obtenir la même efficacité statistique (c'est à dire les mêmes risques d'erreur) tout en diminuant fortement le coût du contrôle. Inversement à coût égal, on obtient des protocoles de contrôle plus efficaces statistiquement, c'est à dire des risques d'erreurs plus faibles que les protocoles anciens (plans simples ou plans doubles non optimaux). Ce type de méthode est une illustration des progrès que permet l'optimisation et l'informatique dans l'amélioration des méthodes de contrôle statistique.

Il est connu que l'utilisation de l'échantillonnage double apporte un gain d'efficacité statistique, à taille moyenne d'échantillon égale, par rapport à l'échantillonnage simple. Les plans de contrôle double sont largement utilisés dans le contrôle de réception par attribut (Voir par exemple AFNOR (1988) ou SCHILLING (1982)). On les utilise également dans le cadre du contrôle de réception par variable (Voir SCHILLING (1982)). Ce type d'échantillonnage est généralement utilisé pour obtenir un contrôle de même efficacité statistique que le plan simple correspondant et de coût plus faible. En effet, à efficacité égale, les plans doubles permettent une réduction du coût d'échantillonnage de l'ordre de 10 à 40%. Ce type de plans n'est pas beaucoup plus compliqué que le plan simple à mettre en oeuvre et à faire appliquer par les contrôleurs. Il est, de plus, assez naturel, dans la mesure où il correspond à une notion largement répandue de «deuxième chance» : il donne à un lot douteux la possibilité de «se racheter» au deuxième échantillon. En ce sens, il est généralement mieux accepté à la fois par le fournisseur et par le client, que le plan simple qui apparaît comme un couperet sans recours.

La même idée peut s'appliquer aux cartes de contrôle sur la moyenne : certains pratiquent la règle suivante pour garder un processus de fabrication sous contrôle : si la moyenne de l'échantillon est à l'intérieur des limites de surveillance, on considère que le processus est sous contrôle, si elle est au delà des limites de contrôle, on décide que le processus est hors contrôle, et enfin, si la moyenne se situe entre la limite de contrôle et celle de surveillance, on décide de prendre un nouvel échantillon. Il s'agit en fait d'une carte de contrôle double. DAUDIN (1990) a étudié les propriétés statistiques de ce type de carte, qui possède une efficacité statistique qui se compare favorablement à différentes tentatives faites pour améliorer la carte de Shewhart, comme les tests de séries et les cartes avec intervalle variable entre deux prélèvements.

Les procédures d'échantillonnage double possèdent 5 paramètres (au lieu de 2 pour l'échantillonnage simple). Par conséquent, il existe en général plusieurs (une infinité de) plans de ce type passant par 2 points donnés de la courbe d'efficacité, comme par exemple (NQA,α) et (NQT,β), où NQA est la proportion d'objets non conformes dans le lot, appelé Niveau de Qualité Acceptable, qui correspond à un lot de qualité standard, qui doit, le plus souvent, être accepté par le contrôle; NQT est la proportion d'objets non conformes, appelé Niveau de Qualité Toléré, qui correspond à un lot de mauvaise qualité, qui doit être le plus souvent rejeté par le contrôle; α est la probabilité de rejeter un lot de qualité NQA, et enfin β est la probabilité d'accepter un lot de qualité NQT. Si on veut mettre en place un contrôle d'efficacité donnée, il y a donc un grand choix de plans satisfaisants. On peut exiger que le plan double satisfasse des contraintes supplémentaires, comme par exemple que les deux échantillons successifs soient de taille égale, ou que la valeur de rejet soit la même, mais il est plus logique de chercher à optimiser le coût du contrôle : on cherche alors le plan double minimisant le nombre moyen d'objets échantillonnés (si on admet que le coût du contrôle est proportionnel aux nombre d'objets échantillonnés), et possédant une efficacité donnée. Cependant, le nombre moyen d'objets échantillonnés dépend non seulement de la procédure de contrôle, mais aussi de la qualité du lot que l'on considère, ou de la moyenne du processus que l'on surveille. On cherchera donc le contrôle double minimisant le coût d'échantillonnage pour une qualité donnée de lot (telle que la qualité moyenne ou la plus fréquente); dans le cas de la maîtrise d'un processus, on cherchera la carte double minimisant le coût d'échantillonnage quand le processus est sous contrôle.

Dans cet article nous traitons le problème de la détermination de plans doubles optimaux au sens défini ci-dessus. Ce choix fait appel à des algorithmes d'optimisation sous contrainte, que nous décrivons. Nous présentons également quelques exemples montrant le gain que l'on peut attendre de ce type de procédure.

2. Plan double optimum (réception par attributs)

Le contrôle de réception par attributs s'applique à des lots d'objets que l'on peut classer comme bons ou mauvais. Il est décrit de façon détaillée dans les normes AFNOR (1988) ou dans SCHILLING (1982). Les notations sont définies de la façon suivante :

On extrait du lot un échantillon de taille n_1, puis ensuite, si cela est nécessaire, un deuxième échantillon de taille n_2. Soit d_1 le nombre d'objets défectueux dans le premier échantillon et d_2 dans le deuxième. La règle de décision concernant le lot est la suivante :

Si $d_1 \leq a_1$ on accepte le lot

Si $a_1 < d_1 < r_1$ on tire le 2° échantillon et :

Si $d_1 + d_2 \leq a_2$ on accepte le lot

Si $d_1 + d_2 \geq r_2$ on rejette le lot (avec $r_2 = a_2 + 1$)

Si $d_1 \geq r_1$ on rejette le lot.

Les caractéristiques d'un plan double sont donc n_1, n_2, a_1, a_2, r_1 et r_2.

Dans un contrôle de réception, il convient d'abord de déterminer les niveaux de qualité acceptable (NQA) et toléré (NQT) ainsi que les risques du producteur (α) et du consommateur (β) associés à chacun d'eux. Ces paramètres sont les objectifs de qualité que le contrôle doit satisfaire. Nous ne traitons pas ici de la détermination de ces paramètres; le problème est de déterminer un plan de contrôle satisfaisant ces contraintes et de coût minimum. Si nous nous limitons aux plans doubles, il en existe un grand nombre qui satisfont les objectifs fixés. La recherche de celui d'entre eux qui utilise en moyenne le plus petit nombre d'objets échantillonnés est un problème d'optimisation en nombre entiers

Le problème peut être posé dans les termes suivants : il s'agit de trouver le plan double respectant un risque α (respectivement β) donné pour un niveau de qualité admissible, NQA fixé (respectivement un niveau de qualité toléré NQT) minimisant le nombre moyen d'objets échantillonnés, NME, si la production a une qualité moyenne mesurée par la proportion de défectueux p_0.

En termes formels, il s'agit de trouver les valeurs de n_1, n_2, a_1, r_1, r_2 tels que

$$NME = n_1 + n_2 \sum_{k=a_1+1}^{r_1-1} C_{n_1}^k p_0^k (1-p_0)^{n_1-k} \quad \text{soit minimum} \tag{0}$$

sous les contraintes suivantes :

$$\sum_{k=r_1}^{n_1} C_{n_1}^k NQA^k (1-NQA)^{n_1-k} + \sum_{k=a_1+1}^{r_1-1} \left\{ C_{n_1}^k NQA^k (1-NQA)^{n_1-k} \left[\sum_{s=r_2-k}^{n_2} C_{n_2}^s NQA^s (1-NQA)^{n_2-s} \right] \right\} = \alpha \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{a_1} C_{n_1}^k NQT^k (1-NQT)^{n_1-k} + \sum_{k=a_1+1}^{r_1-1} \left\{ C_{n_1}^k NQT^k (1-NQT)^{n_1-k} \left(\sum_{s=0}^{r_2-k-1} C_{n_2}^s NQT^s (1-NQT)^{n_2-s} \right) \right\} = \beta \tag{2}$$

2.1. Description de l'algorithme

Pour des raisons de rapidité de calcul, et pour pouvoir travailler sur des valeurs réelles de n_1, a_1, r_1, n_2, et r_2, nous utilisons l'approximation de Camp-Paulson de la fonction de répartition de la loi binomiale. (CAMP(1953)-PAULSON (1942)).

L'algorithme que nous utilisons procède en 2 étapes : un premier algorithme, $A1$, permet avec n_1, a_1, et r_1 fixés, de trouver les valeurs de n_2 et r_2, si elles existent, qui respectent les 2 équations (1) et (2). Un deuxième algorithme, $A2$, utilisant $A1$ de façon répétée, recherche les valeurs optimales de n_1, a_1, et r_1, non entières. La recherche des solutions entières est faite plus tard dans la mise au point finale.

Algorithme A1

n_2 et r_2 sont racines de (1) et (2), que l'on peut écrire $f_1(n_2, r_2) = 0$ et $f_2(n_2, r_2) = 0$. La méthode classique de linéarisation donne au voisinage de la solution :

$$f_i(n_2 + x, r_2 + y) = x\partial f_i/\partial n_2 + y\partial f_i/\partial r_2 + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2)$$

x et y sont donc obtenus à chaque itération par inversion de la matrice des dérivées de f_1 et f_2. Les dérivées sont calculées numériquement.

Algorithme A2

A chaque triplet (n_1, a_1, r_1), on peut associer, s'il existe, le couple (n_2, r_2) grâce à A1. Le critère à minimiser, (0), est donc une fonction numérique de 3 variables, $g(n_1, a_1, r_1)$. Il faut annuler les dérivées de g par rapport à chaque variable n_1, a_1, et r_1. L'algorithme de Newton-Raphson (voir par exemple MINOUX (1983)), utilisant l'inverse de la matrice des dérivées secondes de g, permet d'obtenir la solution. Les dérivées sont calculées numériquement.

Réglages de A1 et A2

Pour éviter certains problèmes de fuite à l'infini ou de non convergence, des modifications de A1 et A2 sont indispensables. En particulier, il faut délimiter correctement la zone admissible pour n_1, a_1, et r_1, c'est à dire celle pour laquelle il existe des valeurs de n_2 et r_2 satisfaisant (1) et (2).

Mise au point finale

Une fois trouvées les valeurs de n_1, a_1, r_1, n_2, et r_2, il faut trouver les meilleures solutions entières : on choisit les valeurs entières situées au voisinage de la solution réelle. En effet, la fonction à optimiser est une fonction assez régulière et varie très peu pour de petits changements des paramètres. Les calculs finaux sont faits avec la loi binomiale exacte.

2.2 Résultats et exemples

Cette optimisation permet d'obtenir une diminution non négligeable du coût du contrôle par rapport aux plans donnés dans les tables. En effet ces dernières obligent à prendre $n_1 = n_2$ ou au moins $n_1 = kn_2$ (avec k entier), ce qui donne généralement une solution loin d'être optimale. De plus il n'existe pas toujours dans les tables de plans répondant aux valeurs NQA, α, NQT, β fixées a priori.

Pour illustrer les diminutions de coût de contrôle produit par l'optimisation, on considère le problème du contrôle de la pureté spécifique de semences de céréales tel qu'il est pratiqué par les producteurs de semences. Considérons, pour fixer les idées un NQA de 1%. Dans les tables Military standard 105-D (normes AFNOR) la lettre code Q correspondant à des lots de taille très importante (le nombre de graines dans un lot est de plusieurs millions) et à un contrôle normal donne le plan double suivant :

$$n_1 = 800, \ a_1 = 11, \ r_1 = 16, \ n_2 = 800, \ r_2 = 27$$

qui possède les risques suivants

$$\alpha = 1.17\% \text{ et } \beta = 2.61\% \text{ pour un } NQT \text{ de } 2,5\%$$

La proportion moyenne d'impuretés dans la production est de 0,5%. Le nombre moyen de graines échantillonnées par lot est de 801. Bien que la qualité soit bonne on ne peut passer à un contrôle réduit dans la mesure où le nombre de lots par producteur pour une espèce donnée est faible et où le service officiel de contrôle du Groupement National de l'Industrie des Semences qui certifie la qualité des lots auprès des agriculteurs, exige que la qualité soit respectée pour chaque lot individuel et non pas en moyenne. Dans ces conditions, on ne peut pas appliquer les règles de changement de plan du standard mais on doit utiliser un plan de contrôle immuable.

Le plan optimum respectant les mêmes risques ($\alpha = 1.17\%$ pour un NQA de 1% et $\beta = 2.61\%$ pour un NQT de 2,5%) est :

$$n_1 = 413, \ a_1 = 4, \ r_1 = 12, \ n_2 = 1265, \ r_2 = 27$$

qui exige en moyenne d'échantillonner 488 graines, soit une économie de 313 graines, soit une diminution du coût de contrôle de 39%.

Ce plan peut n'être pas pratique en raison des chiffres non arrondis qu'il comporte ; on peut proposer un plan plus facile à réaliser et de caractéristiques très proches du plan optimum :

$$n_1 = 400, \ a_1 = 4, \ r_1 = 12, \ n_2 = 1350, \ r_2 = 28$$

qui possède les caractéristiques suivantes

$$\alpha = 1.06\% \text{ pour un } NQA \text{ de } 1\% \text{ et } \beta = 3.04\% \text{ pour un } NQT \text{ de } 2,5\%$$

qui exige en moyenne d'échantillonner 470 graines. Cet exemple montre que l'optimisation des plans de contrôle peut conduire à des diminutions de coût du contrôle très importantes. En pratique l'utilisation de plans doubles avec n1 = n2 n'est pas à conseiller d'un point de vue économique : on perd de 10 à 40% par rapport à la solution optimale.

Cet exemple montre également que la panoplie des plans contenus dans les standards est très limitée et manque beaucoup de souplesse, alors que la micro-informatique permet de se libérer de ces contraintes. Par exemple SCHILLING (1982, pp. 132-134) propose d'utiliser une règle, basée sur une approximation Poissonienne, permettant d'obtenir un plan double respectant des objectifs fixés de qualité à l'aide d'une table spéciale. Par exemple pour $NQA = 1\%$, $NQT = 5\%$,

$\alpha = 5\%$ et $\beta = 10\%$, il obtient $n_1 = n_2 = 88$, $a_1 = 1$, $r_1 = 4$, et $r_2 = 5$ (plan 1). Ce plan ne répond pas exactement aux objectifs définis et est plus coûteux que le plan optimal (obtenu en 30 secondes sur un micro-ordinateur) qui est le suivant : $n_1 = 59$, $n_2 = 83$, $a_1 = 0$, $r_1 = 4$, et $r_2 = 4$ (plan 2). Si on veut comparer 2 plans de même efficacité, on peut chercher le plan double optimum ayant la même efficacité que le plan donné par SCHILLING; on obtient alors $n_1 = 55$, $n_2 = 126$, $a_1 = 0$, $r_1 = 4$, et $r_2 = 5$ (plan 3). Le tableau suivant permet de comparer les trois plans :

plan de contrôle	risque α	risque β	nombre moyen d'objets échantillonnés si $P = 0,5\%$
plan 1	3,2%	9,3%	94.3
plan 2	5%	10%	80.2
plan 3	3,2%	9,3%	85.3

Il se trouve ici que la règle de SCHILLING donne un plan plus efficace que les objectifs demandés; l'inverse peut aussi se produire, ce qui est plus grave. Il est aujourd'hui possible, rapide et sûr d'obtenir des plans optimaux, avec des résultats sans approximation, et cela sans posséder une montagne de tables dans lesquelles il n'est pas toujours facile de se reconnaître.

3. Plan double optimum (réception par variables)

3.1. Le contrôle de réception par variable

Ce type de contrôle s'applique à des produits sur lesquels on mesure une caractéristique (contrôle par variable). Une ou des tolérances (inférieure et/ou supérieure) s'appliquent à cette caractéristique : le produit est jugé bon ou mauvais selon que la caractéristique mesurée est satisfaisante vis à vis de la (des) tolérance(s). On trouvera une description détaillée de cette forme de contrôle dans SCHILLING (1982), ou dans le volume 2 des normes statistiques AFNOR (1988).

On considère une mesure X, dont on admet qu'elle est distribuée selon une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. On considère, par exemple, une limite de tolérance inférieure, T_i. La proportion d'objets non conformes dans un lot de taille infinie est égale à Prob$(X < T_i)$. On a :

Prob $(X < T_i) = F((T_i - \mu)/\sigma)$, où F est la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite.

Dans le cas d'une limite de tolérance supérieure, on a Prob$(X > T_s) = F((\mu - T_s)/\sigma)$

Le plan de contrôle double est défini de la façon suivante quand σ est connu :

On extrait du lot un échantillon de taille n_1 puis ensuite, si cela est nécessaire, un deuxième échantillon de taille n_2. Soit m_1 la moyenne de la caractéristique mesurée, X, dans le premier échantillon et m_2 dans le deuxième, et m (où

$m = (n_1 m_1 + n_2 m_2)/(n_1 + n_2))$ la moyenne de X dans l'échantillon total (de taille $n_1 + n_2$).

Si on a une tolérance inférieure, la règle de décision concernant le lot est la suivante :

On calcule $Q_i^{(1)} = (m_1 - T_i)/\sigma$

Si $Q_i^{(1)} \geq k_a$ on accepte le lot

Si $Q_i^{(1)} \leq k_r$ on rejette le lot

Si $k_r < Q_i^{(1)} < k_a$ on tire le 2° échantillon

On calcule $Q_i^{(2)} = (m - T_i)/\sigma$

Si $Q_i^{(2)} \geq k_2$ on accepte le lot, sinon on le rejette.

Si on a une tolérance supérieure, la règle de décision concernant le lot est la suivante :

On calcule $Q_s^{(1)} = (T_s - m_1)/\sigma$

Si $Q_s^{(1)} \geq k_a$ on accepte le lot

Si $Q_s^{(1)} \leq k_r$ on rejette le lot

Si $k_r < Q_s^{(1)} < k_a$ on tire le 2° échantillon

On calcule $Q_s^{(2)} = (T_i - m)/\sigma$

Si $Q_s^{(2)} \geq k_2$ on accepte le lot, sinon on le rejette.

Les caractéristiques d'un plan double sont donc n_1, n_2, k_a, k_r et k_2.

3.2 Optimisation du plan double : exemples

La première qualité que l'on exige d'un plan de contrôle est qu'il respecte l'efficacité demandée. Cependant plusieurs plans doubles peuvent tous correspondre aux objectifs qualité $(NQA, NQT\alpha, \beta)$. Pour choisir parmi ces plans, un deuxième critère est fondamental : c'est le coût du contrôle exprimé en nombre moyen d'objets échantillonnés. Pour un grand nombre de lots de même qualité P, on peut calculer le nombre moyen d'objets échantillonnés. Parmi un ensemble de plans ayant la même efficacité on choisira celui qui a le nombre moyen d'objets échantillonnés le plus faible pour la valeur la plus fréquente de P, p_0. Le problème d'optimisation peut donc se formaliser de la façon suivante :

Les contraintes d'efficacité sont les suivantes : si le lot a une proportion de NQA objets non conformes, il doit être accepté avec une probabilité $1 - \alpha$, et s'il contient une proportion de NQT objets non conformes, il doit être accepté avec une probabilité β. La quantité à minimiser est le nombre moyen d'objets échantillonnés. Formellement, dans le cas d'une tolérance inférieure, le problème d'optimisation est le suivant : il s'agit de trouver n_1, n_2, k_a, k_r et k_2, tels que :

$$n_1 + n_2 P_i(p_0) \quad \text{soit minimum}$$

sous les contraintes $P_a(NQA) = 1 - \alpha$ et $P_a(NQT) = b\beta$,

où p_0, NQA, α, NQT et β sont fixés, et où

$P_i(p) = F\{n_1^{1/2}((T_i - \mu)/\sigma + k_a)\} - F\{n_1^{1/2}((T_i - \mu)/\sigma + k_r)\}$ est la probabilité de tirer le deuxième échantillon (P_i : Probabilité d'indécision au premier échantillon).

$P_a(p) = F\{n_1^{1/2}(-(T_i - \mu)/\sigma - k_a)\} + P_{a_2}(p)$ est la probabilité d'acceptation (P_a)

$$P_{a_2}(p) = \int_{\sqrt{n_1}\{\frac{T_i - \mu}{\sigma} + k_r\}}^{\sqrt{n_1}\{\frac{T_i - \mu}{\sigma} + k_a\}} F\left\{\sqrt{\frac{n_1}{n_2}}z + \frac{n_1 + n_2}{\sqrt{n_2}}\left(\frac{\mu - T_i}{\sigma} - k_2\right)\right\} f(z)dz$$

où μ est une fonction de p : $\mu = T_i + \sigma F^{-1}(1 - p)$, et f est la densité de la loi Normale $N(0, 1)$.

L'algorithme de résolution de ce problème d'optimisation sous contraintes est un cas particulier de celui de la carte de contrôle double qui est décrit au paragraphe suivant.

Les exemples suivants montrent le gain que l'on peut espérer dans ce cas :

a) Exemple 1 : comparaison avec un plan simple.

On considère les objectifs de qualité suivants (SCHILLING, p. 238) :

NQA = 1,8% avec α = 5% et NQT = 18% avec β =10%. SCHILLING donne le plan simple noté plan 1 dans le tableau 1. Le plan double qui possède l'efficacité voulue, et qui a le plus faible nombre moyen d'objets échantillonnés quand la proportion d'objets non conformes dans le lot est de 1%, est le plan 2. On a donc un gain de 2.4 objets par rapport au plan simple, soit une réduction de 40%. C'est un plan qui respecte mieux les objectifs d'efficacité, et qui est largement moins coûteux.

b) Exemple 2. On considère les objectifs de qualité suivants (SCHILLING, p. 263) :

NQA = 1% avec α = 5% et NQT = 5% avec β =10%.

SOMMERS (1981) a construit une table dans laquelle on obtient des plans doubles pour différentes valeurs de NQA et NQT et avec α et β fixés à respectivement 5 et 10%. Ces plans doubles ont deux échantillons de taille égale, et la valeur de rejet est la même pour le premier et le deuxième échantillon. Ces règles font que le plan est relativement simple, mais qu'il est loin d'être optimal sur le plan économique. On obtient le plan 3 (tableau 1). Le plan double optimal qui correspond aux objectifs de qualité est le plan 4 du tableau 1. Il donne un gain de 3.9 objets par rapport au plan double de SOMMERS, soit une réduction de 29%.

Le plan double donné par l'algorithme d'optimisation est donc à la fois plus proche des objectifs d'efficacité visés et largement plus économique que le plan donné par les tables de SOMMERS. De plus, il est plus facile à obtenir grâce à l'outil informatique, plus convivial que l'utilisation de tables.

TABLEAU 1
Exemples de plans de contrôle par variable

	Plan 1	Plan 2	Plan 3	Plan 4
Origine	SCHILLING	plan double optimal	SOMMERS	Plan double optimal
Type	simple	double	double	double
Description du plan	$n = 6$, $k = 1,4328$	$n_1 = 3$, $k_a = 1,73$ $k_r = -0,1526$ $n_2 = 5$, $k_2 = 1,515$	$n_1 = 13$, $k_a = 2,09$ $k_r = 1,87$ $n_2 = 13$, $k_a = 1,87$	$n_1 = 6$, $k_a = 2,237$ $k_r = 0,738$ $n_2 = 17$, $k_a = 2,004$
Valeurs nominales (en pourcentage)	$NQA = 1,8$ $NQT = 18$ $\alpha = 5$ $\beta = 10$	$NQA = 1,8$ $NQT = 18$ $\alpha = 5$ $\beta = 10$	$NQA = 1$ $NQT = 5$ $\alpha = 5$ $\beta = 10$	$NQA = 1$ $NQT = 5$ $\alpha = 5$ $\beta = 10$
Valeurs réelles (en pourcentage)	$NQA = 1,8$ $NQT = 18$ $\alpha = 5,19$ $\beta = 10,25$	$NQA = 1,8$ $NQT = 18$ $\alpha = 5$ $\beta = 10,05$	$NQA = 1$ $NQT = 5$ $\alpha = 5,29$ $\beta = 10,37$	$NQA = 1$ $NQT = 5$ $\alpha = 5$ $\beta = 10,14$
Taille moyenne de l'échantillon	6	3.6	13.4	9.5

4. Carte de contrôle double optimale

Les méthodes d'échantillonnage double, plus souvent utilisées dans le contrôle de réception, peuvent également s'avérer utiles dans le contrôle d'un processus de production. DAUDIN (1991) a étudié les propriétés (probabilité d'un signal, nombre moyen de contrôles avant de détecter un déréglage, nombre moyen d'objets échantillonnés...) de la carte de contrôle double sur la moyenne. Cette carte améliore nettement l'efficacité de la carte de contrôle classique de Shewhart avec un nombre moyen d'objets échantillonnés égal, quand le processus est sous contrôle. On peut, au contraire utiliser ce type de carte pour réduire le coût du contrôle, tout en conservant une efficacité égale. La carte de contrôle possède une souplesse d'utilisation appréciable, car il y a 5 paramètres à fixer. Il est donc possible d'adapter le comportement du contrôle à chaque problème. Il est également possible de chercher la carte double respectant certains critères d'efficacité, qui soit la plus économique en termes de nombre moyen d'objets échantillonnés. C'est ce que nous faisons, après avoir rappelé la définition de la carte de contrôle double.

4.1. Définition de la carte de contrôle double

Le premier échantillon est de taille n_1, x_1 est sa moyenne.

Si $x_1 \in I_1$ on décide que le processus est sous contrôle.

Si $x_1 \in I_2$ on décide de prendre un nouvel échantillon de taille n_2

Si $x_1 \in I_3$ on décide que le processus est hors contrôle.

avec

$$I_1 = [\mu_0 - L_1 \sigma n_1^{-1/2}, \mu_0 + L_1 \sigma n_1^{-1/2}]$$
$$I_2 = [\mu_0 - L \sigma n_1^{-1/2}, \mu_0 - L_1 \sigma n_1^{-1/2}] \cup [\mu_0 + L_1 \sigma n_1^{-1/2}, \mu_0 + L \sigma n_1^{-1/2}]$$
$$I_3 = [-\infty, \mu_0 - L \sigma n_1^{-1/2}] \cup [\mu_0 + L \sigma n_1^{-1/2}, +\infty]$$

où μ_0 et σ sont la moyenne et l'écart-type du processus sous contrôle.

Quand le deuxième échantillon est pris, la règle de décision est la suivante : $y = (n_1 x_1 + n_2 x_2)/(n_1 + n_2)$.

Si $y \in I_4$ on décide que le processus est sous contrôle

If $y \notin I_4$ on décide que le processus est hors de contrôle

où $I_4 = [\mu_0 - L_2 \sigma (n_1 + n_2)^{-1/2}, \mu_0 + L_2 \sigma (n_1 + n_2)^{-1/2}]$

On suppose que les moyennes ont une distribution normale, d'espérance μ et d'écart-type $\sigma/\sqrt{n}$, pour un échantillon de taille n. P_a est la probabilité de décider que le processus est sous contrôle. $P_a = P_{a_1} + P_{a_2}$, où P_{a_1} est la probabilité de décider que le processus est sous contrôle au premier échantillon, et P_{a_2} lors du second.

$$P_{a_1} = P(x_1 \in I_1) = F(L_1 + \delta n_1^{1/2}) - F(-L_1 + \delta n_1^{1/2})$$

où $\delta = (\mu - \mu_0)/\sigma$.

$$P_{a_2} = \int_{x_1 \in I_2} P(y \in I_4 / x_1)\ g(x_1) dx_1$$

où $g(.)$ est la densité normale de x_1. Cette quantité est encore égale à :

$$\int_{-L-\delta\sqrt{n_1}}^{-L_1-\delta\sqrt{n_1}} \left[F\left(L_2 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_2}} - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} z - \frac{n_1+n_2}{\sqrt{n_2}} \delta \right) \right.$$
$$\left. - F\left(-L_2 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_2}} - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} z - \frac{n_1+n_2}{\sqrt{n_2}} \delta \right) \right] f(z) dz$$
$$+ \int_{L_1-\delta\sqrt{n_1}}^{L-\delta\sqrt{n_1}} \left[F\left(L_2 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_2}} - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} z - \frac{n_1+n_2}{\sqrt{n_2}} \delta \right) \right.$$
$$\left. - F\left(-L_2 \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_2}} - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} z - \frac{n_1+n_2}{\sqrt{n_2}} \delta \right) \right] f(z) dz$$

Ces deux intégrales doivent être calculées numériquement. $f(.)$ est dans cette dernière formule la densité de la loi Normale $N(0,1)$. En pratique, nous avons utilisé un algorithme d'intégration numérique de la famille de Newton-Cotes, appelé règle de Boole (DAVIS, RABINOWITZ (1975), p. 63). La fonction de répartition de la loi Normale est calculée par l'approximation de BEASLEY et SPRINGER (1985).

On cherche à construire la carte double ayant une efficacité donnée en deux points μ_0 et μ_1, minimisant le nombre moyen d'objets échantillonnés quand le processus est sous contrôle. Formellement, le problème d'optimisation est le suivant : il s'agit de trouver n_1, n_2, L, L_1, L_2, tels que

$n_1 + n_2 P_i(\mu_0)$ (3) soit minimum

sous les contraintes $P_a(\mu_0) = 1 - \alpha$ (4) et $P_a(\mu_1) = \beta$ (5) ,

où μ_0, α, μ_1 et β sont fixés, et où

$P_i(\mu_0) = 2[F(L) - F(L_1)]$ et $P_a(\mu)$ est défini ci-dessus.

4.2. Description de l'algorithme

L'algorithme que nous utilisons procède en 2 étapes : un premier algorithme, $B1$, permet avec n_1, et n_2 fixés, de trouver les valeurs de L_1 et L_2, si elles existent, qui respectent les 2 équations (5) et (4). Un deuxième algorithme, $B2$, utilisant $B1$ de façon répétée, recherche les valeurs optimales de n_1, et n_2. La valeur de L n'a aucune influence sur l'optimisation, du moment qu'elle est suffisament élevée. En pratique, il suffit qu'elle dépasse 4 ou 5. A la différence de $A2$, dans cet algorithme, n_1 et n_2 sont des nombres entiers (L_1 et L_2 sont des réels).

Algorithme B1.

L_1 et L_2 sont racines de (4) et (5), que l'on peut écrire $f_1(L_1, L_2) = 0$ et $f_2(L_1, L_2) = 0$. La méthode classique de linéarisation donne au voisinage de la solution :

$$f_i(L_1 + x, L_2 + y) = x\partial f_i/\partial L_1 + y\partial f_i/\partial L_2 + \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2)$$

x et y sont donc obtenus à chaque itération par inversion de la matrice des dérivées de f_1 et f_2. A la différence de l'algorithme $A1$, les dérivées sont calculables; il n'est donc pas indispensable de les évaluer numériquement, ce qui réduit le temps de calcul. Par contre leur calcul nécessite l'évaluation numérique d'une intégrale, qui se fait en même temps que celle de la fonction.

Algorithme B2.

A chaque couple (n_1, n_2), on peut associer, s'il existe, le couple (L_1, L_2) grâce à $B1$. Le critère à minimiser, (3), est donc une fonction numérique de 2 variables, $g(n_1, n_2)$. Comme n_1 et n_2 sont des entiers, généralement faibles, une recherche exhaustive dans la zone admissible est possible. Comme la fonction à minimiser est concave, l'incrémentation de n_1 ou de n_2 (par paliers de 1) s'arrête dès que la fonction croît, ce qui optimise l'exploration de la zone admissible.

Réglages de B1 et B2.

Pour éviter certains problèmes de fuite à l'infini ou de non convergence, des modifications de $B1$ sont nécessaires. En particulier, il faut délimiter correctement la zone admissible pour n_1 et n_2, c'est à dire celle pour laquelle il existe des valeurs de L_1 et L_2 satisfaisant (4) et (5).

Pour $B2$, le choix des bornes de variation pour n_1 et n_2 est le suivant : n_1 augmente de 1 jusqu'à ce que la fonction à minimiser ne soit plus décroissante. n_2 augmente à partir de la valeur $n - n_1 + 1$, où n est la taille de l'échantillon de la carte de contrôle simple de Shewhart.

4.3. Résultats et exemples

a) On considère l'exemple donné dans la Norme AFNOR NF X06 031, page 31. On y donne le cas d'une carte de contrôle sur la moyenne, qui, pour un déréglage de la moyenne d'un écart-type, décèle ce déréglage avec une probabilité de 0.65 . Il s'agit de la carte simple de Shewhart avec $n = 12$ et $L = 3,09$. La carte double optimum, ayant la même efficacité est la suivante :

$$n_1 = 4, \; n_2 = 13, \; L = 5, \; L_1 = 1.524, \; L_2 = 2.887,$$

Cette carte double, si le processus est sous contrôle, a recours au 2° échantillon dans 12,7% des cas, ce qui donne un nombre moyen d'objets échantillonnés égal à 5.66. Pour une même efficacité, on a donc une économie d'échantillonnage de 53%. De plus, le contrôle est très souvent allégé, puisque l'on n'a recours le plus souvent qu'à un échantillon de 4 objets au lieu de 12.

b) Dans la Norme AFNOR NF X06 031, page 31, on trouve également une carte de contrôle sur la moyenne, qui pour un déréglage de la moyenne d'un écart-type et demi, décèle ce déréglage avec une probabilité de 0.72. Il s'agit de la carte simple de Shewhart avec $n = 6$ et $L = 3.09$. La carte double optimum, ayant la même efficacité est la suivante :

$$n_1 = 2, \; n_2 = 6, \; L = 5, \; L_1 = 1.415, \; L_2 = 2.929,$$

Cette carte double, si le processus est sous contrôle, a recours au 2° échantillon dans 15,7% des cas, ce qui donne un nombre moyen d'objets échantillonnés égal à 2.94. Pour une même efficacité, on a donc une économie d'échantillonnage de 51%. De plus, le contrôle est très souvent allégé, puisque l'on n'a recours le plus souvent qu'à un échantillon de 2 objets au lieu de 6.

Pour un coût de contrôle équivalent à celui de la carte simple avec $n = 6$, on peut utiliser la carte double de l'exemple a), qui a une efficacité comparable à la carte simple avec $n = 12$. En général, la carte double permet de réduire d'environ 50% le coût du contrôle. La carte double optimum a une efficacité comparable aux cartes avec lissage exponentiel (EWMA) ou à certains type de CUSUM. (DAUDIN (1991)). Elle se compare très favorablement avec les cartes à intervalles variables (REYNOLDS, M.R., AMIN, R.W., ARNOLD, J.C., NACHLAS, J.A. (1988)), et celles avec des règles de séries (CHAMP, C.W, WOODALL, W.H. (1987)).

5. Apport de la micro-informatique dans le choix des contrôles statistiques

Durant les quarante dernières années, de nombreuses tables sont apparues et ont rendu de grands services. Elles correspondaient à une époque où les moyens de calculs dont chacun disposait ne permettaient pas de calculer l'efficacité de chaque procédure de contrôle statistique, et encore moins d'obtenir une procédure qui corresponde à des objectifs de qualité précis. C'est aujourd'hui possible grâce à la puissance de calcul disponible dans chaque entreprise. Il suffit de disposer des algorithmes de calcul, et d'une interface entre les modules de calcul et l'utilisateur, qui permette à ce dernier d'exprimer ses besoins et d'obtenir des résultats qu'il puisse comprendre et utiliser.

L'utilisation de la micro-informatique dans le choix de plans de contrôle satisfaisant à des objectifs précis rend beaucoup de services. Les avantages par rapports aux standards de plans (Military Standard, AFNOR,...) qui ne comportent qu'un nombre limité de plans, sont la souplesse d'emploi, l'obtention de plans plus économiques ainsi qu'une meilleure adéquation aux objectifs de qualité recherchés et une plus grande convivialité.

Un logiciel de plans de contrôle de la qualité, Qalstat, est disponible à l'I.N.A.P-G. Il permet à l'ingénieur ou au technicien de la qualité de connaître exactement les caractéristiques du plan de contrôle à la réception (simple, double, multiple ou séquentiel, avec troncature ou non) qu'il utilise, mais aussi d'obtenir le plan le plus économique satisfaisant à ses objectifs de qualité. Il lui permet également de choisir le dispositif de surveillance d'un processus de production (taille et fréquence des échantillons) grace à des cartes de contrôle sur la moyenne, l'écart-type ou le nombre de défauts, bien adaptées à ses objectifs de qualité et à ses possibilités de contrôle.

Références

AFNOR (1988) " Statistiques" Tome 2 . AFNOR. La Défense. Paris.

BEASLEY, J.D., SPRINGER, S.G. (1985) "Algorithm AS III; the Percentage Points of the Normal Distribution". Applied Statistics 26, 1, 118-121.

CAMP, B.H. (1951) "Approximation to the Point Binomial". Annals of Mathematical Statistics, 22, 130-131.

CHAMP, C.W, WOODALL, W.H. (1987) "Exact Results for Shewhart Control Charts with Supplementary Runs Rules". Technometrics, 29, 4, pp 393-399.

DAUDIN, J.J. (1991) "Double control chart" Journal of Quality and Technology. A paraître.

DAVIS, P.J., RABINOWITZ, P. (1975) "Methods of numerical integration". Academic Press.

MINOUX, M. (1983) "Programmation Mathématique; Théorie et Algorithmes.", Tome1 Dunod, Paris.

PAULSON, E. (1942) "An Approximate Normalisation of the Analysis of Variance Distribution". Annals of Mathematical Statistics, 13, 233-35.

REYNOLDS, M.R., AMIN, R.W., ARNOLD, J.C.,NACHLAS, J.A. (1988) "X Charts with Variable Sampling Intervals". Technometrics, 30, 2, pp 181-192.

SCHILLING, E.G.(1982) "Acceptance sampling in quality control". Dekker , Ed, New-York.

SOMMERS, D.J. (1981) "Two-point Double Variable Sampling Plans". Journal of Quality Technology, 13(1), 25-30.