

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. C. SISSON

S. TOURBIER GERMAIN

Mise au point d'une cartouche de chasse avec l'aide de Magic Plan

Revue de statistique appliquée, tome 37, n° 2 (1989), p. 87-101

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1989__37_2_87_0

© Société française de statistique, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MISE AU POINT D'UNE CARTOUCHE DE CHASSE AVEC L'AIDE DE MAGIC PLAN

J.C. SISSON

Adjoint au directeur de l'Ingénierie Qualité d'ALSTHOM

S. TOURBIER GERMAIN

Direction de la Recherche Régie RENAULT

RESUME

Cet article présente un exemple d'utilisation du logiciel Magic Plan, à travers la mise au point d'une cartouche de chasse.

Nous appliquons ainsi deux points importants de la méthodologie Taguchi (l'optimisation de la réponse, et l'étude d'un rapport Signal/Bruit) aux résultats d'un plan d'expériences original, construit par Magic Plan, et non répertorié dans les tables Taguchi.

Mots-clés : *Construction de plans d'expérience orthogonaux, Plans produits, Rapport Signal/Bruit, Optimisation, Variabilité*

Plan

Introduction

1. Description du problème

- 1.1 Choix des réponses à analyser
- 1.2 Description des paramètres de l'étude
- 1.3 Listage des variables susceptibles d'agir sur la réponse
- 1.4 Choix des niveaux ou modalités pour les facteurs sélectionnés
- 1.5 Détermination des objectifs de l'expérimentation

2. Formulation de la requête

3. Analyse de la requête, calcul des nombres d'essais par Magic Plan

- 3.1 Principe de calcul des nombres d'essais
- 3.2 Liste des nombres d'essais

4. Construction du Plan par Magic Plan

5. Réalisation des essais et analyse des résultats

- 5.1 Analyse de la vitesse des plombs sur 30 mètres
- 5.2 Etude du rapport Signal/Bruit

6. L'optimisation

Introduction

MAGIC PLAN est un logiciel construisant et analysant des plans d'expériences orthogonaux.

Son originalité repose sur le fait qu'il ne les propose pas après recherche dans un catalogue de plans (tel que les tables Taguchi), mais il les calcule à partir d'un algorithme basé sur l'orthogonalité. Ainsi peut-on lui demander tous les types de plans orthogonaux, et en particulier, ceux présentés dans les tables Taguchi.

L'analyse de variance effectuée par Magic Plan est l'analyse classique des plans orthogonaux. Ce logiciel permet de calculer le modèle brut, le modèle net, et le tableau d'analyse de variance (indiquant les actions significatives et non significatives). On a également la possibilité d'étudier les rapports Signal/Bruit présentés par Taguchi.

Nous allons, à travers un cas pratique, montrer comment Magic Plan réalise une étude, et quelle est la marche à suivre par l'expérimentateur pour déclarer ses données.

1. Description du problème

Le cas traité par Magic Plan que nous avons choisi de présenter ici est celui d'un fabricant de cartouches de chasse cherchant à optimiser la vitesse des plombs. Avant toute manipulation du logiciel, il doit procéder à une analyse approfondie de son système.

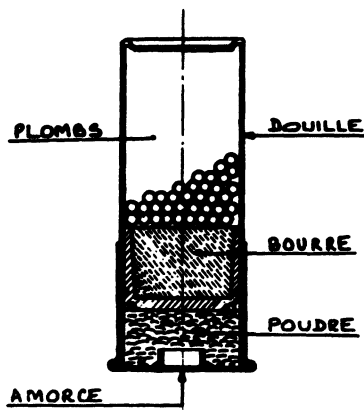
1.1. Choix des réponses à analyser

Un plan peut être construit en vue d'étudier plusieurs réponses, si celles-ci se rapportent aux mêmes variables. Par la suite, Magic Plan fera une analyse de variance réponse par réponse.

La réponse à laquelle s'intéresse notre fabricant de cartouches est la vitesse des plombs de chasse à une distance de 30 mètres.

1.2. Description des paramètres de l'étude

Représentation d'une cartouche de chasse :



1.3. Listage des variables susceptibles d'agir sur la réponse

Ces variables sont appelées "Actions".

Les actions sont généralement découpées en deux groupes : facteurs et interactions. Une interaction étant une liste de facteurs (on rencontre le plus souvent des interactions entre 2 facteurs) n'agissant pas de façon indépendante sur la réponse.

Les facteurs sont eux-mêmes classés en deux catégories :

- Les facteurs "bien maîtrisés", dits "Principaux" dans Magic Plan
- Les facteurs "mal maîtrisés", dits "Bruits" dans Magic Plan.

Le schéma du paragraphe 1.2. met en évidence un certain nombre de paramètres intervenant dans la fabrication de notre produit.

Ainsi, le fabricant de cartouches a-t-il choisi de faire porter ses expériences sur cinq facteurs bien maîtrisés :

- Hauteur des culots de douilles (Douilles)
- Fournisseur d'amorces (Amorces)
- Poids de poudre (Poudre)
- Type de bourres (Bourres)
- Fournisseur de plombs (Plombs)

et trois facteurs mal maîtrisés :

- Diamètre des douilles (Ddouilles)

- Diamètre de bourres (Dbourres)
- Hauteur de bourres (Hbourres).

La déclaration de facteurs bruits va entraîner la construction d'un plan produit entre le plan généré pour les facteurs principaux et celui réalisé pour les facteurs bruits. Ce plan permettra ensuite l'étude d'un rapport Signal/Bruit. L'expérimentateur pourra définir un objectif visant à minimiser la variabilité de la cartouche.

1.4. Choix des niveaux ou modalités pour les facteurs sélectionnés

Les actions déclarées dans Magic Plan doivent être discrétisées. Deux cas peuvent se présenter :

- Soit le facteur est par nature qualitatif (donc discret), et l'expérimentateur doit déclarer ses modalités.

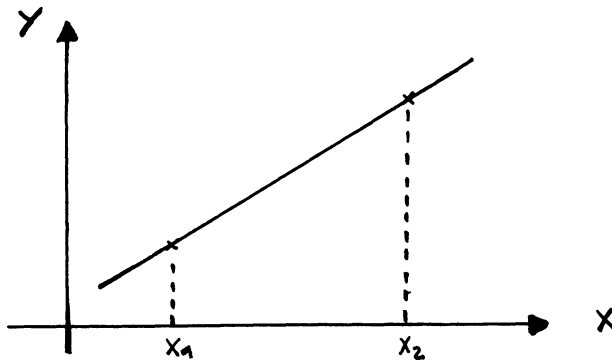
Par exemple, le facteur "Fournisseur de plombs" est qualitatif. Si deux fournisseurs entrent en jeu, le fabricant doit lui affecter deux modalités : Fa1 et Fa2.

- Soit le facteur est de type continu. Pour construire un plan orthogonal l'expérimentateur doit le discrétiser.

Par exemple, les facteurs "Hauteur du culot" et "Poids de poudre" sont continus. Combien de niveaux devront-ils comporter ?

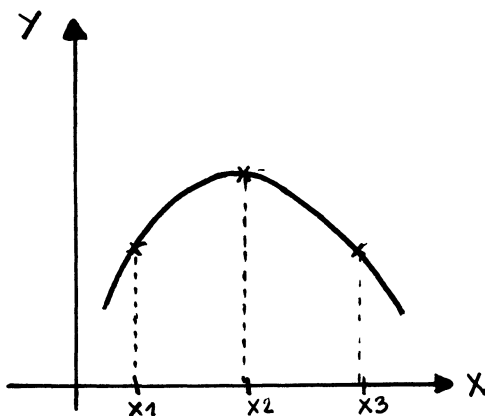
Pour répondre à cette question il faut avoir une connaissance préalable de leur effet sur la vitesse des plombs.

Si l'expérimentateur soupçonne une influence linéaire, deux niveaux suffiront pour détecter l'effet ($Y = m + \alpha X + \dots$).



C'est le cas du facteur "Hauteur de culots" dont le fabricant choisit deux niveaux (10 mm, 20 mm).

Si au contraire on soupçonne une influence non linéaire, deux niveaux seront insuffisants. Pour une influence quadratique ($Y = m + \alpha X^2 + \dots$) trois niveaux sont nécessaires; avec deux niveaux on risque de conclure à la non influence du facteur alors qu'il est significatif.



C'est pour cette raison que le facteur "Poids de poudre" a été découpé en trois niveaux 1 g; 1,2 g; 1,4 g .

Le fabricant choisit donc les niveaux suivants :

- Hauteur des culots de douilles : 10 mm; 20 mm
- Fournisseur d'amorces : Fa1; Fa2
- Poids de poudre : 1 g; 1,2 g; 1,4 g
- Type de bourres : nouveau; standard
- Fournisseur de plombs : Fp1; Fp2
- Diamètre des douilles : 20,76 mm; 20,90 mm
- Diamètre des bourres : 20,74 mm; 20,82 mm
- Hauteur des bourres : 16,1 mm; 16,7 mm.

1.5. Détermination des objectifs de l'expérimentation

Un expérimentateur peut poursuivre des buts de nature diverse (trouver un modèle pour optimiser ou atteindre une valeur nominale; rechercher les facteurs significatifs ...). Le problème du fabricant de cartouches consiste à atteindre une valeur nominale de la réponse, tout en minimisant sa variabilité. La vitesse des plombs recherchée doit être au moins égale à 300 m/s.

2. Formulation de la requête

Tous les éléments définis au cours de l'analyse préalable doivent être saisis dans Magic Plan dans une zone destinée à la requête rassemblant tous les paramètres d'une étude. Les informations indispensables à la construction du plan et à l'analyse sont : les noms de facteurs, les noms de modalités de chaque facteur, la nature de chaque facteur (principal ou bruit), les interactions (fact1 * fact2), les noms de réponses.

Les autres informations ne servent qu'aux rapports d'analyse et aux graphiques.

3. Analyse de la requête, calcul des nombre d'essais par Magic Plan

Le fabricant désire connaître combien d'essais lui coûtera cette étude. Pour cela, il demande à Magic Plan de donner une liste de nombres d'essais compatibles avec ses données.

3.1. Principe de calcul des nombres d'essais

Les plans construits sont analysables; il doit donc leur rester des degrés de liberté (ddl) au résidu. (Le nombre de ddl résiduels est le nombre d'essais du plan moins la somme des ddl des actions moins un pour le terme constant). Les nombres d'essais ne respectant pas cette condition ne seront pas proposés.

Outre cette contrainte, le calcul est basé sur le principe de l'orthogonalité. Pour que deux actions soient orthogonales il faut que le plan ait un nombre d'essais strictement multiple du produit de leurs nombres de niveaux. En prenant les multiples communs des produits des actions deux à deux, on obtient une liste de nombres d'essais qui sont conditions nécessaires, mais non suffisantes à l'existence de plans.

Afin de réduire la quantité d'opérations, on élimine de la liste des actions servant aux calculs des produits deux à deux, les facteurs entrant dans des interactions. En effet, si on a comme modèle $Y = m + \alpha A + \beta B + \delta C + \mu AB$, le nombre d'essais nécessaire pour qu'il y ait orthogonalité du plan s'exprime simplement par le produit du nombre de niveaux AB par celui de C . Car si le nombre d'essais est multiple de $n_{AB} * n_C$, il est aussi multiple de $n_A * n_B$, $n_B * n_C$, et $n_A * n_C$ (rappelons que $n_{AB} = n_A * n_B$).

n_A est le nombre de niveaux de A ; n_{AB} est le nombre de niveaux de AB ...

S'il existe des interactions non disjointes, le produit de leurs nombres de niveaux est corrigé par le nombre de niveaux des actions communes.

Exemple :

Si l'on a dans le modèle les interactions AB et AC ; leur produit se traduit par $(n_{AB} * n_{AC})/n_A$.

3.2. Liste des nombres d'essais

Lorsque Magic Plan a calculé les nombres d'essais compatibles avec la requête, ils sont affichés à l'écran et l'utilisateur peut demander celui qui lui convient. Ce choix déclenche l'algorithme de construction de plan.

Le nombre d'essais choisi par le fabricant de cartouches est le premier de la liste, il correspond au plus petit plan possible soit $12 \times 4 = 48$.

Lorsque des facteurs bruits sont déclarés, le plan recherché est un plan produit, donc son nombre d'essais s'exprime par le produit du nombre d'essais du plan principal (ici, 12) et de celui du plan bruit (ici, 4).

Nous remarquons que le plan Bruit peut être saturé, puisque l'objet de l'étude n'est pas de l'analyser (ainsi il peut contenir 3 facteurs bruits à 2 niveaux en 4 essais, alors que le nombre de ddl résiduels est nul); ce qui n'est pas le cas pour le plan Principal qui lui, laisse 5 ddl au résidu.

4. Construction du plan par Magic Plan

La création d'un plan par Magic Plan repose simplement sur les principes de l'orthogonalité. En effet le plan est construit colonne par colonne de manière à ce que chaque modalité de chaque facteur se trouve associée à toutes les modalités des autres facteurs (ceci un même nombre de fois).

Dans notre cas, deux plans seront construits :

- Un plan Principal en 12 essais permettant l'étude de 4 facteurs à 2 niveaux et d'un facteur à 3 niveaux (plan non répertorié jusqu'alors).
- Un plan Bruit en 4 essais (carré latin de 3 facteurs à 2 niveaux, saturé).

Le plan produit sera affiché dans le tableur sous forme d'un plan atomique où chaque essai du plan Bruit est répété autant de fois qu'il y a d'essais dans le Plan Principal (cf page suivante).

5. Réalisation des essais et analyse des résultats

Le fabricant de cartouches a réalisé ses essais et a saisi ses résultats dans la colonne "Vitesse" réservée à cet effet à la suite du plan. Un ensemble de commandes permet d'obtenir les résultats d'analyse de variance. Magic Plan effectue l'analyse de chaque réponse de façon séparée. Un rapport Signal/Bruit (S/N) étant considéré comme une réponse, on pourra étudier successivement les réponses "Vitesse" et "S/N(Vitesse)".

#	Poudre	Douilles	Amorces	Bourres	Plombs	Ddouilles	Dbourres	Hbourres	Vitesse
1	1,0	10	Fa1	Nouveau	Fp1	20,76	20,74	16,1	275
2	1,0	10	Fa1	Standard	Fp2	20,76	20,74	16,1	251
3	1,0	20	Fa2	Nouveau	Fp1	20,76	20,74	16,1	302
4	1,0	20	Fa2	Standard	Fp2	20,76	20,74	16,1	265
5	1,2	10	Fa1	Nouveau	Fp2	20,76	20,74	16,1	282
6	1,2	10	Fa2	Standard	Fp1	20,76	20,74	16,1	260
7	1,2	20	Fa1	Standard	Fp1	20,76	20,74	16,1	264
8	1,2	20	Fa2	Nouveau	Fp2	20,76	20,74	16,1	305
9	1,4	10	Fa2	Nouveau	Fp1	20,76	20,74	16,1	350
10	1,4	10	Fa2	Standard	Fp2	20,76	20,74	16,1	305
11	1,4	20	Fa1	Nouveau	Fp2	20,76	20,74	16,1	335
12	1,4	20	Fa1	Standard	Fp1	20,76	20,74	16,1	302
13	1,0	10	Fa1	Nouveau	Fp1	20,76	20,82	16,7	289
14	1,0	10	Fa1	Standard	Fp2	20,76	20,82	16,7	250
15	1,0	20	Fa2	Nouveau	Fp1	20,76	20,82	16,7	299
16	1,0	20	Fa2	Standard	Fp2	20,76	20,82	16,7	270
17	1,2	10	Fa1	Nouveau	Fp2	20,76	20,82	16,7	286
18	1,2	10	Fa2	Standard	Fp1	20,76	20,82	16,7	263
19	1,2	20	Fa1	Standard	Fp1	20,76	20,82	16,7	265
20	1,2	20	Fa2	Nouveau	Fp2	20,76	20,82	16,7	302
21	1,4	10	Fa2	Nouveau	Fp1	20,76	20,82	16,7	297
22	1,4	10	Fa2	Standard	Fp2	20,76	20,82	16,7	264
23	1,4	20	Fa1	Nouveau	Fp2	20,76	20,82	16,7	293
24	1,4	20	Fa1	Standard	Fp1	20,76	20,82	16,7	262
25	1,0	10	Fa1	Nouveau	Fp1	20,90	20,74	16,7	276
26	1,0	10	Fa1	Standard	Fp2	20,90	20,74	16,7	230
27	1,0	20	Fa2	Nouveau	Fp1	20,90	20,74	16,7	301
28	1,0	20	Fa2	Standard	Fp2	20,90	20,74	16,7	254
29	1,2	10	Fa1	Nouveau	Fp2	20,90	20,74	16,7	281
30	1,2	10	Fa2	Standard	Fp1	20,90	20,74	16,7	263
31	1,2	20	Fa1	Standard	Fp1	20,90	20,74	16,7	254
32	1,2	20	Fa2	Nouveau	Fp2	20,90	20,74	16,7	304
33	1,4	10	Fa2	Nouveau	Fp1	20,90	20,74	16,7	339
34	1,4	10	Fa2	Standard	Fp2	20,90	20,74	16,7	297
35	1,4	20	Fa1	Nouveau	Fp2	20,90	20,74	16,7	325
36	1,4	20	Fa1	Standard	Fp1	20,90	20,74	16,7	296
37	1,0	10	Fa1	Nouveau	Fp1	20,90	20,82	16,1	278
38	1,0	10	Fa1	Standard	Fp2	20,90	20,82	16,1	231
39	1,0	20	Fa2	Nouveau	Fp1	20,90	20,82	16,1	302
40	1,0	20	Fa2	Standard	Fp2	20,90	20,82	16,1	254
41	1,2	10	Fa1	Nouveau	Fp2	20,90	20,82	16,1	273
42	1,2	10	Fa2	Standard	Fp1	20,90	20,82	16,1	257
43	1,2	20	Fa1	Standard	Fp1	20,90	20,82	16,1	259
44	1,2	20	Fa2	Nouveau	Fp2	20,90	20,82	16,1	292
45	1,4	10	Fa2	Nouveau	Fp1	20,90	20,82	16,1	292
46	1,4	10	Fa2	Standard	Fp2	20,90	20,82	16,1	253
47	1,4	20	Fa1	Nouveau	Fp2	20,90	20,82	16,1	284
48	1,4	20	Fa1	Standard	Fp1	20,90	20,82	16,1	253

5.1. Analyse de la vitesse des plombs sur 30 mètres

Magic Plan utilise un algorithme de régression propre aux plans orthogonaux permettant de calculer les coefficients du modèle, et d'établir un tableau d'analyse de variance. L'orthogonalité présente l'avantage de simplifier les calculs de la régression qui pourraient être effectués à la main. Elle permet en outre de déterminer les coefficients de façon indépendante et donc, de construire un tableau d'analyse de variance, de manière à classer les actions de la plus significative à la moins significative.

Analyse de la réponse Vitesse en m/s

$$\begin{aligned} \text{Vitesse} = & 280.917 + [- 10.479 - 5.292 \ 15.771] [\text{Poudre}] \\ & + [-4.167 \ 4.167] [\text{Douilles}] \quad + [- 6.167 \ 6.167] [\text{Amorces}] \\ & + [17.500 - 17.500] [\text{Bourres}] + [2.333 - 2.333] [\text{Plombs}] \\ & + [3.917 - 3.917] [\text{Ddouilles}] + [7.250 - 7.250] [\text{Dbourres}] \\ & + [- 0.750 \ 0.750] [\text{Hbourres}] \end{aligned}$$

Tableau d'analyse de variance

Les Facteurs significatifs sont marqués d'un S dans la dernière colonne. Tests de Snedecor au seuil $\alpha = 0.05$.

FACTEURS	Σ CARRES	DDL	CARRE MOYEN	FRATIO	SEUIL	
Poudre	6184.540	2	3092.270	20.091	1.000	S
Douilles	833.333	1	833.333	5.414	0.976	S
Amorces	1825.330	1	1825.330	11.859	0.998	S
Bourres	14700	1	14700	95.507	1.000	S
Plombs	261.333	1	261.333	1.698	0.804	
Ddouilles	736.333	1	736.333	4.784	0.967	S
Dbourres	2523	1	2523	16.392	1.000	S
Hbourres	27	1	27	0.175	0.317	
Résidus	5848.780	38	153.915			

Retirant les facteurs non significatifs, on a :

$$\begin{aligned} \text{Vitesse} = & 280.917 + [- 10.479 - 5.292 \ 15.771] [\text{Poudre}] \\ & + [- 4.167 \ 4.167] [\text{Douilles}] \quad + [- 6.167 \ 6.167] [\text{Amorces}] \\ & + [17.500 - 17.500] [\text{Bourres}] + [3.917 - 3.917] [\text{Ddouilles}] \\ & + [7.250 - 7.250] [\text{Dbourres}] \end{aligned}$$

Lecture du modèle brut :

Magic Plan présente les modèles sous forme matricielle, on a ainsi défini une représentation claire de l'effet de chaque action.

$$Y = m + [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots] [A] + \dots$$

- Y est la réponse
- m est la moyenne générale
- $[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \dots]$ vecteur des coefficients de A
- $[A]$ matrice des modalités de A (sous forme disjonctive).

Pour connaître l'effet d'une modalité d'une action, il suffit d'ajouter à la moyenne générale le coefficient correspondant à l'ordre de la modalité. L'effet de la i ème modalité de A s'obtient donc en calculant $m + \alpha_i$. Ainsi on peut donner facilement l'effet des modalités du facteur "Poudre" :

- 1ère modalité (1 g) : $280,917 - 10,479 = 270,438$
- 2ème modalité (1,2 g) : $280,917 - 5,292 = 275,625$
- 3ème modalité (1,4 g) : $280,917 + 15,771 = 296,688$

En raison des conditions de centrage équilibrées, nous obtenons des coefficients dont la somme est nulle.

Calcul des coefficients

Lorsque le plan est orthogonal, le calcul des coefficients se réduit à des sommes et des moyennes sur la réponse Y .

(Ceci est expliqué dans l'article de M. Vigier, cf réf N° 5).

Le tableau d'analyse de variance

On peut établir un tableau d'analyse de variance à partir des coefficients trouvés plus haut, du fait de leur indépendance obtenue grâce à l'orthogonalité du plan. En effet, dans ce cas, les résultats des tests ne dépendent pas de l'ordre d'introduction des actions dans le modèle.

Composition du tableau :

(1) FACTEUR	(2) SOMMEDESCARRES	(3) DDL	(4) = (2)/(3) CARRESMOYENS	(5) FRATIO	(6) SEUIL	(7) S
A	$\frac{N}{n_A} \sum_{i=1}^{n_A} \alpha_i^2$	$n_A - 1$	$\frac{1}{n_A - 1} \frac{N}{n_A} \sum \alpha_i^2$	(4)/(7)		
B	$\frac{N}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} \beta_i^2$	$n_B - 1$	$\frac{1}{n_B - 1} \frac{N}{n_B} \sum \beta_i^2$			
C	$\frac{N}{n_C} \sum_{i=1}^{n_C} \gamma_i^2$	$n_C - 1$	$\frac{1}{n_C - 1} \frac{N}{n_C} \sum \gamma_i^2$	$\frac{\frac{N}{(n_C - 1) n_C} \sum \gamma_i^2}{\frac{1}{N - n} \varepsilon^2}$		
RESIDU	ε^2	$\frac{N - n}{ddl}$ résiduels	$\frac{1}{N - n} \varepsilon^2$ (7)			

N = Nombre d'essais

n = Nombre de ddl consommés par les actions et le terme constant.

$n_A, n_B \dots$ = nombre de modalités des actions

$\alpha_i, \beta_i \dots$ = ième coefficient de A, B ...

ε^2 = somme des carrés résiduels

Chaque ligne représente une action, la dernière contient les résidus.

Le tableau comporte 7 colonnes. La colonne servant de base pour déclarer une action significative est l'avant dernière, la colonne "seuil". Celle-ci contient la probabilité du Fratio calculée grâce à la fonction de répartition de la loi de Snedecor. La dernière colonne contient un "S" lorsque l'action est significative, et ne contient rien sinon.

Le test :

On teste l'hypothèse H_0 : l'action n'a pas d'influence sur la réponse (la somme des carrés des coefficients associés à cette action ne diffère pas significativement de 0).

Contre l'hypothèse H_1 : l'action a une influence sur la réponse (la somme des carrés des coefficients de cette action est significativement différente de 0).

Le test se fait par comparaison avec la somme des carrés des résidus. Le risque α de décider que l'action est significative alors qu'elle ne l'est pas est généralement fixé à 5 % (mais peut être modifié dans Magic Plan).

La règle de décision :

- Si Proba (Fratio) > $1 - \alpha$ alors on conclut que l'action est significative.
- Si Proba (Fratio) < $1 - \alpha$ alors on conclut que l'action n'est pas significative.

Pour une action A ayant n_A niveaux, la probabilité est lue sur la table de Fisher Snedecor à $(n_A - 1, N - n)$ degrés de liberté.

$n_A - 1$ est le nombre de ddl consommés par A, $N - n$ est le nombre de ddl résiduels.

Ainsi dans notre étude, deux facteurs sont non significatifs :

- “Plombs” (Fournisseur de plombs) car Fratio = 1,698
et Proba (Fratio) = 0,804
- “Hbourres” (Hauteur des bourres) car Fratio = 0,175
et Proba (Fratio) = 0,317

Ecriture du modèle net

Il suffit de retirer du modèle brut les actions non significatives pour obtenir le modèle net. Celui-ci sert à calculer les estimations de la réponse (E(Vitesse)) affichées à la suite du plan.

5.2. Etude du rapport Signal/Bruit

La réponse S/N(Vitesse) est calculée à partir des résultats de la réponse principale (Vitesse) grâce aux répétitions des essais du plan principal créées par le plan produit.

#	Poudre	Douilles	Amorces	Bourres	Plombs	S/N(Vitesse)
1	1,0	10	Fa1	Nouveau	Fp1	32.729
2	1,0	10	Fa1	Standard	Fp2	26.360
3	1,0	20	Fa2	Nouveau	Fp1	46.561
4	1,0	20	Fa2	Standard	Fp2	30.200
5	1,2	10	Fa1	Nouveau	Fp2	34.236
6	1,2	10	Fa2	Standard	Fp1	39.160
7	1,2	20	Fa1	Standard	Fp1	34.222
8	1,2	20	Fa2	Nouveau	Fp2	34.051
9	1,4	10	Fa2	Nouveau	Fp1	20.747
10	1,4	10	Fa2	Standard	Fp2	20.913
11	1,4	20	Fa1	Nouveau	Fp2	21.987
12	1,4	20	Fa1	Standard	Fp1	21.146

Magic Plan propose trois formules de rapport S/N selon les objectifs de l'utilisateur :

- Pour minimiser la réponse : $S/N = - 10 \log_{10} [1/n (\sum_i Y_i^2)]$
- Pour maximiser la réponse : $S/N = - 10 \log_{10} [1/n (\sum_i 1/Y_i^2)]$
- Pour atteindre une valeur nominale : $S/N = 10 \log_{10} [1/n(S_n - V_e)/V_e]$

$$\text{avec } S_n = (\sum_i Y_i^2)/n$$

$$V_e = [\sum_i Y_i^2 - (\sum_i Y_i)^2/n]/(n - 1)$$

et n = nombre de répétitions de chaque essai du plan principal (nombre d'essais du plan bruit).

L'objectif de notre fabricant de cartouches étant d'atteindre au moins 300 m/s à 30 mètres, il choisit la 3ème formule ce qui permet à Magic Plan de calculer la réponse S/N (Vitesse). Par l'analyse de cette réponse, on modélisera la variabilité de la vitesse des plombs à 30 mètres. Le but du rapport Signal/ Bruit est de trouver la configuration des actions principales qui donne une réponse stable quelles que soient les valeurs prises par les facteurs bruits (de manière à réduire la variabilité du produit). On ne peut évidemment pas inclure dans ce modèle les facteurs bruits, puisqu'ils servent à générer les répétitions. (On se contentera d'analyser le plan principal).

On obtient les modèles et le tableau d'analyse de variance suivants :

Analyse de la réponse S/N (Vitesse) en m/s

$$\begin{aligned} S/N(\text{Vitesse}) = & 30.193 + [3.770 \ 5.225 - 8.994] [\text{Poudre}] \\ & + [-1.169 \ 1.169] [\text{Douilles}] + [-1.746 \ 1.746] [\text{Amorces}] \\ & + [1.526 - 1.526] [\text{Bourres}] + [2.235 - 2.235] [\text{Plombs}] \end{aligned}$$

Tableau d'analyse de variance

Les Facteurs significatifs sont marqués d'un S dans la dernière colonne.

Tests de Snedecor au seuil $\alpha = 0.05$

FACTEURS	Σ CARRES	DDL	CARRE MOYEN	FRATIO	SEUIL	
Poudre	489.624	2	244.812	11.031	0.984	S
Douilles	16.386	1	16.386	0.738	0.570	
Amorces	36.586	1	36.586	1.649	0.747	
Bourres	27.942	1	27.942	1.259	0.689	
Plombs	59.934	1	59.934	2.701	0.842	
Résidus	110.965	5	22.193			

$$S/N(\text{Vitesse}) = 30.193 + [3.770 \ 5.225 - 8.994] [\text{Poudre}]$$

On constate que pour cette réponse, seul le facteur Poids de poudre est influent. C'est donc sur lui que portera la maximisation de la stabilité du produit.

Après écriture des modèles pour chaque réponse, MAGIC PLAN calcule leurs estimations (cf. tableau page suivante).

6. L'optimisation

Pour optimiser on doit utiliser les deux modèles.

- du modèle représentant S/N(Vitesse), on déduit les configurations qui maximisent le rapport Signal/Bruit (sur les facteurs significatifs).
- dans le modèle représentant la vitesse des plombs, on sélectionne celles qui permettent d'atteindre l'objectif tout en tenant compte des configurations précédentes.

#	Vitesse	E(Vitesse)	S/N(Vitesse)	E(S/N(Vitesse))
1	275	288.771	32.729	33.962
2	251	253.771	26.360	33.962
3	302	309.438	46.561	33.962
4	265	274.438	30.200	33.962
5	282	293.958	34.236	35.417
6	260	271.292	39.160	35.417
7	264	267.292	34.222	35.417
8	305	314.625	34.051	35.417
9	350	327.354	20.747	21.198
10	305	292.354	20.913	21.198
11	335	323.354	21.987	21.198
12	302	288.354	21.146	21.198
13	289	274.271	32.729	33.962
14	250	239.271	26.360	33.962
15	299	294.938	46.561	33.962
16	270	259.938	30.200	33.962
17	286	279.458	34.236	35.417
18	263	256.792	39.160	35.417
19	265	252.792	34.222	35.417
20	302	300.125	34.051	35.417
21	297	312.854	20.747	21.198
22	264	277.854	20.913	21.198
23	293	308.854	21.987	21.198
24	262	273.854	21.146	21.198
25	276	280.937	32.729	33.962
26	230	245.937	26.360	33.962
27	301	301.604	46.561	33.962
28	254	266.604	30.200	33.962
29	281	286.125	34.236	35.417
30	263	263.458	39.160	35.417
31	254	259.458	34.222	35.417
32	304	306.792	34.051	35.417
33	339	319.521	20.747	21.198
34	297	284.521	20.913	21.198
35	325	315.521	21.987	21.198
36	296	280.521	21.146	21.198
37	278	266.437	32.729	33.962
38	231	231.437	26.360	33.962
39	302	287.104	46.561	33.962
40	254	252.104	30.200	33.962
41	273	271.625	34.236	35.417
42	257	248.958	39.160	35.417
43	259	244.958	34.222	35.417
44	292	292.292	34.051	35.417
45	292	305.021	20.747	21.198
46	253	270.021	20.913	21.198
47	284	301.021	21.987	21.198
48	253	266.021	21.146	21.198

L'écriture matricielle du modèle facilite la recherche des combinaisons intéressantes. Sachant que seul le facteur Poudre agit sur la réponse S/N (Vitesse), on cherche quelle est sa modalité maximisant le rapport Signal/Bruit. Pour cela il faut choisir celle dont le coefficient est le plus élevé. On retient donc le second niveau du facteur Poudre : 1,2 g.

Cette modalité étant fixée, il reste à définir la combinaison des autres facteurs permettant d'atteindre une vitesse minimale de 300 m/s. Il suffit de prendre dans le modèle représentant la vitesse, les modalités des facteurs dont les coefficients sont les plus élevés, en gardant le poids de poudre à 1,2 g.

La configuration optimale de la cartouche de chasse peut donc s'exprimer ainsi :

facteurs	Douilles	Amorces	Poudre	Bourres	Vitesse estimée
modalités	20 mm	Fa2	1,2 g	nouveau	303,5 m/s

Cette solution est satisfaisante car, non seulement on minimise la variabilité de la réponse, mais aussi, on dépasse la vitesse minimale des plombs imposée par le fabricant.

Essais de confirmation :

Pour confirmer l'optimum trouvé sur la réponse et sur le rapport Signal/Bruit, on réalise quatre fois la configuration précédente. Les valeurs mesurées sont alors :

315 m/s
313 m/s
309 m/s
303 m/s

soit une vitesse moyenne de 310 m/s et un rapport Signal/Bruit de 35,36. Ce qui est proche de l'estimation trouvée par le modèle.

Bibliographie

- [1] BENOIST, D. (1974) : Notions sur les plans d'expériences Publication de l'Institut Français du Pétrole, Ste des Editions Technip.
- [2] BENOIST, D. (1970) : Relations entre plans d'expériences, Thèse de doctorat ès-sciences, (N° CNRS 40 4193), Faculté des Sciences de Paris.
- [3] LEBART, L. MORINEAU, A. FENELON, J.P. (1979) : Traitement des Données Statistiques, Dunod.
- [4] TAGUCHI, G. : System of experimental design. Unipub Krans International Publications Whith Plains New York. American Supplier Institute.
- [5] VIGIER, M. (1987) : Plans d'expériences : une nouvelle méthode simple et générale pour la détermination du modèle et l'optimisation de la réponse. invited paper 5.2 46ème session de l'ISI.
- [6] VIGIER, M. (1988) : Pratique des plans d'expériences : Méthodologie Taguchi, Editions d'Organisation.