REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. RINGLER

Sur un petit problème pratique d'estimation en fiabilité

Revue de statistique appliquée, tome 36, n° 4 (1988), p. 25-32

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1988__36_4_25_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1988, **XXXVI** (4), 25-32

SUR UN PETIT PROBLÈME PRATIQUE D'ESTIMATION EN FIABILITÉ

J. RINGLER

Ingénieur-Conseil

L'estimation du taux de panne d'un dispositif non réparable pour lequel des résultats émanant d'un essai de fiabilité sont disponibles conduit parfois les praticiens à faire appel à des méthodes contestables. Cet article a pour objet de comparer les méthodes les plus utilisées et de mieux préciser leurs conditions d'applicabilité en fonction de la nature des données disponibles. Des recommandations sont fournies au niveau de la conclusion.

Mots clés : *Fiabilité, Essais, Estimation.*

I. Introduction

Le but de cet article est de présenter un petit problème pratique auquel se trouve régulièrement confrontés les fiabilistes : il s'agit de l'estimation du taux de panne d'un dispositif à partir de résultats d'essais. Soumis à ce problème d'estimation, certains fiabilistes font appel à telle ou telle méthode d'estimation concourant à des résultats divergents, ce qui constitue à leurs yeux une anomalie flagrante.

Mon propos, qui n'a aucune prétention quant à la complexité de l'approche statistique utilisée, a pour objet d'apporter quelques éclaircissements sur les deux méthodes d'estimation les plus usuelles, de les commenter et d'expliquer sans aucun calcul la raison profonde des écarts constatés sur les résultats. Il sera sans doute moins utile pour le statisticien professionnel, rompu à l'art de l'estimation ...

II. Le problème et la contradiction apparente

Le problème est en fait très simple dans son principe. On dispose de résultats d'essais dans lesquels un nombre n_0 de dispositifs donnés – disons électromécaniques – ont été soumis à des cycles de fonctionnement identiques pendant une même durée que nous désignerons par t. Ces résultats sont les suivants : k dispositifs (sur les n_0 au départ) sont trouvés défaillants à la fin de l'essai.

L'objet de l'analyse étant d'estimer le taux de panne par unité de temps – disons par heure – de ce type de dispositif dans des conditions analogues à celles de l'essai, les deux approches suivantes sont fréquemment suivies par les fiabilistes :

Première Approche

Il paraît intéressant d'utiliser la relation directe entre les bornes inférieures et supérieures du taux de panne sous le risque α de 1[re] espèce et les fractiles adéquats de la variable du chi-deux à $(2k)$ et $(2k + 2)$ degrés de libertés respectivement, soit :

$$\lambda_i = \frac{\chi^2_{2k}(\alpha/2)}{2n_0t} \quad \text{et} \quad \lambda_s = \frac{\chi^2_{2k+2}(1-\alpha/2)}{2n_0t} \qquad \text{(1) (essai tronqué)}$$

Deuxième approche

Partant d'un modèle probabiliste de type binômial, on calcule préalablement à l'aide de la tabulation de ce modèle les bornes inférieures et supérieures r_i et r_s au risque α de l'intervalle de confiance bilatéral de la probabilité de bon fonctionnement du dispositif en question au bout d'une durée t dans les conditions de l'essai. Cela étant fait, partant de la relation :

$r(t) = e^{-\lambda t}$, en désignant par $r(t)$ la probabilité de bon fonctionnement – ou fiabilité – du dispositif à l'instant t, on écrit alors de façon naturelle :

$$\lambda = -\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\,r(t) \text{ et donc connaissant } r_i, \text{ et } r_s, \text{ on tire :}$$

$$\lambda_i = -\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\,r_s\,, \text{ et } \lambda_s = -\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\,r_i \qquad (2)$$

Comme on peut s'y attendre, la valeur obtenue à l'aide de l'expression (1) ne coïncide pas avec celle donnée par l'expression (2). Les praticiens sont parfois étonnés de la mise en évidence de cette contradiction qui, comme nous allons le voir, n'est qu'apparente à plus d'un titre.

III. Commentaires sur la contradiction apparente

Présenté de cette façon-là, la contradiction apparente appelle au minimum les questions et les commentaires suivants :

— A-t-on des raisons de supposer que la loi de mortalité du dispositif considéré est de nature exponentielle?

— A-t-on quelque connaissance sur les dates de manifestation des pannes constatées en fin d'essai sur les dispositifs défectueux?

— Dans tous les cas de figure, l'expression (1) donnant l'intervalle de confiance du taux de panne est erronée compte tenu du mode de réalisation de l'essai, comme on le verra ci-après.

La question de savoir si la loi de mortalité du dispositif considéré est exponentielle est évidemment très importante. En effet si l'on ne dispose pas de raisons suffisantes (ex. : résultats antérieurs émanant de dispositifs similaires) pour étayer cette hypothèse, la notion de taux de panne constant doit céder le pas à celle de "taux de panne équivalent" $\lambda_{eq}(t)$ sur la durée d'essai t et dont un estimateur ponctuel est obtenu en écrivant :

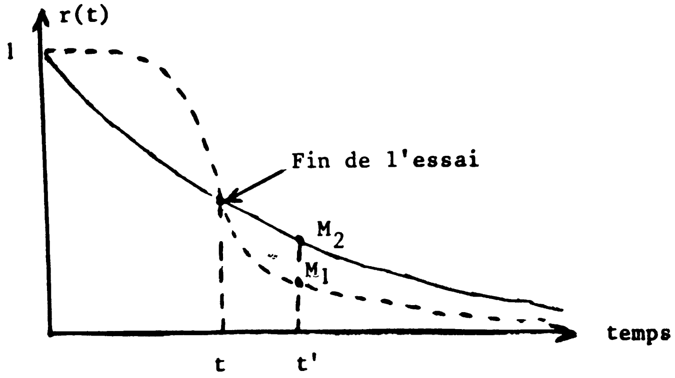
$$\widehat{r}(t) = \frac{n_0 - k}{n_0} = e^{-\lambda_{eq} t},$$

soit :

$$\widehat{\lambda}_{eq}(t) = -\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\,\widehat{r}(t) = -\frac{1}{t}\,\mathrm{Log}\,\frac{n_0 - k}{n_0} \qquad (3)$$

A ce sujet il n'est peut-être pas inutile de rappeler que le concept de "lambda équivalent" peut conduire à des extrapolations dangereuses lorsqu'on oublie que la valeur associée à un tel paramètre n'a une signification que pour la durée d'essai t considérée : utiliser cette valeur dans un modèle non exponentiel pour prédire la fiabilité du dispositif au bout d'un temps t différent, n'a a priori aucun sens.

La figure ci-après, volontairement exagérée, illustre cette remarque (la prédiction correspondant au point M_2 s'écartant sensiblement de la réalité obtenue en M_1) :



------ Loi de mortalité réelle mais inconnue

——— Loi artificielle à taux de panne constant $\lambda_{eq}(t)$

Pour résumer ce premier point, de deux choses l'une :

— ou bien, par l'acquis de données antérieures, on admet que le taux de panne du dispositif est constant, et dans ce cas l'expression (2) apparaît viable,

— ou bien, dans le cas inverse, on manque de connaissance sur la loi de mortalité réelle, et il semble alors préférable d'abandonner le concept de "lambda équivalent" au profit de la simple probabilité de bon fonctionnement à t, dont l'estimation (r_i, r_s) par intervalle de confiance sur le modèle binomial est valable. Dans ce dernier cas, toute prédiction de la fiabilité de ce dispositif à un instant différent de t devient naturellement illusoire.

Supposons dans un premier temps que l'on ne connaisse pas les dates d'apparition des pannes des dispositifs défectueux. Autrement dit, les dispositifs en panne au cours de l'essai ne sont révélés défectueux qu'au bout de celui-ci. Dans ces conditions, cette "ignorance" des instants de panne ne permet point de conforter – ou d'infirmer – le caractère exponentiel de la loi de mortalité du dispositif (e.g. : les dispositifs révélés défectueux en fin d'essai étaient peut-être tombés en panne dès le début, en raison par exemple de défauts de fabrication présentant des conséquences opérationnelles immédiates); il apparaît manifestement que la durée cumulée $n_0 t$ n'a plus de signification physique eu égard aux dispositifs défectueux; on ne peut pas appliquer la formule (1) qui n'est valable que pour des dispositifs remplacés immédiatement après l'occurence d'une panne.

Dans ces conditions, peut-on dire, la contradiction doit disparaître d'elle-même puisque seule la formule (2) reste viable dans l'absence de connaissance sur les instants de pannes.

Mais supposons à présent que les dates d'occurence des pannes aient pu être relevées. Soit $t_1, t_2, \dots, t_k$ ces dates ordonnées de façon croissante. Alors, en supposant que cette distribution n'est pas en contradiction avec celle d'une loi exponentielle, on peut calculer l'estimateur ponctuel du taux de panne du dispositif à partir de la fonction de vraisemblance :

$$V(\lambda, t_i, t_2, \dots, t_k, t) = (\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda \sum_1^k t_i}) \, \mathrm{e}^{-(n_0-k)\lambda t}$$

d'où, en faisant $\dfrac{\partial V}{\partial \lambda} = 0$:

$$\widehat{\lambda} = \frac{k}{\sum_i^k t_i + (n_0 - k)t} \tag{4}$$

Par ailleurs, l'expression correcte des bornes de l'intervalle de confiance bilatéral du taux de panne s'écrit alors :

$$\lambda_i = \frac{\chi^2_{2k}(\alpha/2)}{2\left(\sum_1^k t_i + (n_0 - k)t\right)}, \quad \lambda_s = \frac{\chi^2_{2k+2}(1 - \alpha/2)}{2\left(\sum_1^k t_i + (n_0 - k)t\right)} \tag{5}$$

Revoici donc une nouvelle contradiction : car cette fois, la formule (5) est applicable et conduit à un résultat différent de celui, toujours applicable, fourni par la formule (2). Il en est de même pour les estimations ponctuelles du taux de panne, car en général le résultat donné par le formule (4) est différent de l'estimation issue de celle du modèle binomial :

$$\widehat{\lambda} = -\frac{1}{t} \operatorname{Log} \widehat{r}(t) = -\frac{1}{t} \operatorname{Log}\left(\frac{n_0 - k}{n_0}\right),$$

la convergence entre les deux estimateurs ayant lieu toutefois lorsque $k \ll n_0$.

Il serait donc tentant, à présent, de chercher une nouvelle erreur d'estimation quelque part. Et pourtant, il faut bien admettre que les différentes expressions conduisant tant aux estimations ponctuelles qu'aux estimations par intervalles de confiance du taux de panne sont exactes. Les écarts d'estimation résident tout simplement dans le fait que les données prises en compte dans l'une et l'autre approche sont très inégalement riches.

En effet, l'estimation fournie par l'expression (2) ne prend en compte que le résultat final de l'essai : il suffit de se rappeler que les valeurs de r_i et r_s, tout comme $\widehat{r}$, reposent sur la simple connaissance du nombre d'unités testées et du nombre de défectueux en bout d'essai. A l'inverse, dans les estimations du type (4) ou (5), on prend en compte, outre le résultat final, le cumul des durées de vie individuelles des dispositifs tombés en panne avant la fin de l'essai.

Il est donc manifeste que, si l'on maintient toujours l'hypothèse d'une loi de mortalité exponentielle pour le dispositif considéré, l'estimation ponctuelle du taux de panne obtenue par l'expression (4) est "meilleure" que celle obtenue par l'expression (3). En effet, elle est d'une part plus "informative" – car intégrant davantage de données – et d'autre part plus robuste car moins sensible aux fluctuations d'échantillonnage importantes pouvant survenir en fin d'essai.

Ce qui vient d'être dit est également valable en ce qui concerne les estimations par intervalles de confiance, de sorte que l'estimation par l'expression (5) doit être préférée à celle donnée par l'expression (2). Cela signifie qu'à niveau de risque analogue α, l'intervalle de confiance bilatéral fourni par l'expression (5) doit être plus resserré (car intégrant plus d'information) que celui fourni par l'expression (2). De telles considérations ne sont naturellement choquantes que pour les non-statisticiens! Je me permettrai juste de rappeler à ces derniers que l'intervalle de confiance n'est rien d'autre qu'une plage aléatoire associée en particulier aux résultats expérimentaux obtenus. Il n'y a donc plus lieu de s'étonner que les intervalles de confiance annoncés soient différents. Cela, en particulier, ne remet pas en cause l'exactitude de l'affirmation inhérente à la compréhension de l'intervalle de confiance : "En encadrant par cet intervalle le paramètre inconnu qu'on cherche à estimer, on a seulement α % de chance de se tromper".

Afin d'illustrer tout ceci par un exemple numérique, imaginons un plan d'essai de 160 heures auquel 10 dispositifs identiques ont été soumis. Au cours de cet essai, 8 dispositifs sont tombés en panne aux heures suivantes :

8 h – 21 h – 32 h – 40 h – 55 h – 86 h – 110 h – 154 h

Il est facile de vérifier que ces résultats sont compatibles avec l'hypothèse d'une loi de mortalité exponentielle (ce qui ne fait pas l'objet de l'article). Calculons à présent les estimateurs du taux de panne des dispositifs testés avec chacune des deux approches précédentes :

– avec intégration complète des données :

• Estimateur ponctuel :

$$\widehat{\lambda} = \frac{k}{\sum_1^k t_i + (n_0 - k)t} \qquad \text{avec ici :} \quad \begin{aligned} t &= 160 \text{ h} \\ n_0 &= 10 \\ k &= 8 \end{aligned}$$

$$\sum_1^8 t_i = 8 + 21 + 32 + 40 + 55 + 86 + 110 + 154 = 506 \text{ h}$$

Soit : $\widehat{\lambda} = \dfrac{8}{506 + (2 \times 160)} = 9,68 \cdot 10^{-3}/\text{h}$

• Intervalle de confiance bilatéral au risque 10 % :

$$\lambda_i = \frac{\chi^2_{16}(0,05)}{2\left(\sum_1^k t_i + (n_0 - k)t\right)} \qquad \text{avec : } \chi^2_{16}(0,05) = 7,96$$

Soit : $\lambda_i = \dfrac{7,96}{1652} = 4,82 \cdot 10^{-3}/\text{h}$

$$\lambda_s = \frac{\chi^2_{18}(0,95)}{2\left(\sum_1^k t_i + (n_0 - k)t\right)} \qquad \text{avec : } \chi^2_{18}(0,95) = 28,9$$

Soit : $\lambda_s = \dfrac{28,9}{1652} = 17 \cdot 5 \cdot 10^{-3}/\text{h}$

– avec utilisation préalable de la loi binomiale basée sur les résultats en fin de l'essai :

• Estimateur ponctuel : $\widehat{\lambda} = -\dfrac{1}{t} \operatorname{Log} \dfrac{n_0 - k}{n_0}$

$$= -\frac{1}{160} \operatorname{Log} \left(\frac{2}{10}\right) = 10,06 \cdot 10^{-3}/\text{h}$$

• Intervalle de confiance bilatéral au risque 10 %

$$\lambda_i = -\frac{1}{t} \operatorname{Log} r_s(0,95) \quad , \quad \lambda_s = -\frac{1}{t} \operatorname{Log} r_i(0,05)$$

La table de la fonction cumulée de la loi binomiale donne pour $n = 10$ et $k = 2$: $r_s(0,95) = 0,507$, $r_i(0,05) = 0,0307$.

Soit :

$$\lambda_i = -\frac{1}{160} \operatorname{Log} 0,507 = 4,24 \cdot 10^{-3}/\text{h}$$

$$\lambda_s = -\frac{1}{160} \operatorname{Log} 0,037 = 20,60 \cdot 10^{-3}/\text{h}$$

Sur le bilan de cet exemple fictif, on peut constater que les deux approches conduisent à des estimateurs ponctuels voisins ($9,68 \cdot 10^{-3}/\mathrm{h}$ dans le premier cas, $10,06 \cdot 10^{-3}/\mathrm{h}$ dans le second), ce qui traduit le fait que les résultats expérimentaux lissent bien le modèle exponentiel de bout en bout. En ce qui concerne l'estimation par intervalle, on obtient avec la première approche une plage plus serrée ($4,82 \cdot 10^{-3}/\mathrm{h} - 17,5 \cdot 10^{-3}/\mathrm{h}$) que celle obtenue par l'approche binomiale ($4,24 \cdot 10^{-3}/\mathrm{h} - 20,60 \cdot 10^{-3}/\mathrm{h}$) au même niveau de risque de 10 %. Cela est bien conforme à ce que nous disions précédemment.

Afin de montrer la plus grande sensibilité aux fluctuations de l'estimation obtenue par l'approche binômiale, supposons enfin que toutes choses égales par ailleurs, l'essai ait été ensuite poussé jusqu'à 300 h et qu'aucune défaillance nouvelle n'ait été enregistrée sur les deux dispositifs restant. En se limitant à l'estimation ponctuelle, on obtient à présent :

– avec intégration complète des données :

$$\widehat{\lambda} = \frac{8}{506 + (2 \times 300)} = 7,23 \cdot 10^{-3}/\mathrm{h}$$

– avec utilisation préalable de la loi binomiale :

$$\widehat{\lambda} = -\frac{1}{300} \operatorname{Log}\left(\frac{2}{10}\right) = 5,36 \cdot 10^{-3}/\mathrm{h}$$

On voit ainsi que la variation relative de l'estimateur ponctuel du taux de panne est d'environ 25 % si l'on intègre complètement les données, alors qu'elle approche les 50 % si l'on utilise le modèle binomial évalué en bout d'essai. Un tel écart est évidemment fâcheux si l'absence d'apparition de défauts après la 8ᵉ manifestation de panne enregistrée n'est due qu'à une fluctuation d'échantillonnage.

IV. En guise de conclusion

En résumé, je donnerai les conclusions suivantes :

– Lorsque l'on ne dispose que de données brutes constatées en fin d'essai, sans connaissance des instants de pannes, les seules estimations du taux de panne, ponctuelle ou par intervalle, ne peuvent être obtenues que par inversion de la formule : $r(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ en écrivant : $\lambda = -\frac{1}{t} \operatorname{Log} r(t)$.

Il faut cependant faire attention : si l'on n'a pas de solides raisons de penser que la loi de mortalité du dispositif est de nature exponentielle, les estimations ainsi calculées ne sont rien d'autres que celles d'un taux de panne "équivalent" qui peut n'avoir aucune réalité physique et qui, en particulier, ne permet aucune extrapolation sur l'estimation de la fiabilité du dispositif sur un temps de mission différent de celui de l'essai. Je suggère donc la plus grande prudence sur l'utilisation des taux de panne ainsi estimés.

– Lorsque les instants de panne survenant en cours d'essai sont connus, il est avant tout nécessaire de tester, ne serait-ce que par une simple approche graphique, l'hypothèse d'exponentialité de la loi de mortalité. Lorsque cette hypothèse s'avère confirmée, il apparaît bien préférable d'estimer le taux de panne du dispositif à l'aide des formules classiques telles que (4) et (5). On bénéficie en effet d'un estimateur ponctuel plus informatif, car intégrant l'ensemble des données disponibles et d'un intervalle de confiance (λ_i , λ_s) devant être plus resserré, à niveau de risque identique, que ce que l'on obtiendrait par inversion de la loi binômiale en se basant sur les données brutes au terme de l'essai.

Il m'est ainsi apparu intéressant d'apporter ces quelques réflexions à ce petit problème d'estimation de fiabilité de dispositifs non réparés au cours d'un essai. Il est à peu près évident qu'un tel problème serait susceptible de donner lieu à des prolongements analytiques plus élaborés – et partant plus précis –, mais il me semble que, d'un point de vue pratique, la nature de ces réflexions peut constituer une réponse suffisante à l'ingénieur en fiabilité confronté à ce dilemme apparent que constitue la mise en évidence d'intervalles de confiance différents ...