Revue de statistique appliquée

A. Vessereau

Sur le contrôle par mesures dans le cas de deux limites de tolérance combinées écart-type connu

Revue de statistique appliquée, tome 35, nº 2 (1987), p. 5-25

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1987__35_2_5_0>

Rev. Statistique Appliquée, 1987, **XXXV** (2), 5-26

SUR LE CONTRÔLE PAR MESURES DANS LE CAS DE DEUX LIMITES DE TOLÉRANCE COMBINÉES ÉCART-TYPE CONNU

A. VESSEREAU

Les règles de contrôle par mesurage d'une série de lots, éventuellement d'un lot unique, ont été codifiées pour la première fois, de façon systématique, dans les années 1950; elles ont fait l'objet de la norme MIL-STD 414 établie par l'"Office of the Secretary of Defense, Department of Defense, U.S.A.". Ce document a été traduit en langue française et adopté comme norme nationale en 1967, sous la référence NF-X06-023; plus tard il a reçu le label de norme internationale ISO 3951. Ces textes sont très volumineux (138 pages dans la version française), fort complexes, et d'usage malaisé. Il est douteux qu'ils aient été utilisés de façon courante dans la pratique industrielle, contrairement aux normes qui traitent du contrôle par attributs (MIL-STD 105 D, ISO 2859, AFNOR X06-022), beaucoup plus simples, mais qui donnent des plans moins économiques lorsque les conditions requises pour le contrôle par mesurage sont satisfaites (distribution normale, écart-type connu ou non).

Préoccupé par cette situation, l'ISO a préparé, puis publié en 1981, sous la même référence 3951, un document plus court (68 pages sans les Annexes) et plus opérationnel, où des graphiques de lecture aisée remplacent certaines tables très denses de l'ancien 3951. Malheureusement, peu de temps après sa parution, on s'est aperçu que la nouvelle norme appelait de sérieuses réserves dans les règles applicables lorsque l'écart-type est connu et qu'on a affaire à deux limites « combinées » (une pièce est défectueuse lorsque la caractéristique mesurée se trouve à l'extérieur de l'intervalle de tolérance (T_i, T_s)).

Un groupe de travail a donc été constitué au sein du Comité Technique de l'ISO chargé des méthodes statistiques, avec pour mission de préparer une nouvelle version, corrigée des défauts de la précédente. Ayant été a même de connaître le nouveau projet, qui sera soumis à un vote international (on ne doit pas espérer une parution éventuelle avant un délai de plusieurs mois), j'ai eu le loisir de l'étudier en détail ([1]).

Mon attention s'est tout naturellement portée sur la nouvelle rédaction du point délicat évoqué ci-dessus : deux limites combinées, écart-type connu. Cette note, fruit de mes réflexions, comporte 4 sections et 1 annexe.

A. Une seule limite de tolérance (Rappel de résultats classiques),

B. Deux limites combinées — Région d'acceptation,

(1) De son côté, la Commission des méthodes statistiques de l'AFNOR a préparé une nouvelle version X 06 023 qui, si elle est adoptée après enquête publique, devrait paraître dans un délai plus court.

C. Deux limites combinées — Courbes d'efficacité,
D. Discussion des résultats.

Annexe : Sur le tracé de la courbe d'acceptation.

Les renvois au projet ISO 3951 concerneront toujours des plans en « contrôle normal » : les plans en « contrôle renforcé » et en « contrôle réduit » s'en déduisent automatiquement.

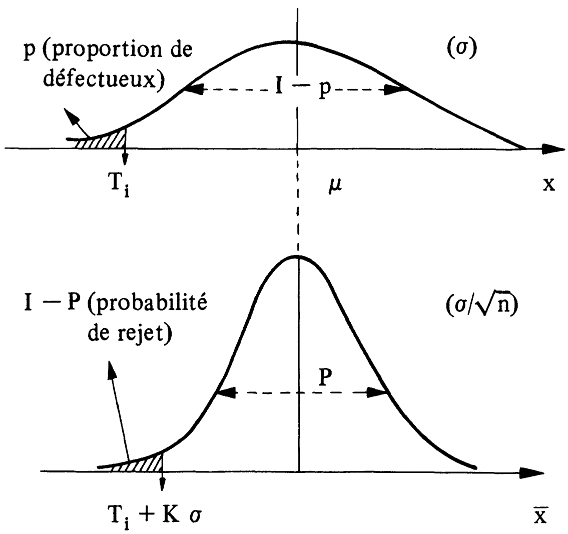
*

Je tiens à adresser mes remerciements à M. Guy ROUZET, avec lequel j'ai longuement discuté des problèmes qui font l'objet de cet article. M. ROUZET est notamment l'auteur des calculs qui figurent en Annexe « Sur le tracé de la courbe d'acceptation ».

A. Une seule limite de tolérance
(Rappel de résultats classiques)

On supposera qu'il s'agit d'une limite inférieure (T_i); les résultats sont immédiatement transposables au cas d'une limite supérieure.

A partir d'un échantillon d'effectif n, dont la moyenne est $\bar{x}$, un lot est accepté si $\bar{x} \geqslant T_i + K\sigma$; K est la « constante d'acceptation ». Les figures ci-après montrent la correspondance entre la proportion p d'individus défectueux (en deça de T_i) et la probabilité d'acceptation P.



$$\rightarrow \frac{T_i - \mu}{\sigma} = u_p$$

$$\mu = T_i + \sigma u_{1-p}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma}[T_i + K\sigma - \mu] = u_{1-P}$$

FIGURE 1

Des relations précédentes on tire $u_{1-P} = \sqrt{n}(-u_{1-p} + K)$

$$P = F[\sqrt{n}(u_{1-p} - K)] \qquad (1)$$

où F est la fonction de répartition de la variable normale réduite. Pour un couple donné (n, K) l'équation (1) est celle de la courbe d'efficacité du plan d'échantillonnage.

Si l'on se donne un point particulier (p_o, P_o) de cette courbe, l'équation (1) traduit une relation entre n et K; si d'autre part l'effectif d'échantillon n est fixé, on obtient la constante d'acceptation par la relation :

$$K = u_{1-p_o} - \frac{1}{\sqrt{n}} u_{P_o}$$

Par exemple, si $p_o = 0{,}10$, $P_o = 0{,}95$, $n = 33$, on a :

$$K = 1{,}2816 - \frac{1{,}6449}{\sqrt{33}} = 0{,}995$$

n = 33, K = 0,995 sont les paramètres du plan de lettre-code K, NQA = 10 de l'ISO 3951 (Table III-A, courbe d'efficacité V – K de cette norme).

B. Deux limites combinées — région d'acceptation

B.1. Introduction — Région d'acceptation lorsque μ et σ sont connus

Ce paragraphe a pour but de justifier la courbe donnée, sans beaucoup d'explications, au §B 5-3 de l'Annexe B de ISO-3951, (Figure 13, reproduite ci-après en Figure 4). Il constitue aussi une introduction à la notion de « région d'acceptation » dans le contrôle sur échantillon.

Lorsqu'on se donne une proportion p_o de défectueux au delà de laquelle les lots sont inacceptables (le NQA dans ISO 3951), ceux-ci seront nécessairement rejetés si l'écart-type σ dépasse une valeur σ_L (écart-type limite) définie, d'une part par $\mu = 1/2\,(T_i + T_s)$ — milieu de l'intervalle de tolérance — d'autre part par la partition de p_o en $p_o/2$ en deçà de T_i et $p_o/2$ au delà de T_s (Figure 2).

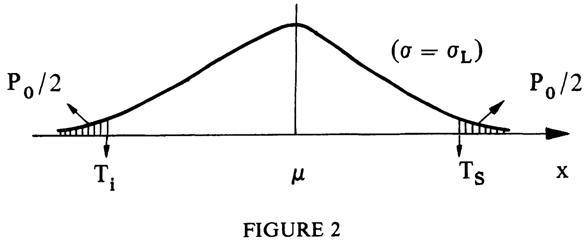


FIGURE 2

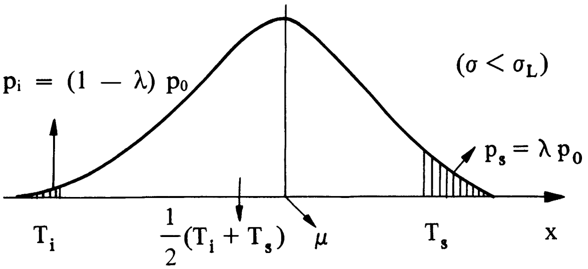
$$\rightarrow \frac{T_s - \mu}{\sigma_L} = \frac{\mu - T_i}{\sigma_L} = \frac{T_s - T_i}{2\sigma_L} = u_{1-p_o/2}$$

$$\text{d'où l'on tire} \quad \frac{\sigma_L}{T_s - T_i} = \frac{1}{2u_{1-p_o/2}} \qquad \text{(2-a)}$$

En posant $\dfrac{\sigma_L}{T_s - T_i} = \sigma'_L$ (l'unité de mesure est l'intervalle de tolérance $T_s - T_i$)

$$\sigma'_L = \frac{1}{2u_{1-p_o/2}} \quad (^2) \tag{2-b}$$

Lorsque $\sigma < \sigma_L$, la moyenne peut s'écarter de $\frac{T_i + T_s}{2}$ en respectant la condition $p = p_o$, conformément à la figure 3, où il y a partition de p_o en $p_s = \lambda p_o$ au delà de T_s et $p_i = (1 - \lambda)\, p_o$ en deçа de T_i ($\lambda > 0{,}5$).



$$\frac{T_s - \mu}{\sigma} = u_{1-\lambda p_o}$$

$$\frac{T_i - \mu}{\sigma} = u_{(1-\lambda)p_o}$$

d'où :

$$\frac{T_s - T_i}{\sigma} = u_{1-\lambda p_o} - u_{(1-\lambda)p_o}$$

$$\mu - T_i = -\sigma u_{(1-\lambda)p_o}$$

FIGURE 3

En posant $\frac{\sigma}{T_s - T_i} = \sigma'$, $\frac{\mu - T_i}{T_s - T_i} = \mu'$ (l'origine est T_i et l'unité l'intervalle de tolérance $T_s - T_i$) on a les relations :

$$\begin{aligned} \sigma' &= \frac{1}{u_{1-\lambda p_o} - u_{(1-\lambda)p_o}} \\ \mu' &= -u_{(1-\lambda)p_o}\, \sigma' \end{aligned} \tag{3}$$

qui sont les équations paramétriques de la courbe $\mu' = f(\sigma')$, le paramètre λ variant de 0,5 à 1.

Exemple

$p_o = 0{,}10$ (NQA = 10 dans ISO 3951), $\frac{p_o}{2} = 0{,}05$

$u_{1-p_o/2} = u_{0{,}95} = 1{,}6449$

$\sigma'_L = \frac{1}{2 \times 1{,}6449} = 0{,}304$ (équation 2-b)

0,304 est la valeur f_o donnée dans la Table IV σ de ISO 3951 pour NQA = 10.

Elle correspond à $\lambda = 0{,}5$ et, dans un système d'axes (σ', μ'), au point $\sigma' = 0{,}304$, $\mu' = 1/2$.

D'autres points de la courbe (σ', μ') s'obtiennent en donnant à λ dans le système (3) des valeurs de 0,5 à 1,0.

---

(2) Dans ISO 3951 (version en cours de révision), $p_o = \frac{NQA}{100}$, σ'_L est noté f_σ.

Pour $\lambda = 0{,}75$, $I - \lambda = 0{,}25$, $\lambda p_o = 0{,}075$, $I - \lambda p_o = 0{,}925$, $(I - \lambda)\, p_o = 0{,}025$.

$$\lambda = 0{,}75 \quad \begin{cases} \sigma' = \dfrac{1}{u_{0,925} - u_{0,025}} = \dfrac{1}{1{,}4395 + 1{,}9600} = 0{,}294 \\ \mu' = -u_{0,025}\, \sigma' = 1{,}9600\, \sigma' = 0{,}576 \end{cases}$$

On trouve de même :

$$\lambda = 0{,}90 \quad \begin{cases} \sigma' = 0{,}273 \\ \mu' = 0{,}634 \end{cases} \qquad \lambda = 0{,}99 \quad \begin{cases} \sigma' = 0{,}228 \\ \mu' = 0{,}705 \end{cases}$$

Ces quatre points suffisent pour tracer avec suffisamment de précision (Fig. 4) la courbe $\mu' = f(\sigma')$, donnée en figure 13 dans ISO 3951.

B.2. Contrôle sur échantillon — Région d'acceptation

Lorsque les limites T_i, T_s sont considérées indépendamment l'une de l'autre (limites dites « séparées »), on est ramené, pour chacune d'elles, au problème traité en section A. Si l'on attache la même importance à T_i et T_s, la condition d'acceptation est donnée par la double inégalité $T_i + K\sigma \leqslant \overline{x} \leqslant T_s - K\sigma$.

Lorsque les limites sont « combinées » (une pièce n'est acceptable que si la mesure x est intérieure à l'intervalle de tolérance (T_i, T_s)), la condition d'acceptation s'exprime formellement de la même manière :

$$T_i + K'\sigma \leqslant \overline{x} \leqslant T_s - K'\sigma \qquad \text{(4-a)}$$

Mais il y a deux différences essentielles : 1) l'écart-type σ doit être inférieur à l'écart-type σ_L défini par les relations (2-a) et (2-b) en fonction de la qualité limite acceptable p_o.

2) K' (comme on le verra plus loin) n'est pas une constante mais une fonction de σ.

En prenant T_i comme origine et l'intervalle de tolérance $T_s - T_i$ comme unité, la condition d'acceptation s'écrit :

$$K'\sigma' \leqslant \overline{x}' \leqslant 1 - K'\sigma' \qquad \begin{cases} \sigma' = \dfrac{\sigma}{T_s - T_i} \\ \overline{x}' = \dfrac{\overline{x} - T_i}{T_s - T_i} \end{cases} \qquad \text{(4-b)}$$

Les figures 5 montrent la correspondance entre la distribution des valeurs x pour une moyenne $\mu > \dfrac{T_i + T_s}{2}$ entraînant les proportions de défectueux p_i en deçà de T_i, p_s au delà de T_s, et la distribution des moyennes $\overline{x}$ pour laquelle la probabilité d'acceptation est P selon la condition (4-a).

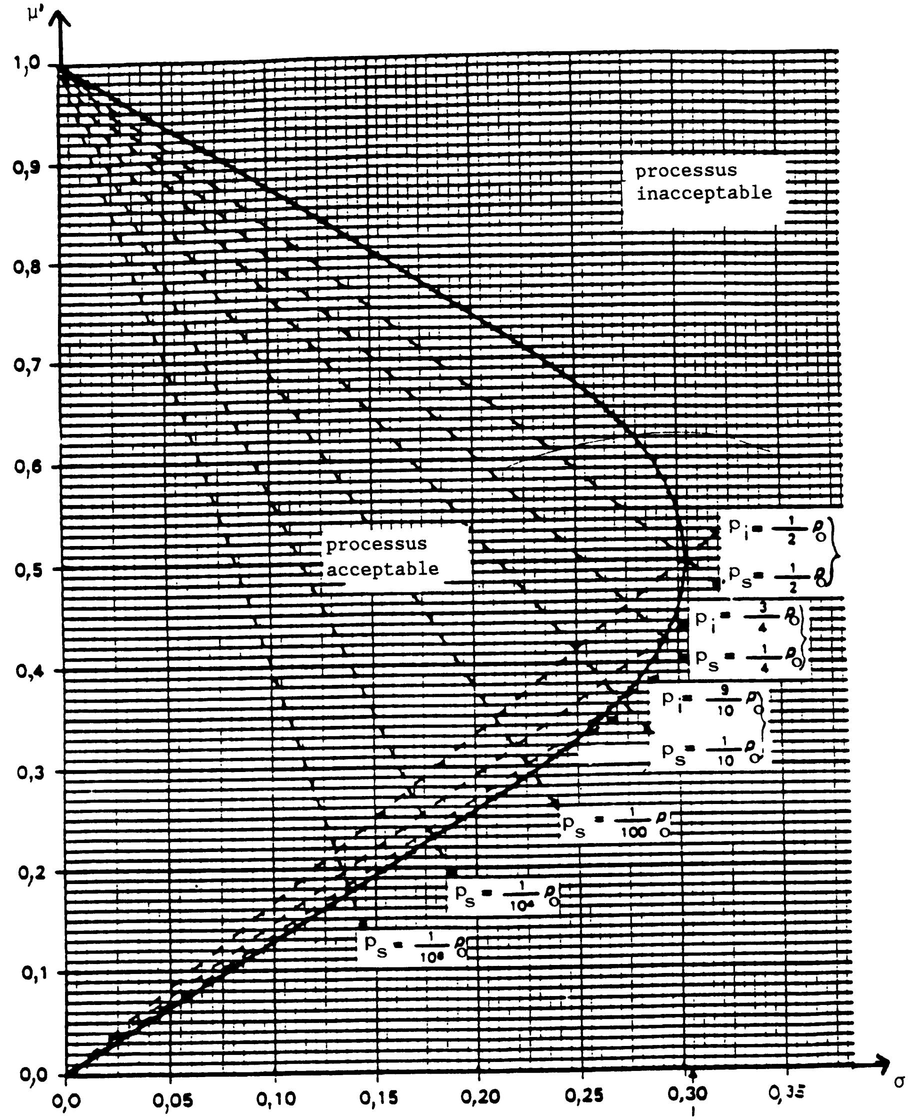


FIGURE 4
(Adapté de ISO 3951)

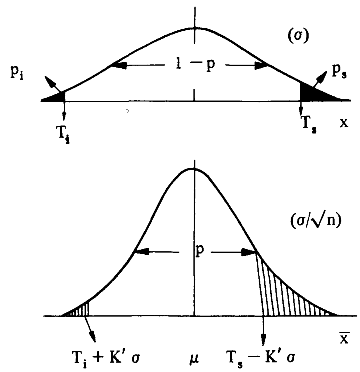


FIGURE 5

$$\rightarrow \quad p = p_i + p_s$$

$$\mu = T_i + \sigma u_{1-p_i}$$

$$u_{1-p_s} = \frac{T_s - \mu}{\sigma} = \frac{T_s - T_i}{\sigma} - u_{1-p_i} \qquad (5)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\sigma}{T_s - T_i} = \sigma' = \frac{1}{u_{1-p_i} + u_{1-p_s}} \qquad (6)$$

$$\rightarrow P = F\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(T_s - K'\sigma - \mu)\right] - F\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(T_i + K'\sigma - \mu)\right]$$

Relation qui s'écrit, compte-tenu de (5) :

$$P = F[\sqrt{n}\,(u_{1-p_i} - K')] + F[\sqrt{n}\,(u_{1-p_s} - K')] - 1 \qquad (7)$$

On suppose fixé l'effectif d'échantillon n. Si, pour la valeur maximale admissible p_o on se donne la probabilité d'acceptation P_o (risque du fournisseur $\alpha = 1 - P_o$), la relation (7) permet de calculer K' pour toute partition de p_o en p_i et p_s, donc pour toute valeur de σ' selon la relation (6); connaissant à la fois les valeurs K' et σ', on obtient l'intervalle d'acceptation (fonction de σ') sous la forme écrite précédemment (relation 4-b)

$$K'\sigma' \leqslant \overline{x}' \leqslant 1 - K'\sigma'$$

La méthode graphique consiste à placer dans un système d'axes le point de coordonnées $(\sigma', \overline{x}')$ et à prononcer l'acceptation ou le rejet selon qu'il se trouve ou non à l'intérieur de la « région d'acceptation » dont la forme est représentée sur la figure 6. La courbe limitant la région d'acceptation sera désignée dans ce qui suit par « courbe d'acceptation ». Au début de son contour (petites valeurs de σ') cette courbe est pratiquement limitée par deux droites qui sont celles qui correspondent

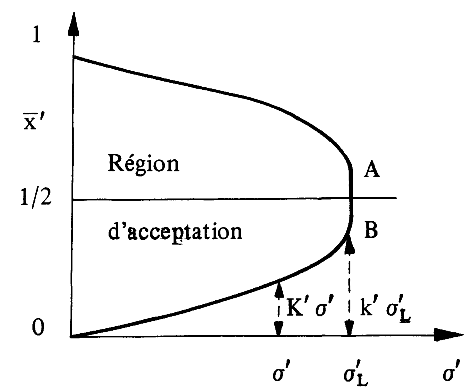


FIGURE 6

à une seule limite de tolérance (T_i et T_s); elle s'incurve ensuite pour aboutir à la verticale d'abscisse σ'_L. Les valeurs de $K'\sigma'$ peuvent être lues directement sur le graphique, conformément à l'indication portée sur la figure 6.

Un premier exemple

Dans la collection des plans ISO 3951, le plan de lettre-code K et NQA = 10 a pour effectif d'échantillon n = 33. On peut vérifier que pour $p_o = 0{,}10$ (NQA/100), $P_o = 0{,}95$ et une seule limite de tolérance, on a $K = 0{,}995$ (formule (1), et Section A in fine).

Pour les mêmes conditions $n = 33$, ($p_o = 0{,}10$, $P_o = 0{,}95$), et pour toute partition de p_o en p_i et p_s, la formule (6) permet d'obtenir σ'; la formule (7), avec $P = P_o = 0{,}95$, donne la valeur de K', d'où finalement $K'\sigma'$. On peut ainsi tracer point par point la courbe d'acceptation.

Pour $p_i = p_s = 0{,}05$, la formule (6) donne $\sigma' = \sigma'_L = 0{,}304$. La formule (7) s'écrit ($\sqrt{n} = \sqrt{33} = 5{,}7446$) :

$$2\,F\,[5{,}7446\,(1{,}6449 - K'_L)] = 1{,}95$$

d'où l'on tire aisément $K'_L = 1{,}304$

$$K'_L\,\sigma'_L = 0{,}304 \times 1{,}304 = 0{,}396$$

qui est l'ordonnée du point A de la Figure (6), le point B ayant pour ordonnée $1 - 0{,}396 = 0{,}604$.

Pour les autres partitions de $p_o = 0{,}10$ en p_i et p_s, on obtient encore la valeur de σ' par la formule (5), et K' (d'où finalement $K'\sigma'$) par la formule (7).

$$F\,[5{,}7446\,(u_{1-p_i} - K')] + F\,[5{,}7446\,(u_{1-p_s} - K')] = 1{,}95$$

Pour les petites valeurs de p_i, mais seulement pour celles-ci, le 1^er^ terme du 1^er^ membre est pratiquement égal à 1 (seule la limite T_s intervient) et toutes réductions faites, on a :

$$K' = u_{1-p_s} - 0{,}286$$

Le tableau I ci-après donne le détail des calculs pour différentes partitions de $p_o = 0{,}10$ en p_i et p_s.

TABLEAU I

$p_o = 0{,}10$; $P_o = 0{,}95$ (lettre code K, NQA = 10)

p_i	p_s	u_{1-p_i}	u_{1-p_s}	σ'	K'	$K'\sigma'$
0	0,100	∞	1,2816	0	0,995	0
0,001	0,099	3,0902	1,2873	0,228	1,001	0,228
0,005	0,095	2,5758	1,3106	0,257	1,025	0,263
0,01	0,090	2,3263	1,3408	0,273	1,055	0,288
0,02	0,08	2,0537	1,4051	0,289	1,119	0,323
0,03	0,07	1,8808	1,4758	0,298	1,190	0,355
0,04	0,06	1,7507	1,5548	0,303	1,264	0,382
0,05	0,05	1,6449	1,6449	0,304	1,304	0,396
				$\downarrow$ σ'_L	$\downarrow$ K'_L	$\downarrow$ $K'_L\,\sigma'_L$

A partir de ces résultats, la courbe $\overline{x}' = f(\sigma')$ a été tracée en pointillés sur le réseau de courbes figurant dans le projet ISO 3951 (page 12, Figure 7 pour NQA = 10). Sur la plus grande partie de son parcours (quasi rectiligne) la ligne en pointillés suit fidèlement la ligne continue de ISO 3951, mais elle s'incurve ensuite beaucoup plus et se raccorde moins brutalement à la partie verticale; celle-ci va de $\overline{x}' = 0{,}4$ à $\overline{x}' = 0{,}6$, au lieu de $\overline{x}' = 0{,}32$ à $\overline{x}' = 0{,}68$ [3].

D'autres exemples

Ils concernent les NQA (de 0,40 à 10 : p_o de 0,04 à 0,10) de la lettre-code K, qui présente l'avantage qu'on a toujours P (NQA) = 0,95 ou très voisin de 0,95. On s'est borné à calculer l'ordonnée $K'_L \sigma'_L$ du point de départ de la partie verticale des courbes d'acceptation.

La valeur de σ'_L est $\dfrac{1}{2\,u_{1-\frac{p_o}{2}}} = \dfrac{1}{2\,u_{1-\frac{NQA}{200}}}$

La valeur correspondante de K′ (K'_L) est donnée par :

$$2\,F\,[\sqrt{n}\,(u_{1-\frac{p_o}{2}} - K'_L) = 1{,}95$$

d'où l'on tire $\sqrt{n}\,(u_{1-\frac{p_o}{2}} - K'_L) = 1{,}96$

Comme d'autre part $\sigma'_L = \dfrac{1}{2\,u_{1-\frac{p_o}{2}}}$, on obtient

$$K'_L = \frac{1}{2\,\sigma'_L} - \frac{1{,}96}{\sqrt{n}} \qquad K'_L\,\sigma'_L = \frac{1}{2} - \frac{1{,}96\,\sigma'_L}{\sqrt{n}} \qquad (8)$$

Les valeurs de n sont celles qui sont données dans ISO 3951 en fonction du NQA (elles s'appliquent indifféremment à une seule ou deux limites).

On obtient les résultats figurant dans le tableau II ci-après.

TABLEAU II
Lettre-code K — Tous NQA

NQA (en %)	0,40	0,65	1,00	1,50	2,50	4,00	6,50	10,0
n	14	16	17	22	25	29	29	33
σ'_L	0,174	0,184	0,194	0,206	0,223	0,243	0,271	0,304
$K'_L\,\sigma'_L$	0,409	0,410	0,408	0,414	0,413	0,411	0,401	0,396

N.B. : La dernière décimale de $K'_L\,\sigma'_L$ n'est pas garantie.

Toutes les valeurs $K'_L\,\sigma'_L$ sont très voisines, et toutes sont supérieures à celles que l'on peut lire sur le réseau des « courbes K » de ISO 3951. Sur la figure 7, on

(3) Pour le tracé de la courbe d'acceptation, et notamment sur la façon dont la courbe se raccorde à la verticale d'abcisse σ_L, voir Note Annexe.

$$\left(\overline{x'} = \frac{\overline{x} - T_i}{T_s - T_i}\right)$$

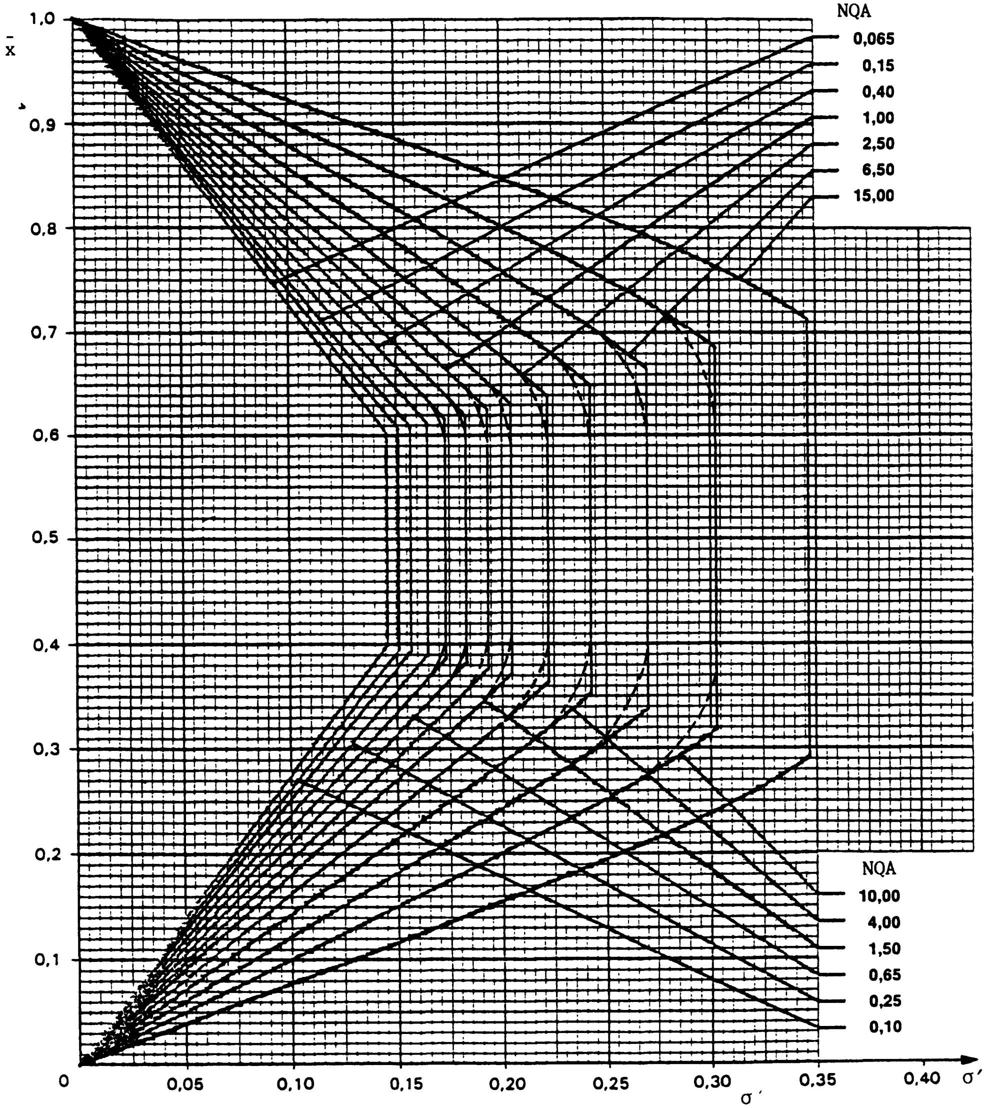


FIGURE 7
PLANS de LETTRE-CODE K

a tracé « au jugé », en pointillés les parties de courbes qui diffèrent des parties correspondantes dans la norme ISO. On constate encore que, dans ces dernières, le raccord avec la partie verticale est plus brutal.

Derniers exemples

Pour les lettres-code autres que la lettre K, les choses sont moins simples. En effet la probabilité d'acceptation P_o pour p_o = NQA (plus correctement $\frac{NQA}{100}$) varie d'une lettre-code à une autre et sa valeur n'est pas donnée dans la norme ISO. On peut cependant la calculer avec une approximation suffisante à partir des données (n, k) qui s'appliquent à une limite unique, au moyen de la formule (1) de la section A. On obtient ensuite $K'_L \sigma'_L$ au moyen de la formule suivante, généralisation de la formule (8).

$$K'_L \sigma'_L = \frac{1}{2} - \frac{\sigma'_L}{\sqrt{n}} F^{-1} \left[\frac{1 + P(NQA)}{2}\right] \tag{9}$$

Nous avons choisi les lettres codes E (effectifs d'échantillon n faibles) et P (effectifs élevés). Les résultats obtenus pour la lettre P figurent dans le Tableau ci-après.

TABLEAU III
Lettre code P — Tous NQA

NQA (en %)	0,40	0,65	1,00	1,50	2,50	4,00	6,50	10,0
σ'_L	0,174	0,184	0,194	0,202	0,223	0,244	0,271	0,304
n	54	59	65	71	81	93	109	127
K	2,34	2,18	2,04	1,89	1,75	1,51	1,29	1,07
P (NQA)	0,989	0,982	0,990	0,991	0,990	0,987	0,990	0,991
$F^{-1}\left[\frac{1 + P(NQA)}{2}\right]$	2,576	2,576	2,576	2,576	2,576	2,576	2,576	2,576
$K'_L \sigma'_L$	0,439	0,438	0,438	0,437	0,436	0,438	0,431	0,431

Ces résultats (valeurs de $K'_L \sigma'_L$) ont permis de tracer en pointillés les courbes d'acceptation (Fig. 8). On fait la même constatation que dans les exemples précédents. Elle est aussi la même pour la lettre-code E (les résultats ne sont pas donnés dans cette note).

C. Deux limites combinées — Courbes d'efficacité

Pour un effectif d'échantillon donné et une proportion de défectueux p quelconque décomposée en p_i et p_s, ce qui détermine σ' selon la relation (6), puis K' selon la courbe d'acceptation, la probabilité d'acceptation (courbe d'efficacité) est donnée par la relation (7).

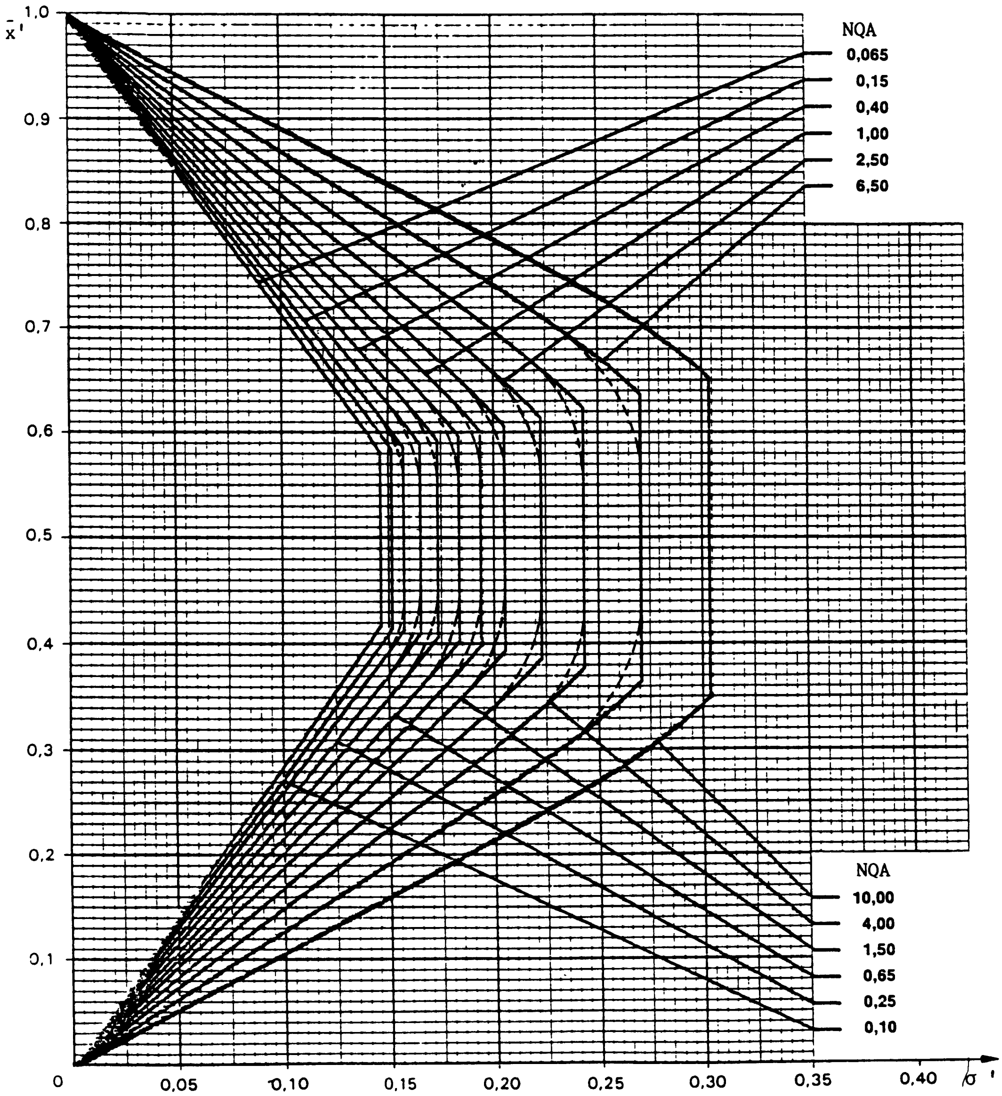


FIGURE 8
PLANS DE LETTRE-CODE P

$$P = F[\sqrt{n}(u_{1-p_i} - K')] + F[\sqrt{n}(u_{1-p_s} - K')] - 1 \qquad (7)$$

Il n'y a donc pas une courbe d'efficacité, mais une infinité comprise entre deux courbes extrêmes :

— celle qui correspond à l'une des proportions (p_i ou p_s) nulle : c'est la courbe d'efficacité d'un plan à une seule limite de tolérance définie par les conditions (n, p_o, P_o), l'équation (7) devenant l'équation (1) de la section A.

Ce cas extrême n'a d'intérêt qu'à titre de référence. Il correspondrait selon la relation (6) à l'une des limites (T_i ou T_s) rejetée à l'infini.

— celle qui correspond à $p_i = p_s = \frac{p_o}{2}$, c'est-à-dire à $\sigma' = \sigma'_L$.

La première courbe est facile à tracer; elle est donnée dans ISO 3951 pour les différentes combinaisons (lettre-code, NQA) (4).

La seconde (équation 7) avec $p_i = p_s =$ l'est beaucoup moins. Nous en avons calculé quelques points pour les lettres-code K et P associées à NQA = 1% ($p_o = 0{,}01$) et NQA = 10 % ($p_o = 0{,}10$), en prenant pour $K'_L \sigma'_L$ (d'où l'on déduit K'_L) les valeurs obtenues dans la section B2, Tableaux II et III.

Lettre K	NQA = 1	$n = 17$	$\sigma'_L = 0{,}194$	$K'_L \sigma'_L = 0{,}408 \rightarrow K'_L = 2{,}103$
"	NQA = 10	$n = 33$	$\sigma'_L = 0{,}304$	$K'_L \sigma'_L = 0{,}396 \rightarrow K'_L = 1{,}303$
Lettre P	NQA = 1	$n = 65$	$\sigma'_L = 0{,}194$	$K'_L \sigma'_L = 0{,}438 \rightarrow K'_L = 2{,}258$
"	NQA = 10	$n = 127$	$\sigma'_L = 0{,}304$	$K'_L \sigma'_L = 0{,}431 \rightarrow K'_L = 1{,}418$

Les équations des courbes d'efficacité sont :

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Lettre K, NQA} = 1 & (n = 17) & P = F[4{,}123\, u_{1-p_i} - 8{,}671] \\
 & & \quad + F[4{,}123\, u_{1-p_s} - 8{,}671] - 1 \\
\text{Lettre K, NQA} = 10 & (n = 33) & P = F[5{,}745\, u_{1-p_i} - 7{,}486] \\
 & & \quad + F[5{,}745\, u_{1-p_s} - 7{,}486] - 1 \\
\text{Lettre P, NQA} = 1 & (n = 65) & P = F[8{,}062\, u_{1-p_i} - 18{,}204] \\
 & & \quad + F[8{,}062\, u_{1-p_s} - 18{,}204] - 1 \\
\text{Lettre P, NQA} = 10 & (n = 127) & P = F[11{,}269\, u_{1-p_i} - 15{,}980] \\
 & & \quad + F[11{,}269\, u_{1-p_s} - 15{,}980] - 1
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{avec} \\ p_i + p_s = p\end{array}$$

On s'est donné plusieurs valeurs de p_i ; on a calculé p_s par la relation (6) avec $\sigma' = \sigma'_L$, et on en a déduit P par les équations précédentes.

Les résultats obtenus sont donnés dans le Tableau IV (5).

(4) Les courbes d'efficacité de ISO 3951 ont été calculées pour le cas où σ est inconnu (estimé par s); elles sont très voisines des courbes « σ connu » pour les mêmes combinaisons (lettre-code, NQA).

(5) Sans doute serait-il plus logique de se donner des valeurs de p, en déduire p_i (puis $p_s = p - p_i$) par les relations :

$$u_{1-p_i} + u_{1-p+p_i} = \frac{1}{\sigma'_L}$$

$$p_i = F\left[u_{1-p+p_i} - \frac{1}{\sigma'_L}\right] \qquad (10)$$

Mais la recherche de la solution en p_i de l'équation (10) n'est pas aisée.

TABLEAU IV

Courbes d'efficacité limites ($\sigma' = \sigma'_L$)

Lettre K NQA = 1			
p_i	p_s	p %	P %
0,005	0,0050	1,—	95
0,010	0,0023	1,23	82
0,020	0,0010	2,10	42
0,030	0,0005	3,05	18
0,040	—	4,—	7,4
0,050	—	5,—	2,9
0,060	—	6,—	1,2

Lettre K NQA = 10			
p_i	p_s	p %	P %
0,05	0,050	10,—	95
0,07	0,035	10,5	84
0,08	0,030	11,—	72
0,10	0,022	12,2	45
0,12	0,017	13,7	23
0,14	0,014	15,4	10
0,16	0,011	17,1	3,8
0,18	0,009	18,2	1,3

Lettre P NQA = 1			
p_i	p_s	p %	P %
0,005	0,0050	1,—	99
0,007	0,0035	1,05	94
0,008	0,0030	1,10	88
0,010	0,0023	1,23	70
0,012	0,0019	1,39	49
0,014	0,0015	1,55	31
0,016	0,0010	1,70	18
0,020	0,0010	2,10	5
0,024	0,0010	2,50	1

Lettre P NQA = 10			
p_i	p_s	p %	P %
0,05	0,050	10,—	99
0,07	0,034	10,4	76
0,08	0,030	11,—	44
0,09	0,025	11,5	19
0,10	0,022	12,2	6,3
0,11	0,019	12,9	1,7
0,12	0,017	13,7	0,3

Les « points calculés » (p %, P %) permettent de tracer avec une bonne approximation les quatre courbes d'efficacité (Fig. 9 à 12). Sur les mêmes figures on a tracé les courbes d'efficacité pour une seule limite de tolérance.

On constate que la courbe extrême ($\sigma = \sigma_L$) est très différente de la courbe extrême (une seule limite de tolérance); elle est beaucoup plus abrupte. Comme nous l'avons écrit au début de cette section, et contrairement à ce qui se passe dans le cas d'une seule limite, il n'y a pas « une » courbe d'efficacité, mais, suivant la valeur de σ, une infinité de courbes comprises entre les deux courbes extrêmes.

Cette constatation est certes gênante, mais ce n'est qu'en apparence qu'elle est paradoxale. Lorsque l'écart-type est très inférieur à σ_L, la moyenne μ du lot peut s'écarter largement du milieu de l'intervalle de tolérance sans que pour autant le lot soit inacceptable; lors du contrôle sur échantillon le rejet ne peut pratiquement résulter que du dépassement d'une seule des deux limites : on se trouve dans la partie de la région d'acceptation limitée par des courbes assimilables à des droites et la courbe d'efficacité est celle qui s'applique à une seule limite. A l'opposé, lorsque σ devient voisin de la limite σ_L, un léger écart de μ par rapport au milieu de l'intervalle de tolérance est susceptible d'entraîner le rejet : on se trouve dans la partie incurvée de la courbe d'acceptation, à laquelle correspond une courbe d'efficacité plus abrupte.

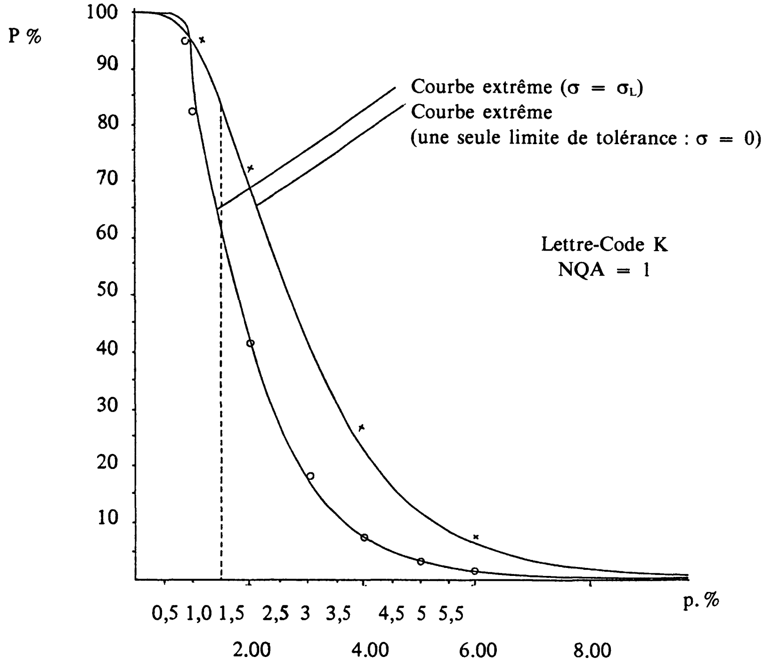


FIGURE 9

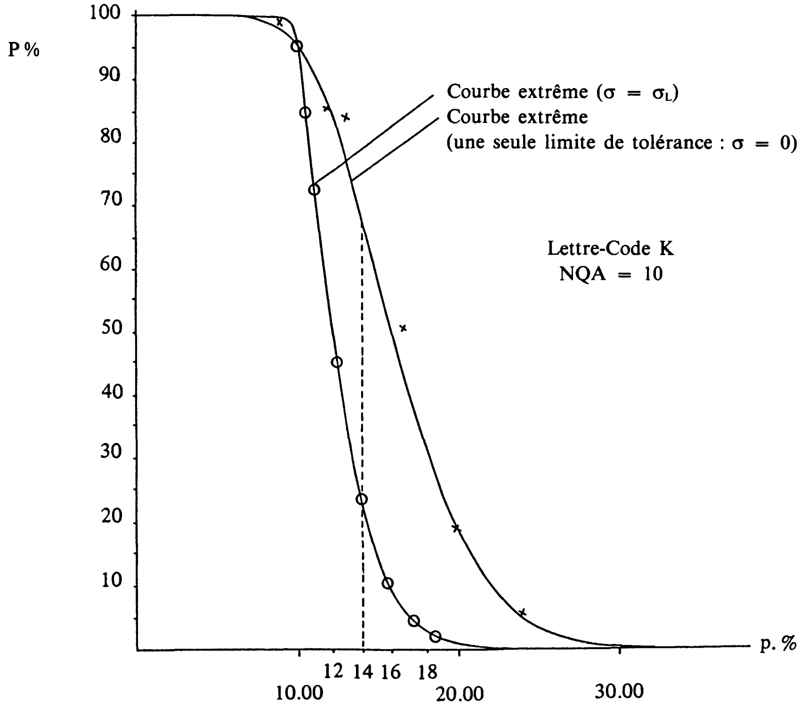


FIGURE 10

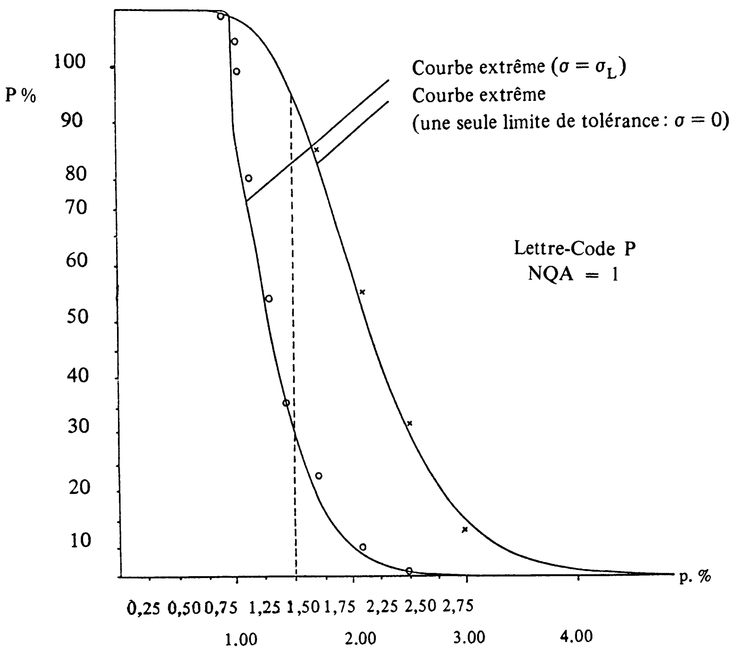


FIGURE 11

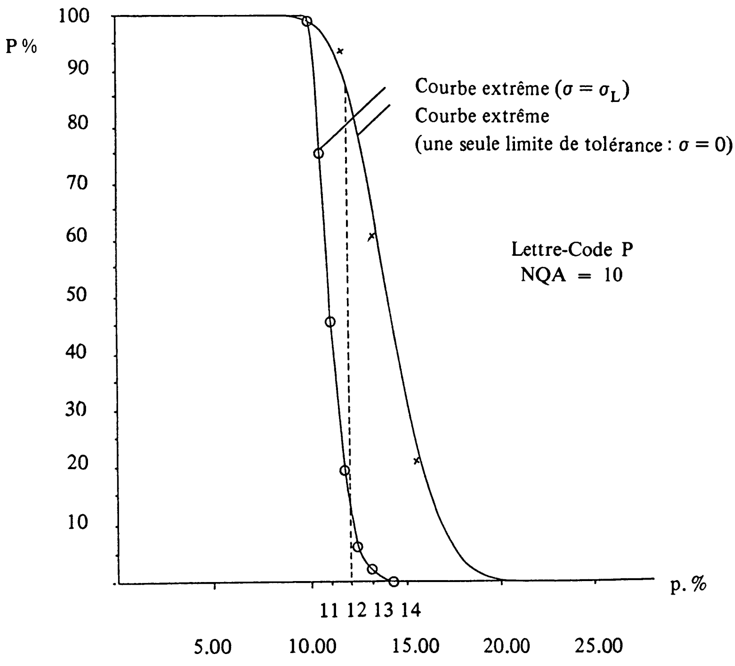


FIGURE 12

D. Discussion des résultats

Au cours de cette étude nous avons trouvé deux résultats qui diffèrent de ceux qui figurent (ou sont annoncés) dans la norme ISO 3951.

— Au voisinage de la valeur maximale σ_L, nous obtenons, pour la courbe d'acceptation, un tracé plus infléchi,

— Pour les valeurs de σ suffisamment éloignées de σ_L (qui correspondent à un tracé quasi-linéaire de la courbe d'acceptation) nous trouvons une courbe d'efficacité pratiquement identique à celle qui s'applique à une seule limite de tolérance; pour les valeurs de σ proches de σ_L la courbe d'efficacité devient plus abrupte, elle est nettement plus abrupte pour $\sigma = \sigma_L$. Cette distorsion de plus en plus forte correspond à la courbure plus accentuée de la courbe d'acceptation. Il n'y a pas « une » courbe d'efficacité, mais une « famille » de courbes d'efficacité. Or dans la clause 7.2 « Operating characteristic curves » du projet ISO 3951, on a ajouté le texte suivant qui ne figurait pas dans l'édition précédente de ce document : « These curves are for normal inspection with the « s » method with a single specification limit, but they provide a good approximation to the case of a combined double limit » (on doit sans doute comprendre que « combined double limit » s'applique à la fois à la « méthode s » (σ inconnu) et à la « méthode σ » (σ connu). Cette affirmation est parfaitement exacte.

Sur les quatre exemples de la section C nous avons en effet vérifié que si l'on adopte le tracé de la courbe d'acceptation donnée dans ISO 3951, les intervalles d'acceptation plus larges au voisinage de σ_L' conduisent à des courbes d'efficacité voisines de celles du plan à une seule limite de tolérance (courbes à droite sur les figures 9 à 12).

Les deux divergences constatées sont donc liées; elles peuvent être résumées comme il est indiqué sur la figure 13.

La position adoptée par les auteurs de ISO 3951 (tracé (B)) est certes très défendable, bien que nous ignorions sur quelles considérations, théoriques ou pragmatiques, elle repose. La solution (C) présente l'avantage d'une grande simplicité; elle évite l'incertitude qui se présente lorsque le point $(\sigma, \overline{x})$ se trouve au voisinage de la courbe limitant la région d'acceptation. Quant à la solution (A), elle a le mérite de donner au NQA — base de la norme ISO 3951 — la même propriété qu'il s'agisse d'une limite ou de deux limites combinées, mais elle conduit, lorsque σ est voisin de σ_L, à des courbes d'efficacité qui dépendent très largement de la valeur σ. Cette propriété, à première vue regrettable, n'est-elle pas en réalité tout à fait naturelle ? S'il est interdit à priori que σ dépasse σ_L pour que les lots courent leur chance d'être acceptés, n'est-il pas normal que cette chance décroisse fortement (courbe d'efficacité abrupte) lorsque σ devient voisin de σ_L ?

Le débat reste ouvert..

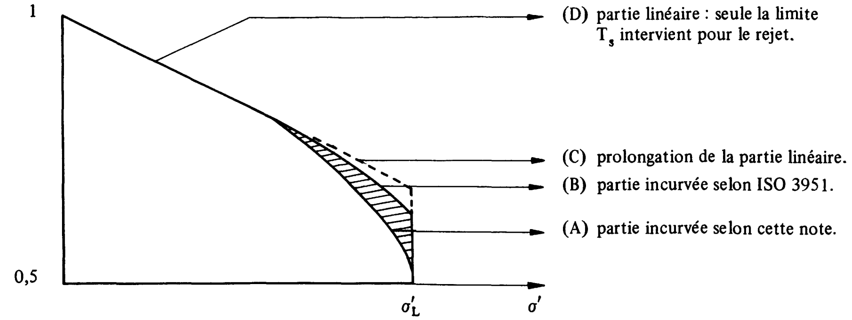


FIGURE 13

Courbe d'acceptation (partie supérieure)

(A) — Respecte rigoureusement la condition imposée pour le plan à une seule limite de tolérance = même probabilité d'acceptation P_o pour $p = p_o = NQA/100$;

— conduit pour σ voisin de σ_L à une « famille de courbes d'efficacité ».

(B) — Ne respecte pas la condition (p_o, P_o); est plus « tolérant » que (A) en ce sens qu'on peut être conduit à accepter ce que (A) rejeterait (zone hachurée);

— conduit, quel que soit σ, à des courbes d'efficacité voisines de celle d'un plan à limite de tolérance unique.

(C) — (prolongation de la partie linéaire). Conduit à une règle d'acceptation encore plus tolérante; K' devient indépendant de σ et se confond avec la constante d'acceptation du plan à limite de tolérance unique;

— rend inutile le tracé des courbes d'acceptation qui deviennent des trapèzes;

— conduit pour $\sigma = \sigma_L$ (nous l'avons vérifié) à une courbe d'efficacité voisine de celle du plan à limite unique, mais légèrement décalée vers la droite.

Annexe
sur le tracé de la courbe d'acceptation

Dans la section B2, on a montré sur un exemple (« UN PREMIER EXEMPLE ») comment on peut tracer point par point la courbe d'acceptation à partir des données n (effectif d'échantillon) et couple p_o, P_o (point de la courbe d'efficacité). Il est utile de préciser le tracé par la valeur de la pente en ses différents points, et en particulier au point de rencontre de la courbe avec la verticale d'abscisse σ'_L.

L'abscisse et l'ordonnée d'un point de la courbe étant σ' et $K'\sigma'$, la pente est donnée par :

$$\frac{d\,(K'\sigma')}{d\sigma'} = K' + \sigma' \frac{dK'}{d\sigma'} \tag{A-1}$$

Pour $\sigma' = 0$, la pente K' est celle qui correspond à une seule limite de tolérance (selon la relation $\sigma' = \dfrac{\sigma}{T_s - T_i}$, $\sigma' = 0$ entraîne que l'une des deux limites, T_s ou T_i, est rejetée à l'infini. Pour $0 < \sigma' < \sigma'_L$ on doit calculer $\dfrac{dK'}{d\sigma'}$.

Pour simplifier l'écriture, les formules utilisant les fractiles u_{1-p} seront écrites en fonction de $u_p = -u_{1-p}$. Compte tenu de $F(u_p) = p$ et de $dF(u) = f(u)\,du$, la relation $p_i + p_s = p$, écrite sous la forme $F(u_{pi}) + F(u_{ps}) = p$, donne par dérivation :

$$f(u_{pi})\, du_{pi} + f(u_{ps})\, du_{ps} = 0 \tag{A-2}$$

Comme $u_{pi} + u_{ps} = 1/\sigma'$ (relation (6)) on a d'autre part :

$$du_{pi} + du_{ps} = \frac{d\sigma'}{\sigma'^2} \tag{A-3}$$

Les deux équations précédentes, résolues en du_{pi} et du_{ps}, donnent

$$\begin{aligned} du_{pi} &= -\frac{f(u_{ps})}{f(u_{pi}) - f(u_{ps})} \quad \frac{d\sigma'}{\sigma'^2} \\ du_{ps} &= -\frac{f(u_{pi})}{f(u_{pi}) - f(u_{ps})} \quad \frac{d\sigma'}{\sigma'^2} \end{aligned} \tag{A-4}$$

La relation (7) écrite sous la forme :

$$F[\sqrt{n}(u_{pi} + K')] + F[\sqrt{n}(u_{ps} + K')] = 1 - P \tag{A-5}$$

donne par dérivation :

$$\{f[\sqrt{n}(u_{pi} + K')] + f[\sqrt{n}(u_{ps} + K')]\}\, dK' + f[\sqrt{n}(u_{pi} + K')]\, du_{pi} + f[\sqrt{n}(u_{ps} + K')]\, du_{ps} = 0$$

En remplaçant dans cette relation du_{pi} et du_{ps} par leurs expressions tirées de (A-3) et toutes réductions faites, on trouve :

$$\frac{dK'}{d\sigma'} = \frac{1}{\sigma'^2} \frac{f(u_{pi}) \cdot f[\sqrt{n}(u_{ps} + K')] - f(u_{ps})\, f[\sqrt{n}(u_{pi} + K')]}{[f(u_{ps}) - f(u_{pi})]\, f[\sqrt{n}(u_{pi} + K')] + f[\sqrt{n}(u_{ps} + K')]} \tag{A-6}$$

Pour tout couple (p_i, p_s) tel que $p_i + p_s = p$, d'où résulte σ' selon $\sigma' = -\dfrac{1}{u_{pi} + u_{ps}}$ et K' selon la relation (A 4), la formule (A-6) permet de calculer $\dfrac{dK'}{d\sigma'}$, puis la pente de la courbe d'acceptation au point $(\sigma', K'\sigma')$ par la relation (A-1).

Toutefois, pour $p_i = p_s = p/2$ (correspondant à $\sigma' = \sigma'_L$), $\dfrac{dK'}{d\sigma'}$ prend la forme indéterminée 0/0.

Compte-tenu de la relation $u_{pi} + u_{ps} = -1/\sigma'$, on pose, pour p_i et p_s voisins de $p/2$, où $\sigma' = \sigma'_L$:

$$u_{pi} = -\frac{1}{2\sigma'_L} - \varepsilon \qquad u_{ps} = -\frac{1}{2\sigma'_L} + \varepsilon \tag{A-7}$$

$\dfrac{dK'}{d\sigma'}$, (formule A-6) devient fonction de ε, et l'on calcule, pour $\varepsilon \to 0$ le rapport entre la dérivée en ε du numérateur et la dérivée du dénominateur. Numérateur et dénominateur sont fonctions de $f(u_p)$ et $f[\sqrt{n}(u_p + K')]$ avec $p = p_i$ et $p = p_s$.

Compte-tenu de $\dfrac{d}{du} f(u) = -u f(u)$, on obtient :

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(u_{p_i}) = \frac{d}{d\varepsilon} f\left(-\frac{1}{2\sigma'_L} - \varepsilon\right) \to -\frac{1}{2\sigma'_L} f\left(-\frac{1}{2\sigma'_L}\right) = -\frac{1}{2\sigma'_L} f\left(\frac{1}{2\sigma'_L}\right)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(u_{p_s}) = \frac{d}{d\varepsilon} f\left(-\frac{1}{2\sigma'_L} + \varepsilon\right) \to +\frac{1}{2\sigma'_L} f\left(-\frac{1}{2\sigma'_L}\right) = +\frac{1}{2\sigma'_L} f\left(\frac{1}{2\sigma'_L}\right)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} f[\sqrt{n}(u_{p_i} + K')] = \frac{d}{d\varepsilon} f\left\{\sqrt{n}\left(-\frac{1}{2\sigma'_L} - \varepsilon + K'\right)\right\}$$

$$\to -n\left(\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right)\left(I - \frac{dK'}{d\varepsilon}\right) f\left[\sqrt{n}\left(\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right)\right]$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} f[\sqrt{n}(u_{p_s} + K')] = \frac{d}{d\varepsilon} f\left\{\sqrt{n}\left(-\frac{1}{2\sigma'_L} + \varepsilon + K'\right)\right\}$$

$$\to n\left(\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right)\left(I + \frac{dK'}{d\varepsilon}\right) f\left(\sqrt{n}\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right)$$

La dérivée du numérateur de $\frac{dK'}{d\sigma'}$ tend, toutes réductions faites, vers :

$$2\left[n\left(\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right)\right] - \frac{1}{2\sigma'_L}\Big] f\left(\frac{1}{2\sigma'_L}\right) f\left[\sqrt{n}\left(\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right)\right]$$

et la dérivée du dénominateur vers :

$$2\sigma'_L f\left(\frac{1}{2\sigma'_L}\right) f\left[\sqrt{n}\left(\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right)\right]$$

Le rapport des dérivés tend vers :

$$\frac{dK'}{d\sigma'} = \frac{1}{\sigma'_L}\left[n\left(\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right) - \frac{1}{2\sigma'_L}\right]$$

D'où (formule A-1)

$$\lim\left[\frac{d}{d\sigma'}(K'\sigma')\right] = K'_L + \sigma'_L\frac{dK'}{d\sigma'} = (n-1)\left[\frac{1}{2\sigma'_L} - K'_L\right] \qquad \text{(A-8)}$$

qu'on peut encore écrire $(n - 1)\,[u_{1-p_o/2} - K'_L]$.

Applications à l'exemple 1 (voir tableau I)
$n = 33$, $p_o = 0{,}10$ (avec $P_o = 0{,}95$)

p_i	p_s	σ'	K'	$K'\sigma'$	$\frac{d}{d\sigma'}(K'\sigma')$	
0	0,100	0	0,995	0	0,995	
0,001	0,099	0,228	1,001	0,228	1,09	formule A-6
0,005	0,095	0,257	1,025	0,263	1,39	
0,010	0,090	0,273	1,055	0,288	1,77	
0,020	0,080	0,289	1,119	0,323	2,79	
0,030	0,070	0,298	1,190	0,355	4,62	
0,040	0,060	0,303	1,264	0,382	8,31	
0,050	0,050	0,304	1,304	0,396	10,91	→ formule A-8
		↓ σ'_L	↓ K'_L	↓ $K'_L\sigma'_L$		

On voit qu'au point $\sigma' = \sigma'_L$ la partie incurvée de la courbe d'acceptation ne se raccorde pas tangentiellement à la partie verticale de cette courbe, mais selon un angle de tangente 10,91 — tangente donnée par la formule (A-8) dans le cas général.