REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. FLESSELLES

Compléments pratiques pour la détermination des éléments d'un plan de contrôle par la méthode d'Enkawa

Revue de statistique appliquée, tome 33, nº 4 (1985), p. 5-13
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1985__33_4_5_0>

COMPLÉMENTS PRATIQUES POUR LA DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS D'UN PLAN DE CONTRÔLE PAR LA MÉTHODE D'ENKAWA

J. FLESSELLES

Ingénieur en Chef à la SEITA

1. POSITION DU PROBLÈME

Dans un article publié récemment par La Revue de Statistique Appliquée [1], Monsieur André VESSEREAU expose en détail la méthode proposée par le Professeur Takao ENKAWA [2] pour construire un plan de contrôle par variable, lorsque le caractère mesuré est d'écart-type inconnu.

Une solution élégante à ce problème consiste à déterminer par approximations successives la valeur de l'effectif de l'échantillon à retenir, puis à en déduire par un calcul simple la constante d'acceptation K du plan à construire. Nous désignerons dans la suite de cet exposé, cette technique d'élaboration par « itération d'ENKAWA ».

Nous renvoyons le lecteur à l'article mentionné ci-dessus et nous adoptons les mêmes notations que celui-ci en les complétant lorsqu'il y aura lieu.

2. OBJET DU PRÉSENT ARTICLE

L'exposé qui suit montre :

• d'une part que *l'on peut s'affranchir du calcul itératif*, objet de la méthode ci-dessus et déterminer directement par une formule simple l'effectif final de l'échantillon à retenir, d'où l'on déduit immédiatement la constante d'acceptation K finale du plan; et que l'itération d'ENKAWA est convergente, ce qui justifie l'adoption de la formule proposée.

• d'autre part que cette formule présentable sous forme d'une relation à trois variables (effectif de départ, constante d'acceptation initiale, effectif à retenir) *est justiciable d'un abaque à points alignés* à deux supports parallèles et un troisième support curviligne.

Cet abaque est lui-même présenté *in fine* sous une forme directement utilisable par le lecteur, et quelques indications sont données, à titre complémentaire, sur sa construction.

Mots-clés : **Contrôle de qualité, Plans de contrôle, Contrôle par mesure du % de défectueux, Abaque, Ecart-type inconnu.**

3. NOTATIONS

n : valeur de départ de l'effectif de l'échantillon (non arrondie)

K : valeur de départ de la constante d'acceptation du plan (σ inconnu) défini par (α = 0,05; p_{95}) (β = 0,10 , p_{10}).

[Les formules permettant le calcul de n et K, valeurs de départ sont données dans [1] page 9 sous référence (2)].

L'itération d'ENKAWA est définie par la suite d'approximations

$$n'^{(1)} = n$$

$$n'^{(2)} = \left[1 + \frac{3n'^{(1)}K^2}{6n'^{(1)} - 8}\right] n$$

....

$$n'^{(j)} = \left[1 + \frac{3n'^{(j-1)}K^2}{6n'^{(j-1)} - 8}\right] n \qquad (1)$$

....

et l'on s'arrête à une valeur $n'^{(f)}$ ou « valeur finale approchée » telle que les entiers immédiatement supérieurs à $n'^{(f-1)}$ et $n'^{(f)}$ soient les mêmes. C'est cette valeur entière commune notée N qui est finalement retenue pour n, par l'itération d'ENKAWA.

Nous désignerons par n_∞, la limite, qui existe, de la suite $n'^{(j)}$ et par K_∞ la valeur finale à adopter pour la constante d'acceptation :

$$K_\infty = \sqrt{\frac{3n_\infty - 3}{3n_\infty - 4}}\, K \quad \text{formule déjà proposée dans [1].}$$

Nous poserons en outre $z_j = n'^{(j)} - n'^{(1)} = n'^{(j)} - n$.

4. CALCUL DE n_∞, VALEUR A ADOPTER POUR L'EFFECTIF DE L'ÉCHANTILLON

Compte-tenu du changement de variable proposé ci-dessus, la formule (1) s'écrit pour l'indice j + 1 :

$$z_{j+1} = \frac{3n'^{(j)}nK^2}{6n'^{(j)} - 8} = \frac{3nK^2z_j + 3n^2K^2}{6z_j + 6n - 8}$$

Posant : $\alpha = 3nK^2 \quad > 0$

$\beta = 3n^2K^2 \ (= n.\alpha) > 0$

$\gamma = 6 \quad > 0$

$\delta = 6n - 8 \quad > 0 \quad \forall n > 4/3$ donc dès que $n \geqslant 2$

Alors $z_{j+1} = \dfrac{\alpha z_j + \beta}{\gamma z_j + \gamma}$ noté symboliquement.

$$z_{j+1} = (M)\, z_j \quad \text{M étant la matrice} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

et

$$z_\infty = \text{Lim}\, (M)^p . z_2 \quad p \to \infty$$

car $z_1 = n'^{(1)} - n'^{(1)} = 0$ et $z_2 = (M)\cdot 0 = \frac{\beta}{\delta} = \frac{3n^2K^2}{6n-8}$

Nous verrons plus loin que la suite z_j est convergente et donc que $(M)^p$ $p \to +\infty$ a un sens.

En ce cas z_∞ est défini et est déterminé par :

$$\boxed{z_\infty = \frac{az_\infty + \beta}{\gamma z_\infty + \delta}} \tag{2}$$

z_∞ est alors la solution positive de l'équation du second degré

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$$

Il est facile de voir ($\beta > 0$) que cette équation a toujours deux racines réelles de signes opposés.

On tire aisément :

$$\boxed{z_\infty = \frac{a - \delta + \sqrt{(\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2\gamma}} \tag{3}$$

formule qui compte tenu de $z_j = n'^{(j)} - n$ donne la solution du problème par

$$\boxed{n_\infty = z_\infty + n} \tag{4}$$

5. APPLICATION NUMÉRIQUE

(Nous prenons les données de départ, de l'exemple présenté dans l'article cité en référence [1]).

Soit $n = n'^{(1)} = 6{,}74$ $K = 2{,}24$

$\alpha = 3K^2n = 101{,}46$
$\beta = \alpha n = 683{,}81$
$\gamma = 6$
$\delta = 6n - 8 = 32{,}44$

Le discriminant $\Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$ vaut 21 175,20; $\sqrt{\Delta} = 145{,}52$
$\alpha - \delta = 69{,}02$
On trouve immédiatement $z_\infty = 17{,}88$

et donc $n_\infty = 17{,}88 + 6{,}74 = 24{,}62 \to \underline{N = 25}$

Ce qui confirme la valeur donnée (voir réf. [1]) par l'itération d'ENKAWA.

On en déduit immédiatement $K_\infty = \sqrt{\frac{3n_\infty - 3}{3n_\infty - 4}} \times K = 2{,}26$

On observera, en règle générale que dès que n_∞ est « grand » c'est-à-dire $\geqslant 10\,n$, $K_\infty \neq K$: on peut facilement donner un développement limité de K_∞ dont la précision est très suffisante.

Posant $\frac{1}{n_\infty} = \varepsilon$, un calcul élémentaire montre que

$$K_\infty \neq K \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{6}\right) \quad \text{ou} \quad \boxed{K_\infty = K \times \left(1 + \frac{1}{6n_\infty}\right)} \qquad (5)$$

On pourra facilement vérifier que cette formule est valable pour l'exemple ci-dessus.

6. CONVERGENCE DE LA SUITE z_j

Rappel

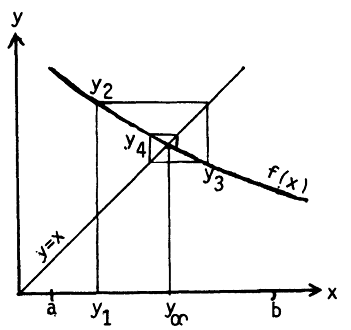
Lorsqu'une suite de valeurs y_j sont obtenues par itération fonctionnelle de la forme :

$$y_j = f(y_{j-1}) \quad \text{avec une valeur de départ} \quad y_1,$$

une condition ***suffisante*** pour que la suite converge, la fonction f étant supposée continue et dérivable dans un intervalle [a, b] tel que $y_1 \in [a, b]$ est que

$$0 > f'(x) > -1 \qquad \forall x \in [a, b]$$

Nous ne le démontrerons pas, car ceci sortirait du cadre d'une application statistique, mais nous illustrerons cette affirmation par le simple schéma ci-après qui présentera concrètement la proposition ci-dessus (cf. [4]).



$| f'(x) | < 1$ sur a, b et $f'(x) < 0$
$y_1, y_2 \ldots y_j \ldots \to y_\infty$ solution de $x = f(x)$.

Figure 1

Montrons que l'itération d'ENKAWA est dans ce cas : soit. $z = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$.

Le graphe de l'application $y = \dfrac{ax + \beta}{\gamma x + \delta}$ est, compte tenu des valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ précisées en 4, une hyperbole équilatère, d'asymptotes parallèles aux axes et dont le centre a pour coordonnées $-\delta/\gamma$ et α/γ.

Soit : $-(6n - 8)/6 = 3/4 - n$ et $\dfrac{3K^2 n}{6} = \dfrac{K^2 n}{2}$, c'est-à-dire un point O′ *d'abscisse négative* (dès que $n > 3/4$ ce qui est le cas, car en pratique $n \geqslant 2$), et d'*ordonnée positive.*

Si M est le point de l'hyperbole (dans le premier quadrant) appartenant à la droite $y = x$ alors compte tenu de la position de O′, pente de O′M < pente OM (toutes deux positives) $[X(O') < 0$ et $y(O') > 0]$.

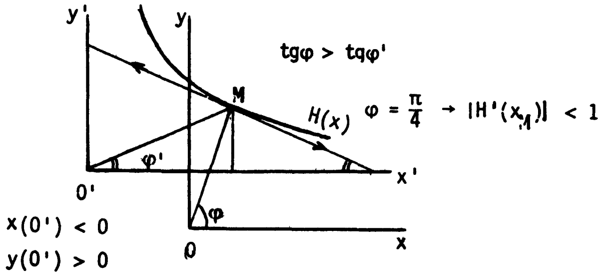


Figure 2

Comme la tangente en M à l'hyperbole est symétrique de O′M par rapport à la direction oy (propriété classique de l'hyperbole équilatère).

La condition $0 > f'(x) > -1$ est réalisée en M et par continuité dans un intervalle $[a, +\infty[$ (incluant x (M).

Si la valeur de *départ* y_1 ne correspond pas à une zone où $f'(x) > -1$ (cas très rare d'ailleurs) la valeur suivante $f(f(y_1))$ se trouve à droite de x (M) et l'itération est effective.

7. LA DÉTERMINATION DE n_∞ EST JUSTICIABLE D'UN ABAQUE À POINTS ALIGNÉS

Par élimination de z_∞ entre

$$z_\infty = \frac{\alpha z_\infty + \beta}{\gamma z_\infty + \delta} \quad \text{et} \quad n_\infty = z_\infty + n$$

On obtient :

$$n_\infty - n = \frac{a\,(n_\infty - n) + \beta}{\gamma\,(n_\infty - n) + \delta}$$

α, β, γ, δ ayant les valeurs définies en 4.

Soit $n_\infty - n = \dfrac{\alpha n_\infty}{6n_\infty - 8}$ d'où l'on tire

$$n_\infty = \frac{3K^2 n \cdot n_\infty}{6n_\infty - 8} + n = n\left(1 + \frac{3K^2 n_\infty}{6n_\infty - 8}\right)$$

Divisant cette relation par $n \cdot n_\infty \neq 0$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{n} = \frac{3K^2}{6n_\infty - 8} + \frac{1}{n_\infty}} \qquad (6)$$

Cette équation a trois variables, K, n, n_∞ est *canonique* c'est-à-dire de la forme :

$$\boxed{F_2 = A_3 F_1 + B_3}$$

où

F_2 est une fonction de la seule variable n
F_1 est une fonction de la seule variable K
A_3, B_3 des fonctions de la seule variable n_∞.

Cette forme linéaire par rapport à F_1 et F_2 est une condition nécessaire et suffisante (cf. réf. [3]) pour prouver que :

a) La relation (6) est justiciable d'un abaque à point alignés.

b) Cet abaque comporte deux supports rectilignes parallèles gradués fonctionnellement en F_1 et F_2, le troisième support étant curviligne (fonctionnelle de la troisième variable n_∞).

8. INDICATIONS SUR LA CONSTRUCTION DE L'ABAQUE

L'abaque original est établi sur un format A4 $\sim$ 21 $\times$ 29,7 cm.

Les échelles F_1 et F_2 sont parallèles au grand axe. La longueur disponible est < 29 cm. D'où les modules choisis en fonction des plages à couvrir et de la précision de lecture recherchée.

Echelle F_1 : en $3K^2$ K max = 3 $\rightarrow$ $3K^2$ max = 27

On adopte le module $\ell = 1$ cm/unité

Echelle F_2 : en $1/n$ n minimum = 2 $\frac{1}{n}$ max = 0,5

On adopte le module $\ell' = 50$: 50 cm/unité $\rightarrow$ F_2max = 25 cm.

En réalité $\ell' = -50$ cm pour la raison expliquée ci-après.

Distance entre les échelles : non critique; on la prend aussi large que possible, de l'ordre de 18 cm (largeur de la feuille).

Courbe C_3 : C'est celle qui porte les valeurs de n_∞.

Une étude analytique simple montre qu'il est nécessaire d'avoir des échelles F_1 et F_2 orientées en sens contraires pour que C_3 soit effectivement *entre* les échelles. Les origines O_1 et O_2 de F_1 et F_2 sont donc décalées (abaque en N).

Si l'on pose $O_1 O_2 = 2a$ et que l'on rapporte les coordonnées x, y du point courant de C_3 à un système d'axes ayant pour origine O' au milieu de $O_1 O_2$ et pour directions $O_1 O_2$ (axe des x) et O'Y parallèle aux supports de F_1 et F_2

(système d'axes obliques, très commode dans ce cas), on établit aisément (cf. réf. [3]) que

$$x = a\,\frac{\ell + \ell' A_3}{\ell - \ell' A_3} \qquad y = \frac{\ell \ell' B_3}{\ell - \ell' A_3}$$

sont les coordonnées paramétriques du point $M(n_\infty)$ définissant C_3 ce qui devient compte tenu des valeurs (> 0 ou < 0) de ℓ et ℓ' et des expressions de A_3 et B_3

$$x = a\,\frac{6n_\infty - 58}{6n_\infty + 42} \qquad y = -\,\frac{50\,(6n_\infty - 8)}{n_\infty(6n_\infty + 42)} \quad \text{en cm (1)}$$

La courbe se construit aisément par points et est graduée en n_∞. Sur l'abaque original, $2a = \sqrt{27^2 + 18^2} = 32{,}45$ cm, $a = 16{,}225$ cm.

Points remarquables

Point médian :

$x = 0 \quad \rightarrow n_\infty = \dfrac{58}{6} = 9{,}67 \quad y = -\,2{,}59$ cm

$x = a \quad \rightarrow n_\infty = \infty \quad y = 0$ (point commun avec F_2)

$x = -a \rightarrow n_\infty = 4/3 \rightarrow y = 0$ (point commun avec F_1).

Ce point n'est pas dans la partie utile mais permet de préciser le tracé. En ce dernier point la tangente passe par le point sur F_2 de cote $n = 4/3$.

Autres particularités

1) Le calcul des dérivées $x'(n_\infty)$ et $y'(n_\infty)$ montre qu'au point $O_2(n_\infty \rightarrow \infty)$ la pente en coordonnées oblique est $3/a$; d'où la construction de la tangente très voisine de la courbe définie par O_2 et le point $T(0, -3$ cm). En outre il n'y a pas de point d'inflexion par $n_\infty > 0$.

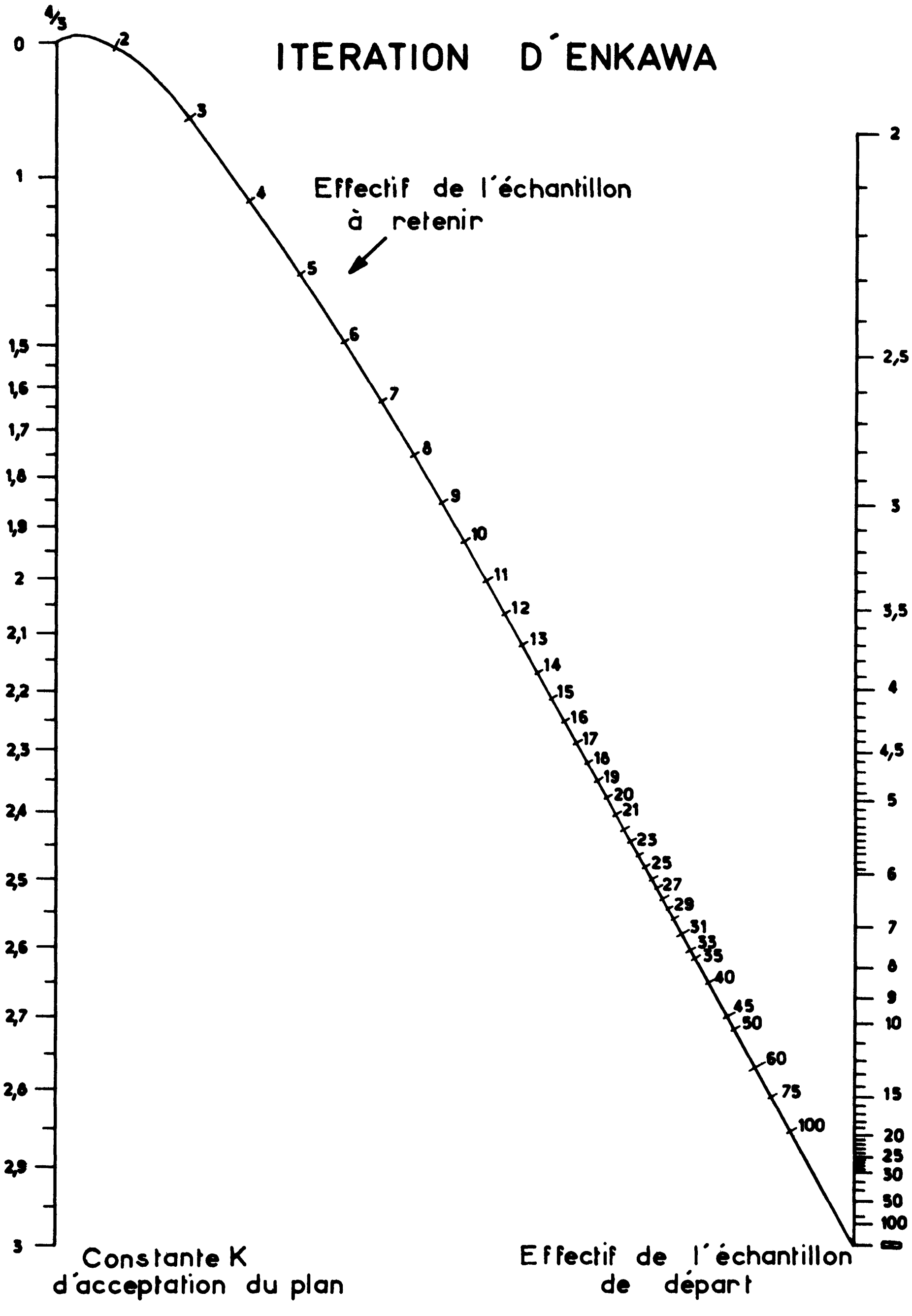
2) Si dans la formule de départ $\dfrac{1}{n} = \dfrac{3K^2}{6N_\infty - 8} + \dfrac{1}{n_\infty}$ on fait tendre K vers 0, cette égalité devient $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n_\infty}$ ou $n_\infty = n$, ce qui est *d'une interprétation nomographique très intéressante :*

Toute droite Δ passant par $K = 0$ (sur F_1) c'est-à-dire O_1 coupe la courbe $C_3(n_\infty$ et la courbe $F_2\left(\dfrac{1}{n}\right)$ en des points ayant même valeur de graduation ($n = n_\infty$).

Cette circonstance permet d'aider puissamment la construction (surtout pour les petites valeurs de n) et d'en vérifier l'exactitude.

3) Le point ou la tangente est parallèle à l'axe O_1O_2 qui correspond au minimum relatif de y, se détermine aisément par $y'(n_\infty) = 0$ on trouve $n_\infty = 4\,\dfrac{2}{3} = 4{,}67$, $x = -\,\dfrac{3a}{7}$; $y_{min} = -\,3{,}06$.

(1) L'abaque est reproduit avec un certain rapport de réduction que nous ne connaissons pas au moment de la rédaction.



Aligner les points des deux échelles verticales correspondants respectivement à la constante K et à l'effectif de départ.

La droite coupe l'échelle curviligne en un point coté donnant l'effectif de l'échantillon à retenir.

9. UTILISATION DE L'ABAQUE

Aligner les valeurs de départ K et n respectivement lues sur les échelles F_1 et F_2, au besoin en interpolant. La droite coupe C_3 en un point gradué à la valeur n_∞ cherchée, prendre N entier directement supérieur. K_∞ est ensuite calculé par $K_\infty = K \times \left(1 + \frac{1}{6n_\infty}\right)$, cette dernière formule étant suffisamment simple pour ne pas justifier un abaque spécial.

Exemple : $K = 2{,}24$ $n = 6{,}74 \rightarrow$ l'alignement donne $n_\infty = 24{,}6$

D'où : $N = 25$

$$K_\infty = 2{,}24 \times \left(1 + \frac{1}{6 \times 25}\right) \sim 2{,}26$$

10. RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. VESSEREAU. — Une approximation utile pour la construction d'un plan de contrôle par variable lorsque l'écart-type est inconnu. *Revue de Statistique Appliquée,* 1985, Vol. XXXIII, n° 1, p. 5-11.
[2] Takao ENKAWA. — *Quality,* 1980, Vol. 10, N° 4.
[3] M. FRECHET et H. ROULLET. — *Nomographie,* Armand COLIN, Paris (1952).
[4] E. GAU. — *Calculs numériques et graphiques,* Armand COLIN, Paris (1941), p. 174-176.

11. REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur André VESSEREAU, Inspecteur Général Honoraire des Manufactures de l'Etat qui a bien voulu encourager ce travail et Monsieur Daniel MICHIELS, Chef d'Atelier à la SEITA qui m'a prêté le concours de son habileté pour le tracé de l'abaque.