Revue de statistique appliquée

D. Turinetti

Calcul de blocs diagrammes « complexes » de fiabilité par la méthode dite des « matrices de conditions »

Revue de statistique appliquée, tome 31, nº 3 (1983), p. 27-37
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1983__31_3_27_0>

CALCUL DE BLOCS DIAGRAMMES "COMPLEXES" DE FIABILITE PAR LA METHODE DITE DES "MATRICES DE CONDITIONS"

D. TURINETTI

MATRA
Service Fiabilité

RESUME

La méthode des matrices de conditions permet de calculer de façon aisée les blocs diagrammes de fiabilité comportant de nombreuses dépendances. Le principe de la méthode proposée est que, étant donné un architecture aussi compliquée soit-elle, on peut toujours décrire cette architecture sous une forme appelée "matrice de conditions" dont la Réduction et l'analyse font l'objet d'un développement approfondi.

Cette méthode évite l'application du "Théorème de Bayes" classique, dont la mise en œuvre devient très difficile voire impossible sur des structures de types complexes.

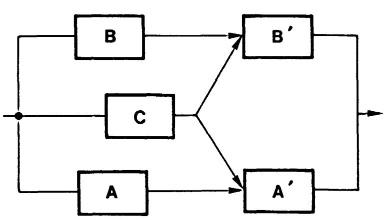
1. INTRODUCTION

Contrairement à la plupart des équipements ou systèmes pour lesquels un modèle ou une combinaison de modèles mathématiques est généralement suffisant pour quantifier leur fiabilité sur une mission donnée, les systèmes destinés à émettre des ordres séquentiels, de par leur conception sécuritaire conduisent à des blocs diagramme de fiabilité comportant de nombreuses dépendances.

Dans les techniques d'évaluation de la fiabilité, lorsqu'il n'est pas possible de ramener tous les problèmes de quantification de la fiabilité aux structures de base :

– montage en série
– montage en parallèle, . . .

on présente couramment le théorème de Bayes. Si la mise en œuvre de ce théorème est aisée sur la figure 1, elle l'est beaucoup moins sur la figure 2, et impossible sur la figure 3.



$R_{syst.} = (R_{A'} + R_{B'} - R_{A'B'}) R_C + (R_A R_{A'} + R_B R_{B'} - R_A R_{A'} R_B R_{B'}) (1 - R_C)$

Figure 1

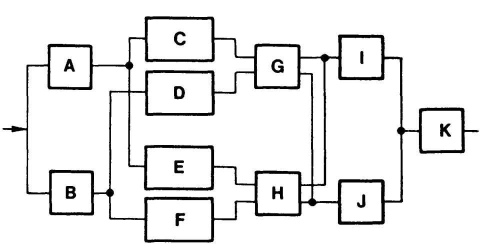


Figure 2

Mots-Clés : **Systèmes, fiabilité, évaluation, blocs-diagramme.**

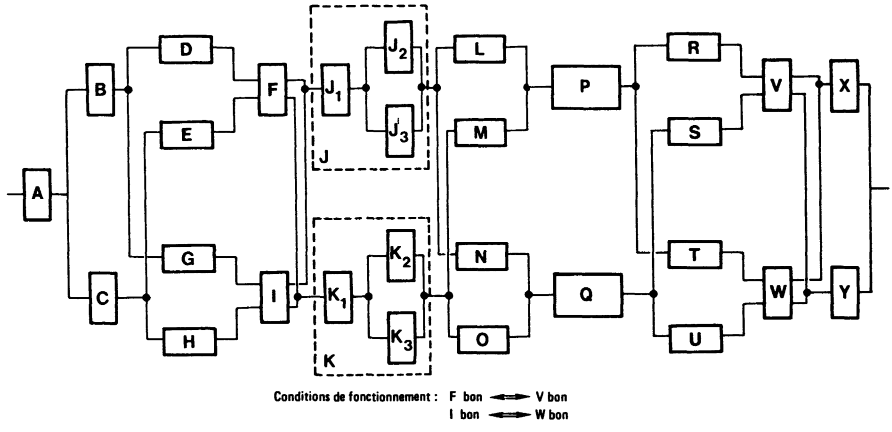


Figure 3

La méthode dite des "matrices de conditions" exposée ci-après permet de pallier ces difficultés de mise en œuvre.

2. DOMAINE D'APPLICATION DE LA METHODE

Cette méthode qui est générale, permet de quantifier de façon aisée des blocs diagrammes de fiabilité comportant de nombreuses dépendances, pour traiter tout système repondant aux critères suivants :

– la mission est supposée être composée d'une seule phase (ou chaque phase doit être évaluée indépendament des autres).

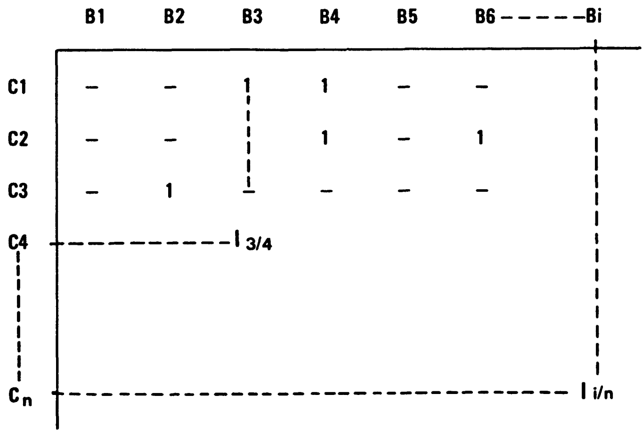
– le système doit pouvoir être représenté par un bloc diagramme de fiabilité auquel on peut imposer des conditions particulières de fonctionnement, ou décrit par une matrice de conditions.

Notons qu'il n'est pas nécessaire que les blocs soient de type "bloc monosortie". (Exemple : le bloc I de la figure 3).

3. PRESENTATION, ELABORATION ET INTERPRETATION D'UNE MATRICE DE CONDITIONS

Le principe de la méthode est que, étant donnée une architecture de type complexe (comprenant plusieurs dépendances), on peut toujours décrire cette architecture sous une forme matricielle, que nous appellerons "matrice de conditions". Généralement on réalise des "matrices de conditions" décrivant le bon fonctionnement de l'architecture, mais cela n'est pas obligatoire.

Cette matrice est du type :



où : – B_1.. B_i représentent les différents blocs de l'architecture

– C_1.. C_n les différentes conditions reliant les différents blocs.

– $I_{i/n}$ représentent les intersections colonne/ligne et seront codées comme suit :

- "1" indique que dans la condition C_n le bloc i est nécessaire, ex : C2 = B4 et B6
- "–" indique que la condition n est indépendante du bloc i
- "O" indique que dans la condition n le bloc i ne doit pas fonctionner.

Prenons comme exemple un système composé de 4 éléments A, B, C et D en parallèle, et dont 1 seulement parmis les 4 est nécessaire au bon fonctionnement, le bloc diagramme de fiabilité est celui de la figure 4.

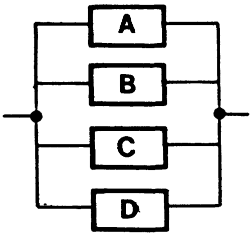


Figure 4

La codification de ce bloc diagramme de fiabilité sous forme de matrice de condition de bon fonctionnement est présenté dans la figure 5.

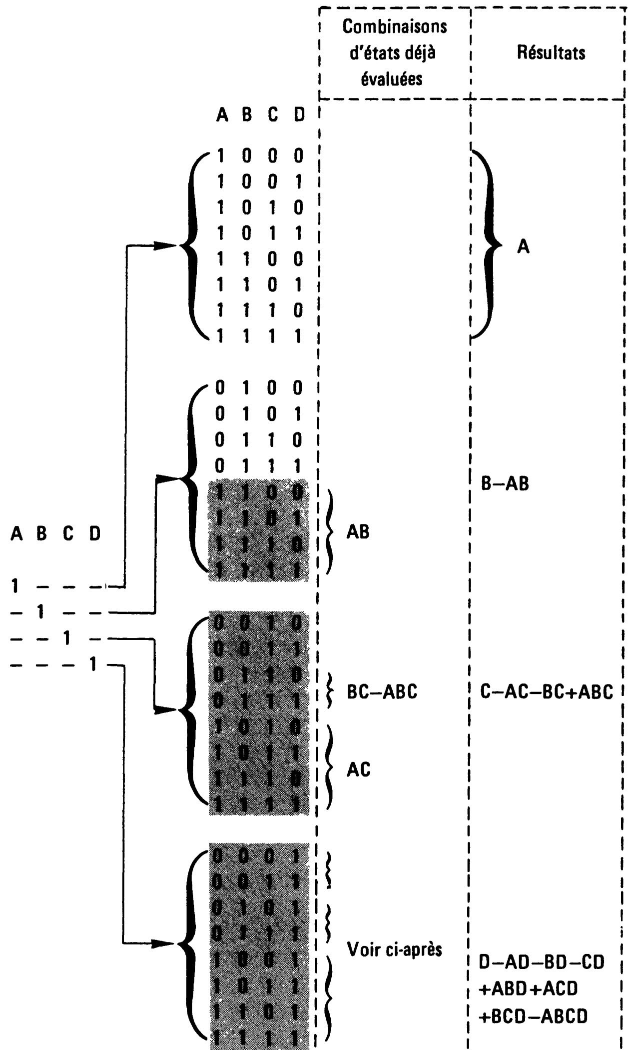
	A	B	C	D
C1	1	–	–	–
C2	–	1	–	–
C3	–	–	1	–
C4	–	–	–	1

Figure 5

L'interprétation de cette matrice étant :
"pour que le système fonctionne il faut :

– que A fonctionne quelque soit B, C, D
ou, – que B fonctionne quelque soit A, C, D
ou, – que C fonctionne quelque soit A, B, D
ou, – que D fonctionne quelque soit A, B, C"

ainsi les blocs marqués "–" dans une condition C_n pourront être "bon" ou "mauvais" au sens de la fiabilité, la matrice de conditions s'interprète donc globalement comme suit :



(*) or : $\bar{A}BCD = BCD - ABCD$

Recherche des combinaisons d'état contenues dans la ligne n° 4 de la matrice de condition, qui ont été évaluées avec les lignes 1, 2 et 3 :

A	B	C	D	
1	0	0	1	
1	0	1	1	AD
1	1	0	1	
1	1	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	BD – ABD
1	1	0	1	
1	1	1	1	
0	0	1	1	CD
0	1	1	1	
1	0	1	1	–BCD
1	1	1	1	–ACD + ABCI
1	1	1	1	

4. REDUCTION D'UNE "MATRICE DE CONDITIONS"

Pour éviter de générer des combinaisons inutiles, ou redondantes que l'on aura à réduire en fin d'analyse, il est nécessaire de s'assurer qu'au niveau de la "matrice de conditions" les conditions suivantes soient remplies :

– la matrice de conditions B doit être réduite au sens de Boole :

Il est nécessaire de supprimer dans une matrice de conditions les combinaisons d'états (représentées par une ligne de la matrice) identiques ou comprises dans une autre, combinaison d'états qui pourraient conduire à des erreurs d'évaluation au niveau de l'algorithme.

Le processus proposé est le suivant :

1) Classer la matrice de condition suivant le nombre décroissant de "–" contenus dans les lignes :

Soit la matrice :

–	1	1	1
1	–	–	0
–	–	–	1
1	–	–	1
–	1	0	1
0	1	–	0
0	1	0	0

Elle devient :

–	–	–	1
1	–	–	0
1	–	–	1
–	1	0	1
–	1	1	1
0	1	–	0
0	1	0	0

2) Considérer la $1^{ère}$ ligne de la nouvelle matrice ainsi formée ($I = 1$) et supprimer les lignes suivantes qui y sont comprises ou égales : ainsi la matrice devient :

–	–	–	1
1	–	–	0
0	1	–	0
0	1	0	0

3) Considérer la ligne suivante de la nouvelle matrice formée (I = 2), et recommencer le processus jusqu'à la dernière ligne.

On obtient finalement :

$$\begin{array}{cccc} - & - & - & 1 \\ 1 & - & - & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \end{array}$$

Remarque : le classement des lignes de la matrice de conditions suivant le nombre décroissant de " – " élimine tout risque d'erreur et rend informatisable l'algorithme.

– Un bloc ne doit pas appartenir à toutes les conditions, ni être toujours en condition avec un autre :

Prenons comme exemple l'architecture décrite par la figure 2 ; la matrice de conditions associée à ce bloc diagramme de fiabilité est la figure 6.

Cn \ Bi	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
C1	1	–	1	–	–	–	1	–	1	–	1
C2	1	–	–	–	1	–	–	1	1	–	1
C3	–	1	–	1	–	–	1	–	–	1	1
C4	–	1	–	–	–	1	–	1	–	1	1

Figure 6

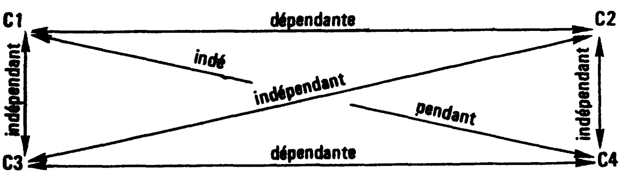
Dans cette matrice de conditions, les blocs I, J et K peuvent être retirés, en effet :

- K appartient à toutes les conditions, le bloc K est donc en série d'un point de vue fiabilité avec l'ensemble, on peut donc le sortir de l'architecture.
- chaque fois que l'on a une condition sur I, on a une condition sur A, on peut donc inclure d'un point de vue fiabilité de bloc I dans le bloc A.
- de même chaque fois que l'on a une condition sur J on a une condition sur B, on peut donc encore inclure J dans B.

– Des conditions ne doivent pas être indépendantes :

En effet si il arrive que des combinaisons dans la matrice de conditions soient indépendantes :

par exemple :



il est inutile de rechercher toutes les intersections, la fiabilité sera donné directement par la formule :

$$R = (R1 + R2 - R1R2)(R3 + R4 - R3R4)$$

5. FORMULATION MATHEMATIQUE GENERALE

$C_1, C_2, \ldots C_i, \ldots C_n$ étant les chemins reliant l'entrée à la sortie du bloc diagramme de fiabilité ou conditions favorables au succès de la mission, la fiabilité attachée à l'architecture est évaluée par la probabilité que les blocs nécessaires à l'un des chemins, ne soient pas défaillants, ce qui revient à évaluer :

$$R = \text{Prob}\,(C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_i \ldots \cup C_n)$$

Expression qui d'après la théorie des probabilités totales est donnée par la formule suivante :

$$R = \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_r} P(C_{i_1})\,P(C_{i_2}) \ldots P(C_{i_r})$$

Reprenons le système précédent dont l'architecture est décrite par la figure 5, comportant 4 conditions de base :

$$C_1, C_2, C_3\, C_4,$$

décrivant le bon fonctionnement.

Si on note :

R_A : la fiabilité attachée à la combinaison C_1 (A bon)
etc.

La fiabilité de l'architecture sera donné par la formule :

$$R = R_A + R_B + R_C + R_D - (R_AR_B + R_AR_C + R_AR_D + R_BR_C + R_BR_D + R_CR_D) + (R_AR_BR_C + R_AR_BR_D + R_BR_CR_D + R_AR_CR_D) - R_AR_BR_CR_D$$

Remarque : si les fiabilités blocs A, B, C et D sont les mêmes c'est-à-dire que :

$$R_A = R_B = R_C = R_D = R$$

On retrouve la formule de 1 parmi 4 qui est :

$$R_{1/4} = 4R - 6R^2 + 4R^3 - R^4$$
$$= 1 - (1 - R)^4$$

6. ALGORITHME DE CALCUL

La fiabilité globale d'une architecture comportant $C_1, C_2, \ldots C_n$ chemins, soit lignes dans la matrice de conditions peut être déterminée directement à l'aide de l'algorithme présenté figure 7.

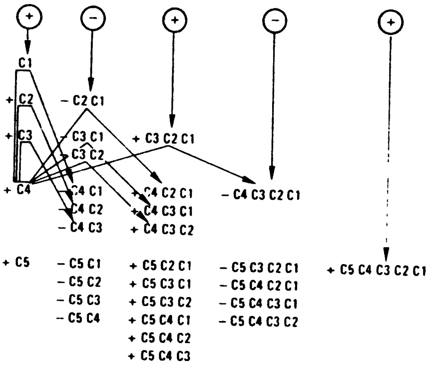


Figure 7

En reprenant l'exemple de l'architecture définie par la figure 2, et traduite sous forme de matrice de conditions par la figure 6, cet algorithme permet de déterminer directement les termes du développement, cette démarche est illustrée par la figure 8, puis la fiabilité résultante de l'architecture qui est donnée par la formule :

$$
\begin{aligned}
R = R_K(&R_A R_C R_G + R_A R_E R_H + R_B R_D R_G + R_B R_F R_H - R_A R_C R_E R_G R_H \\
&- R_A R_B R_C R_D R_G - R_A R_B R_D R_E R_G R_H - R_A R_B R_C R_F R_G R_H \\
&- R_A R_B R_E R_F R_H - R_B R_D R_F R_G R_H + R_A R_B R_C R_D R_E R_G R_H \\
&+ R_A R_B R_C R_E R_F R_G R_H + R_A R_B R_C R_D R_F R_G R_H + R_A R_B R_D R_E R_F R_G R_H \\
&- R_A R_B R_C R_D R_E R_F R_G R_H)
\end{aligned}
$$

avec :

R_A = probabilité de bon fonctionnement Ax probabilité de bon fonctionnement I
R_B = probabilité de bon fonctionnement Bx probabilité de bon fonctionnement J
R_C = probabilité de bon fonctionnement de C etc.

+ A B C D E F G H	− A B C D E F G H	+ A B C D E F G H	− A B C D E F G H
A C G			
+ A E H	− A C E G H		
+ B D G	− A B C D G − A B D E G H	+ A B C D E G H	
+ B F H	− A B C F G H − A B E F H − B D F G H	+ A B C E F G H + A B C D F G H + A B D E F G H	− A B C D E F G H

Figure 8

7. PRESENTATION DU PROGRAMME DE CALCUL

Un programme de calcul associé à l'algorithme précédent permet de calculer directement la fiabilité d'une architecture à partir de sa description sous forme de "matrice de conditions" réduite.

Les données nécessaires au programme sont :

– le nombre de bloc maximum par chemin
– le nombre de chemins (ou conditions)
– les taux de défaillances, avec une durée de mission ou les probabilités de chacun des blocs
– la matrice de conditions décrivant les conditions favorables de l'architecture.

Le programme fournit :

– une reprise des données ;
– la probabilité de succès de la mission ;
– la probabilité de panne.

La figure 9 donne à titre d'exemple le traitement d'une matrice de condition de 21 blocs 12 conditions.

```
FIABILITE DE SYSTEME A REDONDANCES COMPLEXES
============================================

REPRODUCTION DES DONNEES
------------------------

NOMBRE DE BLOCS PAR CHEMIN =  21
NOMBRE DE CHEMINS =  12
OPTION = PROB
DUREE DE LA MISSION =  .100000E+01 HEURES

DONNEES DE CALCULS
------------------

BLOC NO. :   1   PROBABILITE  =   .99992251D+00
BLOC NO. :   2   PROBABILITE  =   .99999988D+00
BLOC NO. :   3   PROBABILITE  =   .99999988D+00
BLOC NO. :   4   PROBABILITE  =   .99986202D+00
BLOC NO. :   5   PROBABILITE  =   .99986202D+00
BLOC NO. :   6   PROBABILITE  =   .99986202D+00
BLOC NO. :   7   PROBABILITE  =   .99986202D+00
BLOC NO. :   8   PROBABILITE  =   .99999982D+00
BLOC NO. :   9   PROBABILITE  =   .99999982D+00
BLOC NO. :  10   PROBABILITE  =   .10000000D+01
BLOC NO. :  11   PROBABILITE  =   .10000000D+01
BLOC NO. :  12   PROBABILITE  =   .99997479D+00
BLOC NO. :  13   PROBABILITE  =   .99997479D+00
BLOC NO. :  14   PROBABILITE  =   .99930000D+00
BLOC NO. :  15   PROBABILITE  =   .99930000D+00
BLOC NO. :  16   PROBABILITE  =   .99930000D+00
BLOC NO. :  17   PROBABILITE  =   .99930000D+00
BLOC NO. :  18   PROBABILITE  =   .99999923D+00
BLOC NO. :  19   PROBABILITE  =   .99999923D+00
BLOC NO. :  20   PROBABILITE  =   .99890000D+00
BLOC NO. :  21   PROBABILITE  =   .99890000D+00

LECTURE DE LA MATRICE DE CONDITIONS
-----------------------------------

LIGNE :  1 ......  1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0
LIGNE :  2 ......  1 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1
LIGNE :  3 ......  1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0
LIGNE :  4 ......  1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1
LIGNE :  5 ......  0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0
LIGNE :  6 ......  0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1
LIGNE :  7 ......  1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0
LIGNE :  8 ......  1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0
LIGNE :  9 ......  1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1
LIGNE : 10 ......  1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1
LIGNE : 11 ......  0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0
LIGNE : 12 ......  0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1

RESULTATS
---------

PROBABILITE DE SUCCES =    .9999987865
PROBABILITE DE PANNE  =    .121348E-05
```

Figure 9

8. CONCLUSION ET EXTENSION DE LA METHODE

A l'aide d'exemples nous avons vu que cette méthode qui évite l'application classique du "thèorème de Bayes", nous a permis de quantifier la fiabilité où la probabilité de panne de structure de "type complexe".

Pour mettre en œuvre cette méthode nous avons appris à construire une "matrice de conditions" d'une part, et à la réduire d'autre part.

A partir de cette matrice de conditions il a été présenté un algorithme simple permettant d'obtenir manuellement les termes du modèle mathématique associé, un programme de calcul correspondant à la méthode y a été exposé.

Cette méthode de raisonnement par des matrices de conditions est aussi une ouverture sur des possibilités nouvelles d'interprétation des blocs diagrammes de fiabilité, en effet cette méthode permet également à titre d'exemple :

– de déterminer les modes dégradés d'un système par élaboration de matrice de conditions sur des architectures partielles du système ;

– d'étudier la sensibilité d'un bloc vis-à-vis de la mission globale par itération avec changement du taux de panne du bloc considéré ;

– de conditionner le bon ou le mauvais fonctionnement d'un bloc par un ou plusieurs autres :

La matrice de conditions associée à l'architecture définie par la figure 3 avec les conditions de fonctionnement :

$$\text{bloc F bon} \Longleftrightarrow \text{bloc V bon ;}$$
$$\text{bloc I bon} \Longleftrightarrow \text{bloc W bon ;}$$

est représenté figure 10.

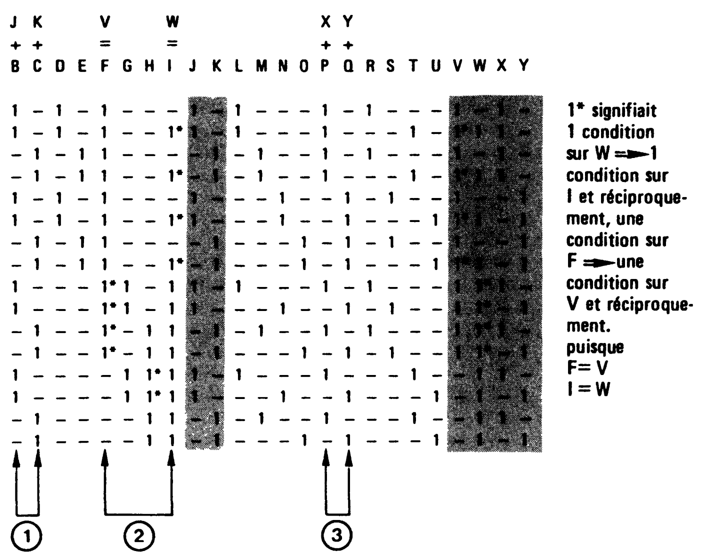


Figure 10

– L'analyse qualitative d'un système, telle la détermination des points de pannes uniques, des pannes doubles, triples... d'une architecture :

Les blocs mono sortie candidats à des combinaisons de pannes doubles, pour l'architecture de la figure 3 sont obtenus directement par interprétation de la matrice de condition figure 10 comme suit : compte tenu que la matrice de conditions possède 16 conditions (lignes) les blocs potentiels pour former des couples sont ceux possèdant seulement 8 conditions nécessaires ; ainsi les blocs potentiels sont : B C F I J_1 K_1 P Q V W X Y

A partir de la liste des blocs mono-sortie potentiels, les couples sont déterminés en regardant sur la matrice de conditions (figure 10), la complémentarité des conditions, ainsi on trouve par exemple B $\longleftrightarrow$ C, J_1 $\longleftrightarrow$ K_1, la figure 11 synthétise cette analyse.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
1	X	X							X	X														
	X									X														
		X							X															
2					X			X																
																					X	X		
3															X	X								
															X									X
																X							X	
																							X	X

Figure 11

Les pannes doubles de l'architecture sont donc définies par les couples suivants :

B $\longleftrightarrow$ C, B $\longleftrightarrow$ K_1 J_1 $\longleftrightarrow$ K_1, J_1 $\longleftrightarrow$ C

P $\longleftrightarrow$ Q, P $\longleftrightarrow$ Y   X $\longleftrightarrow$ Y, X $\longleftrightarrow$ Q

F $\longleftrightarrow$ I   V $\longleftrightarrow$ W