REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

ALAIN DESROCHES
MARCEL NEFF

Introduction de la loi de probabilité du coefficient de variation dans les applications de la méthode résistance-contrainte

Revue de statistique appliquée, tome 31, n° 3 (1983), p. 17-26
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1983__31_3_17_0>

INTRODUCTION DE LA LOI DE PROBABILITE DU COEFFICIENT DE VARIATION DANS LES APPLICATIONS DE LA METHODE RESISTANCE – CONTRAINTE

Alain DESROCHES

CNES
CG/QS/EP
97310 KOUROU (Guyanne)

Marcel NEFF

SGTE
33, quai de Dion Bouton, 92806 PUTEAUX Cedex

RESUME

Après quelques rappels sur la méthode résistance-contrainte, on étudie la sensibilité de la probabilité de rupture vis-à-vis du coefficient de variation γ. Puis les auteurs développent la méthode de construction de la loi de probabilité du coefficient de variation et présentent des abaques des quantiles $\gamma_{1-\alpha}$, valeurs du coefficient de variation ayant la probabilité α d'être dépassées.

ABSTRACT

After recalling the essentials of the stress-strength method, the paper studies the sensitivity of the fracture probability to the coefficient of variation γ. The authors then develop the method for determining the probability law of the coefficient of variation, and give charts for the quantiles $\gamma_{1-\alpha}$, values of γ which have a probability α of being exceeded.

SOMMAIRE

Mots-Clés : **Coefficient de variation – Résistance. Contrainte.**

1. QUELQUES RAPPELS SUR LA METHODE RESISTANCE-CONTRAINTE

1.1. Cas général

Soit R la variable aléatoire décrivant la résistance de l'équipement $\mathcal{E}$ à la contrainte C qui est elle-même une variable aléatoire.

La défaillance de $\mathcal{E}$ correspond à l'événement $R < C$ dont la probabilité s'écrit :

$$p = P_r(R < C) = P_r(R - C < 0)$$

Si f et g sont respectivement les densités de probabilité de R et C et F et G, leur fonction de répartition, on sait alors que :

- d'une part, la densité de probabilité h de la variable $Z = R - C$ est égale au produit de convolution des densités f et g, c'est-à-dire $f * g$,
- d'autre part, la fonction de répartition H de la variable Z s'obtient en calculant l'une des intégrales suivantes :

$$H(z) = \int_{\mathbf{R}} G(t - z)\, dF(t)$$

ou

$$H(z) = \int_{\mathbf{R}} F(t - z)\, dG(t)$$

Dans la pratique, ce calcul est fastidieux et on s'arrange dans la mesure du possible à n'utiliser que des distributions stables par addition (loi normale, PEARSON III) ou par multiplication (loi de GALTON).

1.2. Cas particulier : R et C gaussiennes

1.2.1. Introduction

Si R et C sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, on peut écrire :

$$R \in \mathcal{N}(\mu_R , \sigma_R) \quad \text{et} \quad C \in \mathcal{N}(\mu_C , \sigma_C)$$

La stabilité additive permet de conclure que la variable $Z = R - C$ est elle-même gaussienne, d'où :

$$Z \in \mathcal{N}(\mu_Z , \sigma_Z)$$

avec :

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_C$$

et :

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_C^2}$$

Par suite, on peut écrire :

$$Z = \mu_Z + U \,.\, \sigma_Z \quad \text{avec} \quad U \in \mathcal{N}(0,1)$$

d'où :

$$p = P_r(Z < 0) = P_r(\mu_Z + U \,.\, \sigma_Z < 0)$$

$$= P_r(U < -1/\gamma_Z) \tag{1.1}$$

où $\gamma_Z = \sigma_Z/\mu_Z$ est le coefficient de variation de la variable Z.

En revenant aux variables R et C, l'expression (1.1) devient :

$$p = P_r\left(U < \frac{\mu_C - \mu_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_C^2}}\right)$$

$$= P_r\left(U < \frac{1/k_{RC} - 1}{\gamma_{RC}}\right)$$

où :

$k_{RC} = \mu_R/\mu_C$ est le coefficient de sécurité de R par rapport à C,

$\gamma_{RC} = \sqrt{\dfrac{\sigma_R^2 + \sigma_C^2}{\mu_R^2}}$ est un pseudo-coefficient de variation.

Si la contrainte est déterministe (c'est-à-dire $\sigma_c = 0$) alors :

$$\gamma_{RC} = \gamma_R = \sigma_R/\mu_R$$

Ainsi la probabilité de défaillance est entièrement définie par les paramètres k_{RC} et γ_{RC} à travers la relation :

$$p = \Phi\left(\frac{1/k_{RC} - 1}{\gamma_{RC}}\right) \qquad (1.2)$$

où Φ est la fonction de répartition de la variable gaussienne centrée réduite.

1.2.2. Variation de la probabilité de défaillance en fonction de k_{RC} et γ_{RC}

A partir de la relation (1.2), on calcule les dérivées partielles par rapport à k_{RC} et à γ_{RC} :

a) $$\frac{\partial\Phi}{\partial k_{RC}} = \varphi\left(\frac{1/k_{RC} - 1}{\gamma_{RC}}\right) \times \left(-\frac{1}{k_{RC}^2}\right) \times \frac{1}{\gamma_{RC}}$$

où φ est la dérivée de Φ donc la densité de probabilité de la variable normale centrée réduite.

Puisque φ et γ_{RC} sont positifs, il en résulte que $\partial\Phi/\partial k_{RC}$ est négative quel que soit k_{RC}.

Par suite, la probabilité de défaillance est fonction décroissante de k_{RC}.

b) $$\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma_{RC}} = \varphi\left(\frac{1/k_{RC} - 1}{\gamma_{RC}}\right) \times \left(-\frac{1}{\gamma_{RC}^2}\right) \times \left(\frac{1}{k_{RC}} - 1\right)$$

or $(1/k_{RC}) - 1$ est négatif quel que soit k_{RC} supérieur à 1, d'où $\partial\Phi/\partial\gamma_{RC}$ est positive quel que soit γ_{RC}.

Par suite, la probabilité de défaillance est fonction croissante de γ_{RC}.

c) Enfin la différentielle totale de la probabilité de défaillance p s'écrit :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial k_{RC}} dk_{RC} + \frac{\partial p}{\partial \gamma_{RC}} d\gamma_{RC} \tag{1.3}$$

$$= \left[\varphi\left(\frac{\frac{1}{k_{RC}} - 1}{\gamma_{RC}}\right) \times \left(-\frac{1}{k_{RC}^2}\right) \times \left(\frac{1}{\gamma_{RC}}\right) \right] dk_{RC}$$

$$= \left[\varphi\left(\frac{\frac{1}{k_{RC}} - 1}{\gamma_{RC}}\right) \times \left(-\frac{1}{\gamma_{RC}^2}\right) \times \left(\frac{1}{k_{RC}} - 1\right) \right] d\gamma_{RC}$$

$$dp = -\frac{1}{k_{RC}\,\gamma_{RC}} \cdot \varphi\left(\frac{\frac{1}{k_{RC}} - 1}{\gamma_{RC}}\right) - \left[\left(\frac{dk_{RC}}{k_{RC}}\right) + (1 - k_{RC})\left(\frac{d\gamma_{RC}}{\gamma_{RC}}\right)\right] \tag{1.4}$$

$$dp = -\varphi(u)\left[\left(\frac{1}{k_{RC}\,\gamma_{RC}}\right)\left(\frac{dk_{RC}}{k_{RC}}\right) + u\left(\frac{d\gamma_{RC}}{\gamma_{RC}}\right)\right] \tag{1.5}$$

avec :

$$u = \frac{\frac{1}{k_{RC}} - 1}{\gamma_{RC}}$$

Cette formule permet de calculer la variation dp de la probabilité de défaillance p pour des variations en pourcentages dk_{RC}/k_{RC} et $d\gamma_{RC}/\gamma_{RC}$ des coefficients de sécurité et de variation.

d) A partir de (1.2), on tire la relation :

$$\gamma_{RC} = \frac{1 - k_{RC}}{k_{RC}\,\Phi^{-1}(p)} \tag{1.6}$$

où $\Phi^{-1}(p) = u_p$ est la quantile d'ordre p de la variable normale centrée réduite.

Si dans cette expression, on fait tendre le coefficient de sécurité k_{RC} vers l'infini, la valeur de γ_{RC} tend vers $-1/u_p$ par valeurs inférieures ($u_p \leqslant 0$ pour $k_{RC} \geqslant 1$).

Ceci implique que pour p fixée l'intervalle de définition de γ_{RC} est $[0\,; -1/u_p[$.

Par exemple, pour $p = 10^{-4}$, on obtient $u_p = \Phi^{-1}(10^{-4}) = 3{,}7191$. D'où l'intervalle de définition du pseudo-coefficient de variation s'écrit :

$$\gamma_{RC} \in [0\,; 0{,}269[$$

Inversement, si l'on se fixe un coefficient de variation, on peut lui associer la probabilité minimale de défaillance, à savoir $p = \Phi(-1/\gamma_{RC})$. Cette probabilité serait obtenue pour un coefficient de sécurité infini.

Par exemple, si l'on se donne $\gamma_{RC} = 0{,}50$, la probabilité minimale de défaillance s'écrit :

$$p = \Phi\left(-\frac{1}{0{,}5}\right) = \Phi(-2) \simeq 0{,}023$$

En termes clairs, on ne pourra jamais démontrer (ou obtenir) une probabilité de défaillance inférieure à 0,023 quelle que soit la valeur du coefficient de sécurité retenu.

1.3. Construction d'un abaque dans le cas gaussien

A partir de la relation (1.6) définissant la valeur du coefficient de variation en fonction du coefficient de sécurité, pour p fixée, on construit l'abaque de la figure 1.

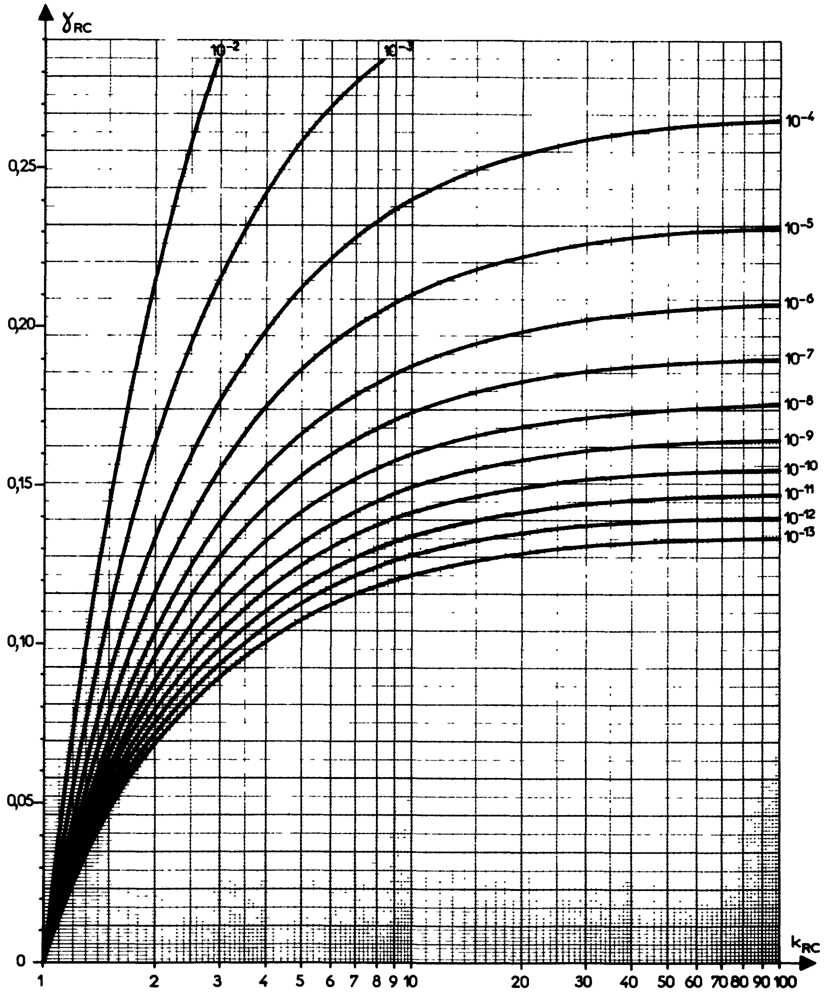

Figure. 1 – Probabilité de défaillance en fonction du coefficient de sécurité k_{RC} et du coefficient de variation γ_{RC} (cas de deux lois normales)

Cet abaque permet d'avoir des ordres de grandeur de p pour γ_{RC} et k_{RC} fixés. Pour des valeurs plus précises, il est nécessaire d'utiliser la formule (1.2).

2. RECHERCHE DE LA LOI DE PROBABILITE DU COEFFICIENT DE VARIATION

2.1. Introduction

Soit $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ une variable aléatoire gaussienne associée aux n-échantillons $\epsilon = (x_1, \ldots, x_n)$ de moyenne $\overline{X}$ et d'écart type s_X.

On peut construire une statistique $\Phi(\Gamma)$ associée à ϵ par l'intermédiaire d'une combinaison de $\overline{X}$ et s_X faisant apparaître explicitement le coefficient de variation empirique, à savoir $CV = s_X/\overline{X}$.

Cette statistique, elle-même variable aléatoire d'échantillonnage, permet alors d'exprimer le coefficient de variation (considéré alors comme une variable aléatoire Γ) en fonction de μ et σ et des lois de probabilité associées à $\overline{X}$ et s_X :

$$\psi(\Gamma) = \frac{\sqrt{n}}{\Gamma} = \frac{\overline{X}}{s_X}\sqrt{n} = \frac{\dfrac{(\overline{X} - \mu + \mu)\sqrt{n}}{\sigma}}{\dfrac{s_X}{\sigma}}$$

$$= \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \dfrac{\mu}{\sigma}\sqrt{n}}{s_X/\sigma}$$

or :

$$\sigma/\mu = \gamma$$

$$s_X/\sigma \in \sqrt{\frac{\chi^2(n-1)}{n-1}}$$

et :

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = U \in \mathcal{N}(0,1)$$

par suite :

$$\frac{\sqrt{n}}{\Gamma} \in \frac{U + \sqrt{n}/\gamma}{\sqrt{\dfrac{\chi^2(n-1)}{n-1}}}$$

Cette statistique a une distribution de STUDENT décentrée à $\nu = n - 1$ degrés de liberté et à un décentrement $\delta = \sqrt{n}/\gamma$; d'où :

$$\frac{\sqrt{n}}{\Gamma} \in T'\left(n-1, \frac{\sqrt{n}}{\gamma}\right)$$

soit :

$$\Gamma \in \frac{\sqrt{n}}{T'\left(n-1, \frac{\sqrt{n}}{\gamma}\right)} \tag{2.1}$$

Par suite, le coefficient de variation calculé à partir d'un n-échantillonnage gaussien est distribué suivant l'inverse d'une loi de STUDENT décentrée au coefficient $\sqrt{n}$ près.

Ainsi, pour un seuil de risque α, on peut poser :

$$P_r(\Gamma > \gamma_{1-\alpha}) = P_r\left(\frac{\sqrt{n}}{\Gamma} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{\gamma_{1-\alpha}}\right) = \alpha$$

où $\gamma_{1-\alpha}$ est le quantile de la variable aléatoire Γ qui a un risque α d'être dépassé.
Or :

$$P_r\left(t'\left(n-1, \frac{\sqrt{n}}{\gamma}\right) \leqslant t'_\alpha\left(n-1, \frac{\sqrt{n}}{\gamma}\right)\right) = \alpha$$

d'où :

$$t'_\alpha\left(n-1, \frac{\sqrt{n}}{\gamma}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\gamma_{1-\alpha}}$$

soit :

$$\gamma_{1-\alpha} = \frac{\sqrt{n}}{t'_\alpha\left(n-1, \frac{\sqrt{n}}{\gamma}\right)} \tag{2.2}$$

Le calcul de $\gamma_{1-\alpha}$ nécessite donc la connaissance du quantile t'_α de la variable de STUDENT décentrée dans laquelle intervient explicitement le coefficient de variation γ de la variable X.

Remarque :

Dans les applications, on prend pour estimateur $\hat{\gamma}$ de γ le coefficient de variation, à savoir $CV = s_x/\bar{X}$.

2.2. Exemple

Soit un échantillon de taille 3 tiré d'une population gaussienne à partir duquel a été calculé un estimateur $\hat{\gamma} = 0{,}33$ du coefficient de variation relatif à la population.

Pour un niveau de confiance $1 - \alpha = 0{,}75$, on détermine dans une table de la loi de STUDENT décentrée la valeur :

$$t'_{0,25}\left(2, \frac{\sqrt{3}}{0{,}33}\right) = 4{,}407$$

qui permet de déduire le quantile $\gamma_{0,75}$ de la variable Γ d'échantillonnage :

$$\gamma_{0,75} = \frac{\sqrt{3}}{4{,}407} = 0{,}393$$

2.3. Construction d'abaques relatifs aux risques $\alpha = 0{,}25 ; 0{,}10 ; 0{,}05 ; 0{,}01$

A partir de la relation (2.2), on peut déterminer les quantiles $\gamma_{1-\alpha}$ de la variable aléatoire Γ associée au coefficient de variation d'échantillonnage en fonction :

– De γ, coefficient de variation de la variable aléatoire gaussienne associée à l'échantillon. Dans les applications, γ est remplacé par son estimateur $\hat{\gamma}$.
– De n, taille de l'échantillon.

Pour les valeurs $\alpha = 0{,}15 ; 0{,}10 ; 0{,}05 ; 0{,}01$, on a construit quatre abaques (fig. 2, 3, 4 et 5) permettant pour n variant de 3 à 50 de déduire $\gamma_{1-\alpha}$ à partir de $\hat{\gamma}$.

3. INTRODUCTION DE $\gamma_{1-\alpha}$ DANS LES APPLICATIONS DE LA METHODE RESISTANCE-CONTRAINTE

3.1. Introduction

Dans les application de la méthode R.C., on utilise la formule (1.2) visualisée par l'abaque de la figure 1.

Comme on l'a vu plus haut, une des entrées est le coefficient de variation γ_R estimé par $\hat{\gamma}_R \simeq CV_R = s_R/\overline{R}$ ou le pseudo-coefficient γ_{RC}.

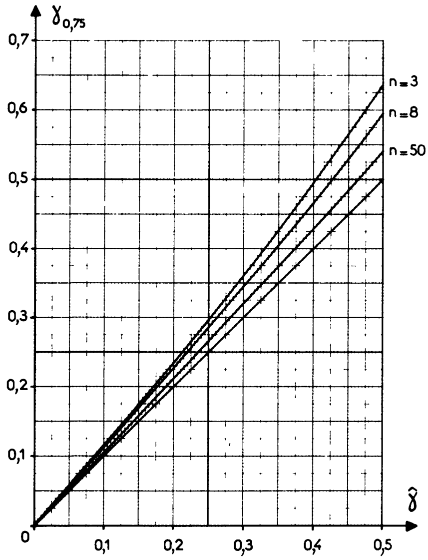

Figure 2. – Quantile 0,75 (risque $\alpha = 0{,}25$)

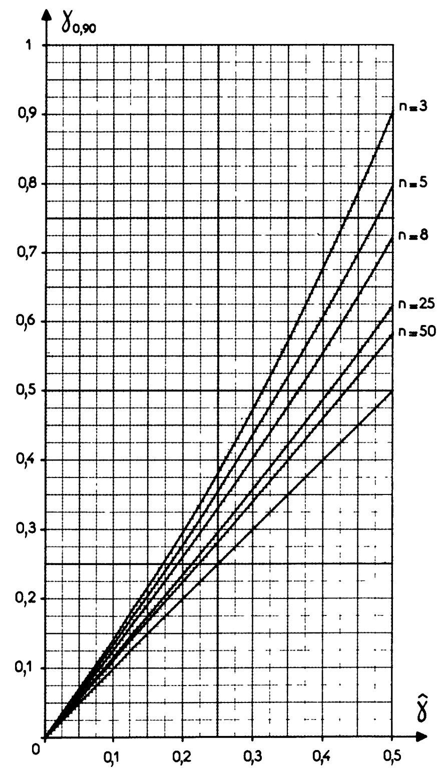

Figure 3. – Quantile 0,90 (risque $\alpha = 0{,}10$)

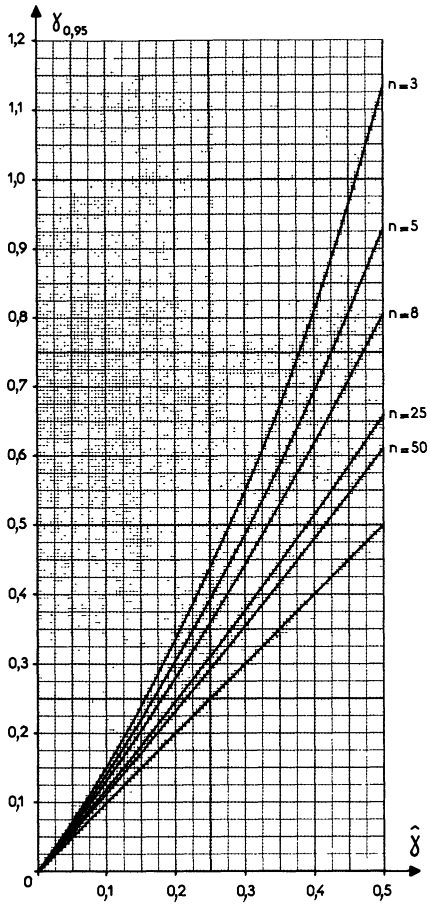

Figure 4. – Quantile 0,95 (risque $\alpha = 0{,}05$)

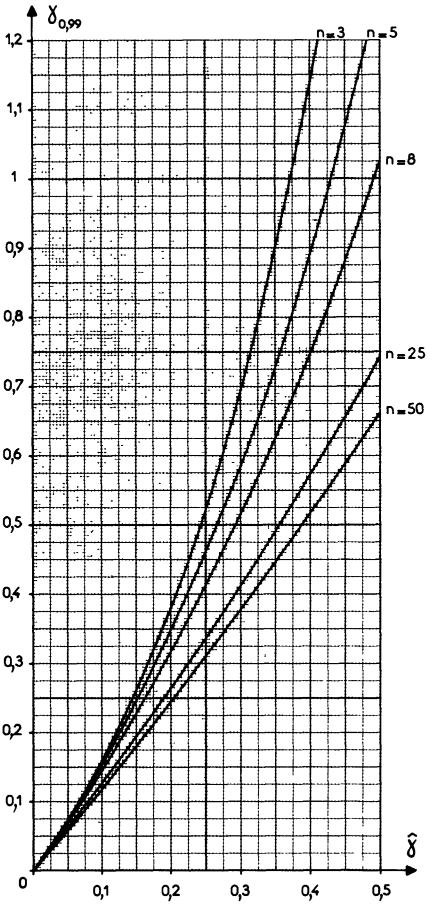

Figure 5. – Quantile 0,99 (risque $\alpha = 0{,}01$)

Ainsi, dans la pratique, pour minimiser le risque d'erreur sur la probabilité de défaillance p introduit par γ_R (pour une taille donnée n d'échantillon) on détermine, pour α fixé, la valeur $\gamma_{1-\alpha}$ à partir des abaques des figures 2, 3, 4 ou 5. Puis on détermine p sur la figure 1 en remplaçant γ_R par $\gamma_{1-\alpha}$.

3.2. Exemple

Soit un échantillon gaussien de taille 8 de moyenne $\overline{R} = 150$ et d'écart type $s_R = 30$. Le coefficient de variation empirique s'écrit $CV_R = s_R/\overline{R} = 0{,}20$.

a) Pour un risque $\alpha = 0{,}10$, on détermine le quantile $\gamma_{0,90}$ en utilisant l'abaque de la figure 3 qui donne pour $n = 8$ et $\hat{\gamma} = 0{,}20$ la valeur $\gamma_{0,90} = 0{,}26$.

b) Dans l'hypothèse d'une contrainte C déterministe ($\sigma_c = 0$) et telle que $\overline{C} = 30$, on calcule $k_{RC} = \overline{R}/\overline{C} = 5$.

D'où en utilisant l'abaque de la figure 1, on obtient pour $k_{RC} = 5$ et $\gamma_{RC} = 0{,}26$ la probabilité de défaillance $p = 10^{-3}$.

4. BIBLIOGRAPHIE

[1] M.G. KENDALL and A. STUART. – *The advanced theory of statistics*. Griffin Edition.

[2] N.L. JOHNSON and B.L. WELCH. – Applications of the non-central t distribution. *Biometrika,* 31, 1940.

[3] G.J. RESNIKOFF and G.J. LIEBERMAN. – *Tables of the non-central t distribution.* Stanford University Press, 1957.

[4] A. VESSEREAU. – Note sur les intervalles statistiques de dispersion. *Revue de Statistique Appliquée 1972*, Vol. XX, n° 1, p. 67-87.

5. ANNEXE

La densité de probabilité de la loi de STUDENT non centrée à n degrés de liberté et à un décentrement δ a pour expression :

$$f_{n,\delta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta^2/2}\, \delta^k \, \frac{2^{k/2}}{k\,!} \; \frac{\Gamma((n+k+1)/2)}{\sqrt{n\Pi}\,\Gamma(n/2)} \cdot \frac{(t/\sqrt{n})^k}{(1+t^2/n)^{(n+k+1)/2}}$$