REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

BERNARD CHALMOND

Détection d'une rupture de moyenne en un point inconnu d'un processus ARMA

Revue de statistique appliquée, tome 29, nº 1 (1981), p. 7-20
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1981__29_1_7_0>

DETECTION D'UNE RUPTURE DE MOYENNE EN UN POINT INCONNU D'UN PROCESSUS ARMA

Bernard CHALMOND ([1])

Centre Hospitalier Régional et Universitaire de Dijon & Université de Paris Sud.

RESUME

Deux méthodes, pour étudier la stabilité à travers le temps du niveau moyen d'une série chronologique, sont développées. La première s'applique aux processus ARMA, en considérant un indicateur de rupture basé sur la somme cumulée des déviations. La seconde établit un test dérivé du rapport des vraisemblances maximales, pour une rupture par saut dans un processus autorégressif dont l'ordre est connu. Les comportements asymptôtiques de ces tests sous l'hypothèse nulle sont étudiés, en faisant appel à la convergence en distribution de la somme cumulée vers le mouvement Brownien. Des simulations sur des processus AR(1) sont réalisées afin de déterminer la puissance de cet indicateur et de ce test. Un exemple d'application de l'indicateur de la somme cumulée est donné.

1. INTRODUCTION

On observe une réalisation d'un phénomène stochastique $(z_1, \ldots, z_n)$ dépendant du temps, et que l'on sait être engendrée par un processus ARMA, au sens de Box et Jenkins [4]. Le modèle s'écrit formellement :

$$z_t = E(z_t) + u_t,$$

où

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \ldots + \phi_p u_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \ldots + \theta_q a_{t-q}.$$

Quand B désigne l'opérateur retard $B^j z_t = z_{t-j}$, u_t satisfait $\Phi(B) u_t = \theta(B) a_t$, ou $\Phi(B) = (1 - \phi_1 B - \ldots \phi_p B^P)$ est le polynome autorégressif dont les racines sont à l'extérieur du cercle unité afin que u_t soit stationnaire, et

$$\theta(B) = (1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q)$$

----

(1) Adresse actuelle : Département d'Informatique Médicale (Pr. Ag. Dusserre), Hopital du Bocage, 21034 Dijon Cedex.

Mots clés : **Processus ARMA, Rupture de moyenne, Mouvement Brownien.**

est le polynome moyenne-mobile. u_t apparait comme la sortie d'un filtre linéaire dont l'entrée est le bruit blanc a_t gaussien $N(0, \sigma_a^2)$:

$$u_t = \Phi^{-1}(B)\,\Theta(B)\,a_t = \Psi(B)\,a_t \qquad = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j\right) a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\, a_{t-j}\,. \qquad (1)$$

En régime stationnaire, la moyenne est constante par rapport au temps : $E(z_t) = \mu$. On se pose la question de savoir si le phénomène a subi une altération à partir d'une date t_0 inconnue, t_0 comprise entre 1 et n, altération se traduisant par une rupture de la stationnarité de la moyenne μ du processus.

Le point de rupture est définie par : $E(z_t) = \mu$ si $t \leqq t_0$ et $E(z_t) = \mu + \delta_t$ si $t > t_0$. Nous considérons alors le problème de tester l'hypothèse nulle H_0 d'absence de rupture, contre l'hypothèse alternative H_1 de présence de rupture :

$$H_0 : E(z_t) = \mu\,, \qquad H_1 : E(z_t) = \mu + \delta_t\, \chi_{t>t_0}\,.\ (^1)$$

Aucun des paramètres du modèle n'est connu.

Les problèmes de rupture ont été abordés par de nombreux auteurs. Lorsque la date de rupture t_0 est supposée connue, Box et Tiao [5], ont proposé des modèles ARMA exogènes avec fonction impulsionnelle sur une variable indicatrice de la rupture. Quand t_0 est inconnu, des tests statistiques ont été établis dans le cas où les observations sont indépendantes ; l'article [6] donne en référence une longue liste de ces travaux. Plutôt que de redéfinir de nouvelles statistiques spécifiques aux processus ARMA, il convient tout d'abord de reprendre celles écrites dans le cas d'indépendance et d'étudier les effets des autocorrélations sur celles-ci, comme l'on fait Johnson et Bagshaw [11], pour le test de Page [13].

Dans la seconde partie de cet article, nous reprenons la somme cumulée proposée par Brown, Durbin et Evans [6] et plus particulièrement étudiée par Deshayes et Picard [8], pour étudier la stabilité par rapport au temps d'un modèle de régression. Dans notre cas le modèle de régression est simple $z_t = E(z_t) + u_t$, mais l'indicateur qu'ils proposent ne peut pas être appliqué directement puisque les u_t ne sont pas indépendants.

Dans la troisième partie, on se restreint au cas particulier d'une rupture par saut, avec $\mu = 0$ et u_t un processus autorégressif AR(p), pour établir un test du rapport des vraisemblances maximales (RVM). Signalons que Hawkins [10], Marona et Yohai [12], ont traité ce sujet en considérant u_t comme des variables indépendantes et gaussiennes.

Les convergences distributionnelles de l'indicateur et du test du RVM seront étudiées. Pour ce faire on fera appel aux résultats de Billingsley [3] sur les fonctions de processus mélangeant. Les deux méthodes se ramènent au problème du franchissement d'une barrière par un mouvement Brownien. Les problèmes d'estimations des paramètres de la rupture ne seront pas abordés.

---

(1) $\chi_{t>t_0} = \dfrac{1 \text{ si } t > t_0}{0 \text{ sinon.}}$

2. L'INDICATEUR DE LA SOMME CUMULEE DES DEVIATIONS

2.1. INTRODUCTION

Sous l'hypothèse nulle, le modèle est $z_t = \mu + u_t$ où u_t est un processus ARMA(p, q), les ordres p et q n'étant pas nécessairement connus. L'estimateur des moindres carrés de μ basé sur les r premières observations est $\overline{z}_r = \frac{1}{r} \sum_{t=1}^{r} z_t$. Appelons déviation et somme cumulée des déviations les deux variables :

$$d_r = z_r - \overline{z}_{r-1}, \qquad S_r = \sum_{i=k+1}^{r} d_i,$$

k sera explicité plus loin. En période stationnaire les sommes S_r sont de moyenne nulle, alors qu'une rupture propage un biais après t_0 : si $\delta_t = \delta$

$$E(S_r) = \sum_{i=t_0+1}^{r} t_0 \delta/(i-1) \qquad (2)$$

Ceci précise la sensibilité de la somme cumulée à une éventuelle rupture.

Sous H_0, les déviations sont de moyenne nulle et autocorrélées :

$$E(d_r d_{r+h}) = \Gamma_{r,h} = \gamma_h - \frac{1}{r-1} \sum_{j=1}^{r-1} \gamma_{r+h-j} - \frac{1}{r+h-1} \sum_{j=1}^{r+h-1} \gamma_{|r-j|} + \frac{1}{(r-1)(r+h-1)} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{r+h-1} \gamma_{|i-j|},$$

où $\gamma_h = \mathrm{cov}(z_t, z_{t+h})$ est l'autocovariance de z_t. Un processus de moyenne-mobile MA(Q) vérifie $\gamma_h = 0$ si $h > Q$. Pour un tel processus, l'expression de $\Gamma_{r,h}$ est :

$$\Gamma_{r,h} = \gamma_h \left(1 + o\left(\frac{1}{r}\right) - o\left(\frac{c}{r^2}\right)\right),$$

où $c = (Q\gamma_Q + (Q-1)\gamma_{Q-1} + \ldots + \gamma_1)/\gamma_0$. On supposera que l'expression de $\Gamma_{r,h}$ demeure vraie pour un processus ARMA(p, q), car ce dernier peut être approximé par un processus MA(Q) au sens de la convergence en moyenne quadratique :

$$E\left\{\left(u_t - \sum_{j=0}^{Q} \psi_j a_{t-j}\right)^2\right\} = \sigma_a^2 \sum_{j=Q+1}^{\infty} \psi_j^2 \xrightarrow[Q]{} 0.$$

Par conséquent, pour un k suffisament grand le processus $\{d_r, r > k\}$ sera considéré comme stationnaire et de même fonction d'autocovariance que z_t : $\Gamma_{r,h} = \Gamma_h = \gamma_h$. En pratique, on prendra $k > 10$.

2.2. L'INDICATEUR

Soit $\sigma^2 = \Gamma_0 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \Gamma_h$, la variance généralisée de $\{d_r, r > k\}$. Définissons la fonction aléatoire $\{X_n(t), 0 \leq t \leq 1\}$ appartenant à l'espace D(0, 1) des fonctions présentant des discontinuités de première espèce, continuité à droite et limite à gauche, comme :

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n-k}} S_{[nt]},$$

où $[nt]$ est la partie entière de nt. $X_n(t)$ est une fonction en escalier.

Nous voulons mettre en évidence le comportement asymptôtique de la somme cumulée normalisée X_n, sous l'hypothèse nulle. A partir de (1), les déviations d_r s'expriment comme une fonction de $\{a_r, a_{r-1}, \ldots\}$:

$$d_r = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{r-j} - \frac{1}{r-1} \sum_{t=1}^{r-1} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{r-t-j}.$$

On démontre suivant la référence [7], que d_r satisfait aux conditions du théorème central-limite pour les fonctions de processus mélangeants ([3], théorème 21.1), d'où la proposition :

Sous H_0, X_n converge en distribution vers le mouvement Brownien W. En régime stationnaire X_n est de moyenne nulle et peut être approché par le mouvement Brownien centré $\{W(t), 0 \leqq t \leqq 1\}$ qui vérifie : $E(W(t)) = 0$ et $\operatorname{cov}(W(t), W(s)) = \min(t, s)$. Lorsqu'il y a rupture, suivant (2) $E(X_n(t)) \neq 0$ après la date t_0. Si bien que tester la présence d'une rupture sur le phénomène z_t revient à tester la présence d'une rupture de la moyenne de $X_n(t)$ sur l'intervalle $(0, 1)$, où encore à vérifier le caractère Brownien centré de X_n. L'écart type de $W(t)$ étant $\sqrt{t}$, cela pourrait se résumer à regarder si X_n franchit la barrière $\pm \lambda \sqrt{t}$ pour laquelle le mouvement Brownien W a une probabilité uniforme de sortie. Suivant Brown, Durbin et Evans [6], on est amené à remplacer cette barrière par deux droites qui lui sont tangentes en $t = 1/2$, et pour lesquelles on connait la probabilité de sortie. Malheureusement cette méthode de détection perd de la puissance au voisinage de 1, puisque maintenant la probabilité de sortie n'est plus uniforme sur $(0, 1)$.

Nous considérons alors la fonction :

$$\operatorname{Sup}\{|X_n(t)|, \ 0 \leqq t \leqq 1\} = \operatorname{Max}\left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n-k}} |S_r|, \ k \leqq r \leqq n \right\},$$

qui converge en distribution vers $\operatorname{Sup}\{|W(t)|, \ 0 \leqq t \leqq 1\}$, dont on connait la loi :

$$\operatorname{Prob}\{\operatorname{Sup}|W(t)| > b, \ 0 \leqq t \leqq 1\} = 1 - \frac{4}{\Pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left(-\frac{\Pi^2(2k+1)^2}{8b^2}\right) = \alpha_W,$$

et on calcule numériquement que :

$$\alpha_W = 0.01 \text{ si } b = 2.807, \quad \alpha_W = 0.05 \text{ si } b = 2.241, \quad \alpha_W = 0.1 \text{ si } b = 1.960.$$

Si $\hat{\sigma}$ désigne une estimation de σ, l'indicateur de rupture proposé, s'énonce "pour un seuil b choisi, si $\operatorname{Max}\left\{ \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{n-k}} |S_r|, \ k \leqq r \leqq n \right\} > b$, alors on décidera de la présence d'une rupture". Le point délicat pour son application réside dans l'estimation de la variance généralisée, qui fait que cet indicateur n'est pas un test. Comme il a été dit au pragraphe 2.1, z_t a une représentation

moyenne-mobile MA(Q) approchée, et dans ce cas $\sigma^2 = \gamma_0 + 2 \sum_{h=1}^{Q} \gamma_h$, qui conduit à l'estimation $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{h=1}^{Q} \hat{\gamma}_h$, où $\hat{\gamma}_h = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (z_t - \bar{z})(z_{t+h} - \bar{z})$.
Reste à se donner un critère d'arrêt de sommation à Q. Pour un processus MA(Q) stationnaire et gaussien Barlett [2], a établi que si $h > Q$:

$$\mathrm{var}(\hat{\rho}_h) \simeq \frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{Q} \rho_i^2\right)$$

où $\rho_h = \gamma_h / \gamma_0$ est l'autocorrélation de rang h, et Anderson [1], que : $\hat{\rho}_h \simeq N(0, \mathrm{var}(\hat{\rho}_h))$. Le critère choisi en découle :

$$\text{si } \hat{\rho}_{h+1} \leqq \frac{2}{\sqrt{n}} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{h} \hat{\rho}_i\right) \text{ alors } Q = h.$$

En présence d'une rupture de faible amplitude, le biais introduit sur cette estimation affecte peu la puissance du test ; sinon il est nécessaire de pratiquer une estimation en partitionnant l'intervalle $(1, n)$.

Il est à remarquer que l'indicateur de Brown, Durbin et Evans [6], n'est pas robuste quant à l'indépendance. En effet, supposer abusivement l'indépendance pour un processus ARMA revient à considérer des sommes cumulées non normalisées, c'est-à-dire à normer par $\sqrt{\gamma_0}$ au lieu de $\sqrt{\gamma_0 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \gamma_h}$. Les résultats des simulations mettent en évidence ce manque de robustesse, même pour des structures faiblement autocorrélées.

2.3. PUISSANCE DE CET INDICATEUR

L'hypothèse alternative considérée est celle d'une rupture par saut : $E(z_t) = \mu + \delta \chi_{t > t_0}$. Pour une telle rupture, lorsque σ est supposé connu, l'indicateur est un test convergent. En effet, en reprenant l'expression (2), le biais de S_r est $\delta t_0 \left(\mathrm{Log} \frac{r}{t_0} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \chi_{r > t_0}$; par conséquent si t_0/n est constant le biais de $S_n / \sigma \sqrt{n-k}$ n'a pas de limite finie, quand n devient infiniment grand.

La puissance de l'indicateur est définie par $\beta = \mathrm{Prob}\{\mathrm{Sup}\, |X_n(t)| > b / H_1\}$. Des simulations pratiquées sur le modèle $z_t = \delta \chi_{t > t_0} + u_t$ où u_t est un processus AR(1) : $u_t = \phi u_{t-1} + a_t$, nous permet d'apprécier cette puissance. En réalisant NE expériences du même modèle déterminé par le triplet (ϕ, t_0, δ), β est estimé par $\hat{\beta} =$ (nombre de fois que : $\{\mathrm{Sup}\, |X_n(t)| > b\}$)/NE. Les résultats pour des séries de taille $n = 200$, sont portés dans les tableaux I. La puissance décroit quand ϕ se rapproche de la région de non stationnarité définie par le complémentaire de l'intervalle $]-1, +1[$. Cette puissance varie aussi en fonction de t_0 : en se ramenant à l'intervalle $(0, 1)$, le biais en t de $X_n(t)$ en fonction de la date de rupture t_0, est de la forme

$$b_{\delta,t}(t_0) = \delta t_0 \left(\mathrm{Log} \frac{t}{t_0}\right) \chi_{t > t_0} ;$$

ce biais est maximal en t si $t_0 = t/e$, où $\mathrm{Log}\, e = 1$, aussi plus la rupture est tardive après l'instant t/e, et moins le biais est important. Ceci explique que les puissances sont maximales, dans les simulations, pour $t_0 = n/4$. Pour y palier, on pourra considérer le modèle retour $\Phi(F)\, u_t = \Theta(F)\, e_t$, où F est l'opérateur avance $Fu_t = u_{t+1}$.

2.4. UN EXEMPLE

La figure 1a représente la série des accroissements annuels z_t d'ozone au centre ville de Los Angeles entre 1955 et 1965. Elle est la série différenciée de la série Z_t des moyennes mensuelles d'ozone, étudiée par Tiao et Box [14] : $z_t = Z_t - Z_{t-12}$. En janvier 1960 deux événements interviennent : le détournement de la circulation automobile du centre ville, par l'ouverture de l'autoroute du Golden State et l'entrée en vigueur d'une nouvelle loi qui réduit le taux de certains hydrocarbures dans l'essence vendue. En considérant janvier 1960 comme une date de rupture connue, Tiao et Box ont mis en évidence une baisse par saut $\hat{\delta}$ du niveau de l'ozone, qui se traduit sur la série z_t par une baisse seulement sur l'année 1960, comme le schématise la fonction indicatrice de signal carré en figure 1a.

Nous reprenons cette série en ignorant la date de rupture. Le modèle retenu est : $z_t = \delta_t \chi_{t>t_0} + u_t$ où $u_t = (1 - \theta_1 B)(1 - \theta_2 B^{12}) a_t$. La figure 1b est le processus de la somme cumulée normalisée : $\{|S_r|/\hat{\sigma}\sqrt{n-20},\, r > 20\}$. Une rupture est détectée au risque de première espèce de 0.1. Puis la rupture a été artificiellement supprimée en additionnant la fonction indicatrice à z_t. Cette fois aucune rupture n'est détectée ; les sommes cumulées correspondantes sont portées en figure 1c.

3. LE TEST DU RAPPORT DES VRAISEMBLANCES MAXIMALES

3.1. INTRODUCTION

Reprenons le modèle décrit dans l'introduction principale avec $\mu = 0$ et en se limitant aux processus autorégressifs dont l'ordre p est connue : $\Phi(B)\, u_t = a_t$. Par conséquent, les hypothèses sont :

$$H_0 : E(z_t) = 0, \qquad H_1 : E(z_t) = \delta_t \chi_{t>t_0},$$

et : $u_t = z_t$ sous H_0, $u_t = z_t - \delta_t \chi_{t>t_0}$ sous H_1.

Les p observations de départ $(z_{-p+1}, \ldots, z_0)$ sont supposées connues afin de considérer le processus conditionnellement à ces p valeurs (cf. [4]). Les chocs a_t du bruit blanc étant gaussiens et indépendants, le jacobien de l'application $u_t \to a_t = \Phi(B)\, u_t$ étant égal à 1, la densité conditionnelle de $z = (z_1, \ldots, z_n)'$ sous H_0 s'écrit :

$$p(z) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} \exp\{-(2\sigma_a^2)^{-1}\, S(\phi)\} \tag{3}$$

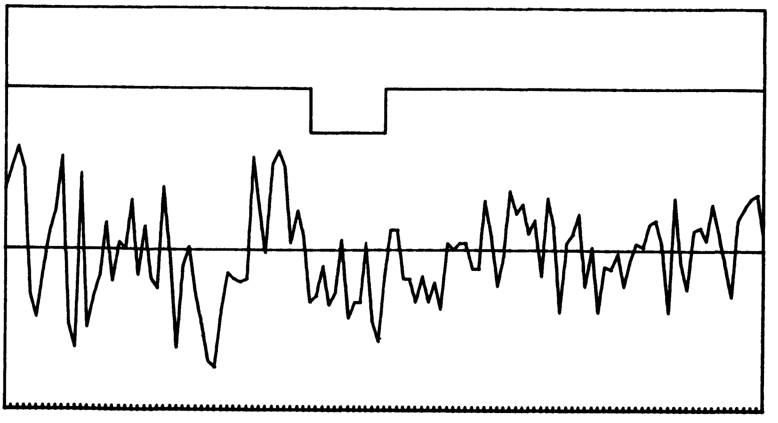


Figure 1a. – Ozone L.A.

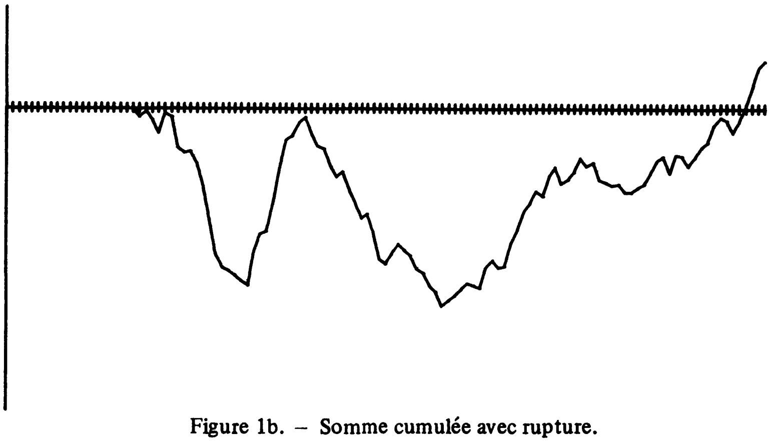


Figure 1b. – Somme cumulée avec rupture.

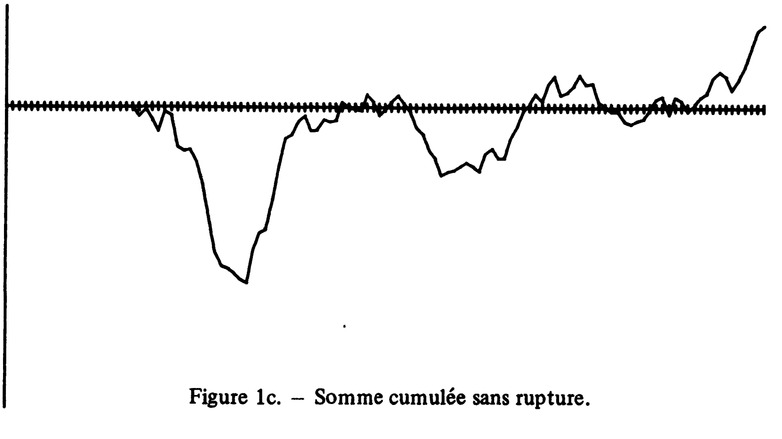


Figure 1c. – Somme cumulée sans rupture.

où $S(\phi) = \sum_{t=1}^{n} \{\Phi(B) u_t\}^2 = \sum_{t=1}^{n} \{\Phi(B) z_t\}^2$. Sous H_1, l'expression de la somme $S(\phi)$ est modifiée par l'introduction d'une espérance non nulle, elle sera notée si $t_0 = r$: $S_r(\phi, \delta) = \sum_{t=1}^{n} \{\Phi(B)u_t\}^2$, où $u_t = z_t - \delta_t \chi_{t>r}$.

Si $\hat{}$ et $\tilde{}$ désignent les estimateurs du maximum de vraisemblance sous H_0 et H_1 respectivement, alors à partir de (3) on calcule : $\hat{\sigma}_a^2 = S(\hat{\phi})/n$ et $\tilde{\sigma}_a^2 = S_r(\tilde{\phi}, \tilde{\delta})/n$. Le RVM pour une rupture en $t_0 = r$ est $(\tilde{\sigma}_a^2/\hat{\sigma}_a^2)^{-n/2}$; Pour une date de rupture inconnue on considère :

$$\text{Min}\,\{\Lambda_r(z),\ 1 < r < n\} \quad \text{où} \quad \Lambda_r(z) = S_r(\tilde{\phi}, \tilde{\delta})/S(\hat{\phi}).$$

Nous voulons tester une rupture par saut. Malheureusement si on choisit $\delta_t = \delta$, $S_r(\phi, \delta)$ n'est pas linéaire en $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p)'$ et δ ; Pour un AR(1) par exemple :

$$S_r(\phi, \delta) = \sum_{t=1}^{r} (z_t - \phi z_{t-1})^2 + (z_{r+1} - \phi z_r - \delta)^2 + \sum_{t=r+2}^{n} (z_t - \phi z_{t-1} - \delta(1 - \phi))^2$$

et l'on ne peut écrire formellement le rapport $\Lambda_r(z)$. Pour contourner la difficulté nous considérons l'hypothèse alternative suivante :

$$H_1 : \Phi(B) z_t = \Delta \chi_{t>t_0} + a_t,$$

où la rupture par saut Δ est introduire non plus sur la sortie z_t du filtre linéaire $\Phi^{-1}(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$, mais sur l'entrée a_t. $S_r(\phi, \delta)$ est maintenant linéaire ; pour un AR(1) par exemple : $S_r(\phi, \delta) = \sum_{t=1}^{n} (z_t - \phi z_{t-1} - \Delta \chi_{t>r})^2$.

L'espérance non nulle introduite sur z_t apparaît si on remarque que sous $H_1 : z_{t_0+i} = \Phi^{-1}(B) a_{t_0+i} + \Delta \sum_{j=0}^{i-1} \psi_j$; après t_0 une turbulence sur l'espérance de z_t se produit, elle se stabilise quant l'indice i croit, au niveau $\delta = \Delta\, \Psi(1) = \Delta/(1 - \phi_1 - \ldots - \phi_p)$. En pratique cette convergence est très rapide si $\Phi(B)$ n'a pas de racine trop près du cercle unité.

3.2. LA STATISTIQUE DU TEST

L'écriture formelle de $\Lambda_r(z)$ fait apparaître la décomposition : $\Lambda_r(z) = 1 - \lambda_r(z)$. Par ailleurs l'étude du comportement asymptôtique de $\lambda_r(z)$ nous amène à considérer $n\lambda_r(z)$, aussi le processus sur lequel la statistique du test est basée, est :

$$Y_{r,n} = n(1 - \Lambda_r(z)) \quad \text{si} \quad r < n,$$
$$Y_{n,n} = 0.$$

Le choix de l'hypothèse H_1 définie ci-dessus permet d'utiliser les résultats classiques de la régression linéaire, et on calcule en annexe I que pour n suffisament grand, c'est-à-dire pour des tailles de processus couramment rencontrées (n > 100) :

$$Y_{r,n} \simeq \frac{(n-r)\,\overline{z}_r'^2\,\{\hat{\Gamma}'(A^{-1}I)\,(A^{-1}I)'\hat{\Gamma} - 2\hat{\Gamma}'(A^{-1}I) + 1\}}{\left(1 - \frac{n-r}{n}\,\overline{z}_r'^2\, I'A^{-1}I\right)(\gamma_0 - \hat{\Gamma}'A^{-1}\hat{\Gamma})} \quad \text{si} \quad r < n ,$$

où I est le vecteur colonne ayant p "1", $\overline{z}_r' = \frac{1}{n-r}\sum_{t=r+1}^{n} z_t$, A la matrice $\{\hat{\gamma}_{|i-j|},\ 1 \leqq i,j \leqq p\}$ et $\hat{\Gamma}' = (\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_p)$, avec $\hat{\gamma}_i = \Sigma z_t\, z_{t-i}$.

Intéressons nous maintenant au comportement asymptôtique de $Y_{r,n}$ sous H_0 et pour cela définissons comme au paragraphe 2.2, le processus prolongeant $\{Y_{r,n}\}$ dans $D(0,1)$: $\{Y_{[nt]},\ 0 \leqq t \leqq 1\}$. Suivant l'annexe II :

Si $0 \leqq t < 1$, toute marginale $Y_{[nt]}$ converge en loi vers la variable aléatoire $Y(t) = (W(1) - W(t))^2/(1-t)$. Cependant, la suite des fonctions aléatoires $\{Y_{[nt]},\ 0 \leqq t \leqq 1\}$ ne converge pas en distribution. Pour cela, il suffit de vérifier que : $\limsup_{t\to 1} (W(1) - W(t))/\sqrt{1-t} = \infty$. En effet, cette limite est égale à : $\limsup_{t\to 1} W^0(t)/\sqrt{1-t}$ où $W^0(t) = W(t) - tW(t)$ est le pont brownien sur $(0,1)$, elle-même égale à $\limsup_{t\to\infty} V(t)/\sqrt{1+t}$, où

$$V(t) = (1+t)\,W^0(t/1+t)$$

est un mouvement Brownien sur $(0,\infty)$, obtenu par la transformation de Doob [9]. La loi du logarithme itéré : $\limsup_{t\to\infty} V(t)/\sqrt{2\,\mathrm{Log\,Log}\,t} = 1$ permet met de conclure.

Aussi, nous sommes amenés à considérer la fonction $\{Y^{\epsilon}_{[nt]}\}$ dans $D(0, 1-\epsilon)$ définie par $\{Y_{[nt]},\ 0 \leqq t \leqq 1-\epsilon\}$ et construite sur $\{Y_{r,n},\ 1 \leqq r \leqq n - n\epsilon\}$. On démontre suivant [7], que $\{Y^{\epsilon}_{[nt]}\}$ est tendue, ce qui permet d'énoncer la propriété :

La suite $\{Y^{\epsilon}_{[nt]}\}$ converge en distribution vers $\{Y(t),\ 0 \leqq t \leqq 1-\epsilon\}$. En définitive, la statistique retenue est :

$$\{\mathrm{Max}\, Y_{r,n},\ 1 < r \leqq n - n\epsilon\} = \{\mathrm{Sup}\, Y^{\epsilon}_{[nt]},\ 0 < t \leqq 1-\epsilon\}.$$

3.3. LE TEST

La région de rejet de l'hypothèse H_0 est définie par :

$$\{\mathrm{Max}\, Y_{r,n},\ 1 < r \leqq n - n\epsilon\} > c ,$$

et nous voudrions déterminer c correspondant au risque de première espèce $\alpha_n(c) = \mathrm{Prob}\,\{Y^{\epsilon}_{[nt]} > c,\ 0 \leqq t \leqq 1 - \epsilon/H_0\}$. Si on pose

$$U(t) = (W(1) - W(t))/\sqrt{1-t},$$

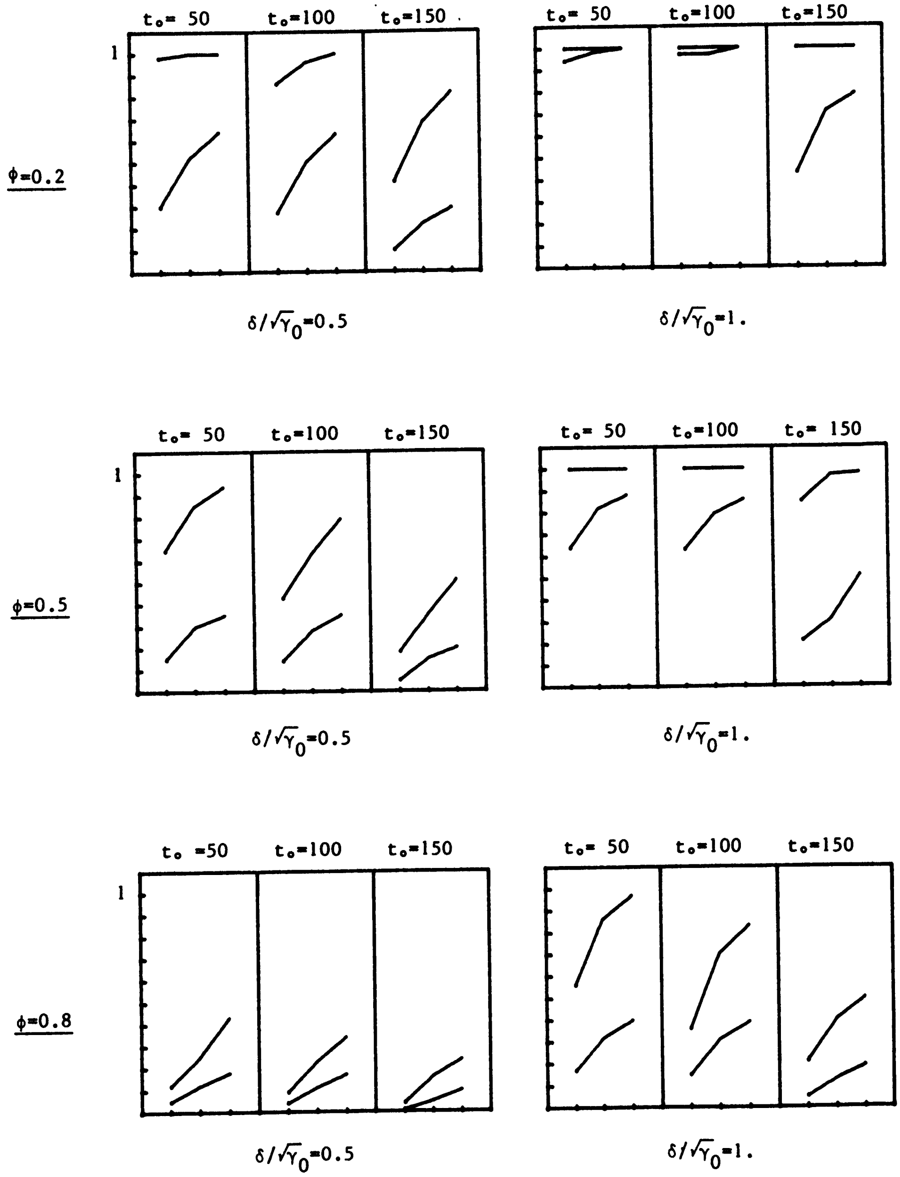
la limite $\alpha(c)$ de $\alpha_n(c)$ est :

$$\alpha(c) = \mathrm{Prob}\,\{-\sqrt{c} < U(t) < \sqrt{c},\ 0 \leqq t \leqq 1 - \epsilon/H_0\}$$

$$= \mathrm{Prob}\,\{-\sqrt{ct} < \xi(t) < \sqrt{ct},\ 1 \leqq t \leqq (1/\epsilon)/H_0\},$$

TABLEAUX I

Estimations des puissances de l'indicateur des sommes cumulées et du test du RVM, pour des risques de 1, 5 et 10 %, suivant le modèle $\{z_t = \delta \chi_{t>t_0} + u_t, t = 1, 200\}$ où u_t est un AR(1). Les puissances de l'indicateur sont systématiquement inférieures à celles du RVM.



où $\xi(t) = \sqrt{t}U(1 - 1/t)$ est un mouvement Brownien d'après le transformation de Doob [9]. Ainsi, on est ramené à un problème de franchissement de frontière par un mouvement Brownien, la frontière $\{f(t) = \pm \sqrt{ct}\}$. On pourrait chercher à approximer $\alpha(c)$ en calculant la probabilité de sortie du

Brownien $\xi(t)$ à travers deux droites tangentes à la parabole $\pm\sqrt{ct}$ au point d'abscisse $(1/\epsilon - 1)/2$, comme le font Brown, Durbin et Evans [6] : Les résultats numériques sont $c = 10.45$, 7.19, et 5.78 pour des risques de 1, 5 et 10 %. Mais des simulations sur des processus AR(1) montrent que pour ces valeurs critiques, le risque $\alpha_n(c)$ peut être le double de la probabilité espérée. Si bien qu'il est nécessaire de calculer par simulation les valeurs critiques du test ; Pour les processus AR(1) de taille 200, les valeurs critiques au risque de 1,5 et 10 % sont respectivement égales à :

$$\begin{array}{lll} 11.4\ ;\ 8.7\ ;\ 7.0 & \text{si} & \phi = 0.2, \\ 11.5\ ;\ 8.7\ ;\ 7.1 & \text{si} & \phi = 0.5, \\ 12.4\ ;\ 9.1\ ;\ 7.7 & \text{si} & \phi = 0.8. \end{array}$$

(Ces estimations seraient à considérer avec leurs intervalles de confiance).

La puissance du test est examinée suivant les mêmes simulations que celles décrites dans le paragraphe 2.3, et avec les valeurs critiques de ci-dessus. Cette puissance est systématiquement supérieure à celle de l'indicateur, et présente les mêmes variations que ce dernier en fonction des paramètres de rupture. Les résultats sont portés dans les tableaux I.

ANNEXE I

Les hypothèses sont si $r < n$: sous H_0 $z = \hat{X}\phi + a$

sous H_1 $z = \tilde{X}\beta + a$,

où $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p)'$, $\beta = (\phi', \Delta)'$ et $\tilde{X} = (\hat{X}, 1_r)$; 1_r est le vecteur ayant r "0" suivi de $n - r$ "1", et $\hat{X} = (Bz, B^2 z, \ldots, B^p z)$ avec $B^i z = (z_{1-i}, \ldots, z_{n-i})'$.

Les estimateurs des moindres carrés s'écrivent :

$$\hat{\phi} = (\hat{X}'\hat{X})^{-1}\hat{X}'z\,,\ \tilde{\beta} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'z$$

et $S(\hat{\phi}) = z'z - z'\hat{X}\hat{\phi}$, $S(\tilde{\beta}) = z'z - z'\tilde{X}\tilde{\beta}$. $\tilde{X}$ s'écrivant en fonction de $\hat{X}$ utilisons l'inverse de $\hat{X}'\hat{X}$ pour calculer $(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}$, et faire apparaître $S(\hat{\phi})$ dans l'expression de $S(\tilde{\beta})$. Avec les notations des matrices blocs :

$$(\tilde{X}'\tilde{X}) = \left[\begin{array}{c} \hat{X}' \\ \hline 1_r' \end{array}\right] (\hat{X} \mid 1_r) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{X}'\hat{X} & \hat{X}'1_r \\ \hline 1_r'\hat{X} & 1_r'1_r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A} & C \\ \hline C' & e \end{array}\right]$$

$$(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \underline{A}^{-1} + \frac{1}{s}(\underline{A}^{-1}C)(\underline{A}^{-1}C)' & \frac{1}{s}(\underline{A}^{-1}C) \\ \hline -\frac{1}{s}(\underline{A}^{-1}C)' & \frac{1}{s} \end{array}\right]$$

où $s = e - C'(\underline{A}^{-1}C)$, il vient :

$$S_r(\tilde{\beta}) = S(\hat{\phi}) - \frac{1}{s} z'X(\underline{A}^{-1}C)(\underline{A}^{-1}C)'\hat{X}'z - \frac{2}{s} z'\hat{X}(\underline{A}^{-1}C)\,1_r z + \frac{1}{s} z'1_r 1_r' z$$

2

soit par notation : $S_r(\tilde{\beta}) = S(\hat{\phi}) - R_r(z)$.

$C = \hat{X}'1_r = (Bz, \ldots, B^p z)'1_r$; Si on admet que pour n assez grand : $(B^k z)'1_r \simeq z'1_r$ alors $C \simeq (n-r)\overline{z}_r' I$ et

$$R_r(z) \simeq -\frac{1}{s}(n-r)^2 \overline{z}_r' \{n(\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_p)(\underline{A}^{-1}I)(\underline{A}^{-1}I)'(\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_p)'n$$
$$- 2n(\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_p)(\underline{A}^{-1}I) + 1\}$$

Par ailleurs $\underline{A} = \hat{X}'\hat{X} = (Bz, \ldots, B^p z)'(Bz, \ldots, B^p z) = n^2 A$, où A est une matrice symétrique dont les éléments sont les estimations sous H_0 des p premiers moments centrés du processus. Pour n assez grand, on suppose par exemple que $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_t^2 \simeq \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} z_{t-k}^2 \quad k = 1, \ldots, p-1$; si bien que $A \simeq \{\hat{\gamma}_{|i-j|}\}$.
En posant $\hat{\Gamma} = (\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_p)'$, $R_r(z)$ s'écrit :

$$R_r(z) \simeq -\frac{1}{s}(n-r)^2 \overline{z}_r'^2 \{\hat{\Gamma}'(A^{-1}I)(A^{-1}I)' - 2\hat{\Gamma}'(A^{-1}I) + 1\}$$

Suivant les mêmes approximations : $s \simeq (n-r)\left\{1 - \frac{n-r}{n}\overline{z}'^2 I'A^{-1}I\right\}$.

Revenons à la statistique du RVM : $\Lambda_r(z) = 1 - \frac{R_r(z)}{S(\hat{\phi})} = 1 - \lambda_r(z)$.
$S(\hat{\phi}) = z'z - z'\hat{X}\underline{A}^{-1}\hat{X}'z = n(\hat{\gamma}_0 - \hat{\Gamma}'A^{-1}\hat{\Gamma})$, donc l'expression de $Y_{r,n} = n\lambda_r(z)$ est établie. Dans le cas d'un AR(1), on a l'expression exacte :

$$\lambda_r(z) = \frac{(n-r)}{(S_z^2 S_{\underline{z}}^2 - S_{z\underline{z}}^2)} \; \frac{(S_{\underline{z}}^2 \overline{z}_r' - S_{z\underline{z}}\overline{\underline{z}}_r')^2}{(S_{\underline{z}}^2 - (n-r)\overline{\underline{z}}_r'^2)}$$

où $\overline{\underline{z}}_r' = \frac{1}{n-r}\sum_{t=r+1}^{n} z_{t-1}$, $S_z^2 = z'z$, $S_{\underline{z}}^2 = (Bz)'(Bz)$, $S_{z\underline{z}} = z'(Bz)$.

ANNEXE II

Loi asymptôtique de $Y_{r,n}$ pour $r/n = t$. Les convergences en probabilité $\hat{\Gamma} \xrightarrow{P} \Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)'$ et $A \xrightarrow{P} M$, M matrice des moments, font apparaître asymptôtiquement l'équation de Yule et Walker (cf. [4]) : $A^{-1}\hat{\Gamma} \xrightarrow{L} M^{-1}\Gamma = \phi$ et $(A^{-1}I)'\hat{\Gamma} \xrightarrow{L} \sum_{i=1}^{p} \phi_i$. L'application de D(0, 1) dans lui même $x \longrightarrow h(x)$, définie par $(h(x))(t) = x(1) - x(t)$ étant continue,

$$(X_n(1) - X_n(t)) \xrightarrow{D} (W(1) - W(t)) ;$$

ceci permet d'étudier la convergence de $\overline{z}_r'$ puisque $\overline{z}_r' = \frac{\sigma\sqrt{n}}{n-r}\left(X_n(1) - X_n\left(\frac{r}{n}\right)\right)$.

Avec ces résultats, on montre que :

$$Y_{r,n} \xrightarrow{L} \sigma^2 \frac{(W(1) - W(t))^2}{(1 - t)} \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i\right)^2}{\left(\gamma_0 - \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \phi_i\right)}$$

La fonction d'autocovariance du processus est :

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \Psi(B) \Psi(B^{-1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k, \quad \text{où} \quad \Psi(B) = \Phi^{-1}(B).$$

On en déduit : $\sigma^2 = \gamma(1) = \sigma_a^2 \Phi^{-2}(1)$. D'autre part $\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i\right)^2 = \Phi(1)^2$, donc $\sigma^2\left(1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i\right)^2 \left(\gamma_0 - \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \phi_i\right) = \sigma_a^2 / \left(\gamma_0 - \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \phi_i\right)$, or les processus AR(p) vérifient : $\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \ldots + \phi_p \gamma_p + \sigma_a^2$; La loi limite est donc établie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.L. ANDERSON (1942). – Distribution of the serial correlation coefficient. *The Annals of the Mathematical Statistics,* 13, 1.

[2] M.S. BARLETT (1946). – On the theorical specification of sampling properties of autocorrelated time series. *Journal of the Royal Statistical Society,* B, 28.

[3] P. BILLINGSLEY (1968). – Convergence of Probability Measures. *John-Wiley.*

[4] B.E.P. BOX et M.J. JENKINS (1970). – Time Series Analysis, Forecasting and Control. *Holden-Day.*

[5] G.E.P. BOX et G.C. TIAO (1975). – Intervention analysis with applications to economic and environment problems. *Journal of the American Statistical Association,* 70, 349.

[6] R.L. BROWN et J. DURBIN et J.M. EVANS (1975). – Techniques for testing the constancy of regression relationships over times. *J. R. Stat. Soc,* 37, 2.

[7] B. CHALMOND (1979). – *Ruptures de modèles pour des processus autorégressifs.* Thèse de 3e cycle. Université Paris Sud.

[8] J. DESHAYES et D. PICARD (1979). – Application aux tests de rupture de régression. *Astérisque 68.*

[9] J.L. DOOB (1949). – Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorem. *Ann. Math. Stat,* 20.

[10] D. HAWKINS (1977). – Testing a sequence for a shift in location. *J. Amer. Stat. Ass,* 72, 357.

[11] R.A. JONHSON et M. BAGSHAW (1974). – The effect of serial correlation on the performance of cusum test. *Technometrics,* 16, 1.

[12] R. MARONA et V. YOHAI (1978). – A bivariate test for the detection of a systematic change in mean. *J. Amer. Stat. Ass,* 73, 363.

[13] E.S. PAGE (1955). – A test for a change in a parameter occuring at an unknow point. *Biometrika,* 42.

[14] G.C. TIAO et G.E.P. BOX (1975). – *Journal of Air Pollution,* 25.