

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. RINGLER

Une modélisation bayésienne du taux de défaillance en fiabilité

Revue de statistique appliquée, tome 29, n° 1 (1981), p. 43-56

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1981__29_1_43_0

© Société française de statistique, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE MODELISATION BAYESIENNE DU TAUX DE DEFAILLANCE EN FIABILITE

J. RINGLER

MATRA 37, av. Louis Bréguet – 78140 Vélizy

RESUME

L'approche classique en fiabilité, dans laquelle il n'est pas fait de "détail" entre les taux de défaillance des divers composants électroniques constituant un lot réputé homogène, conduit à un certain nombre de difficultés formelles qui seront mises en évidence. Il est alors proposé une nouvelle approche, dans laquelle chaque composant du lot est caractérisé par sa "capacité propre de résistance à la contrainte". Cette approche conduit à postuler l'existence d'un "lambda" individuel attaché à chaque composant, et donc celle d'une distribution statistique des "lambda" au niveau du lot.

Prenant cette distribution pour loi "a priori", un traitement bayésien est alors mis en œuvre. Il en résulte la formalisation d'un taux de panne inconditionnel reflétant le taux de panne moyen du lot considéré. En choisissant pour distribution a priori une loi de type gamma, justifiée par des raisons d'ordre pratique et théorique, il sera montré que le taux de panne inconditionnel décroît hyperboliquement avec le temps. Il s'en suit un nouveau profil de la "courbe en baignoire", dans lequel le palier horizontal devient légèrement incliné. Enfin, le modèle proposé permet de trouver une relation simple entre le temps de déverminage réalisé sur un lot de composants et le taux de panne inconditionnel de ce lot en fin de déverminage.

1. QUELQUES CONSIDERATIONS GENERALES

Il est fort peu douteux que, dans le domaine de la fiabilité, aucun concept n'ait eu, à ce jour, une faveur équivalente à celle du très – et peut-être trop – célèbre "taux de défaillance" désigné communément par la lettre grecque "lambda".

Sur un plan purement formel, le "lambda" des fiabilistes doit être étroitement associé au problème de la survivance d'un mécanisme pris au sens large : composants – mécaniques ou électriques – chaînes cinématiques, dispositifs électroniques complexes, systèmes pyrotechniques, etc. Plus précisément, si l'on désigne par $R(t)$ la fiabilité – ou probabilité de survie – d'un mécanisme

Le présent article a été présenté par l'auteur au Second Colloque International sur la Fiabilité et le Maintenablement (Perros-Guirec – Trégastel, Sept. 1980).

déterminé à l'instant t , et par dR la probabilité élémentaire d'avarie de ce mécanisme entre les instants t et $t + dt$, le taux de défaillance peut être considéré comme une fonction du temps $\lambda(t)$ ayant pour expression :

$$\lambda(t) = \frac{-1}{R(t)} \times \frac{dR}{dt}$$

Dans un domaine confiné au champ de l'électronique, il semblerait, de manière empirique, que, dans le cas d'un lot suffisamment important de composants homogènes, c'est-à-dire du même type et d'un niveau de qualité analogue, les instants d'apparitions de pannes franches de ces composants soient régis par un processus de mortalité sensiblement poissonnien, ce qui conduit à admettre une valeur à peu près constante – donc indépendante du temps – du taux de défaillance associé aux composants du lot considéré. Bien entendu, ce taux constant dépend à la fois du type de composant, de son niveau de qualité, et de son profil d'utilisation.

L'admission quasi unanime d'un taux de panne constant des composants électroniques conduit ainsi à une grande simplification des calculs de fiabilité, pour ne citer que l'addition des "lambda" lorsque l'on a affaire à des composants en série, et permet par ailleurs l'élaboration de banques de données de "lambda". Ce sont probablement ces deux raisons qui, à elles seules, expliquent ce succès incontesté du "lambda" dans le champ d'activités de la fiabilité. Si l'on veut bien se remémorer, enfin, que l'éclosion de la fiabilité en tant que technique spécifique de la prévision s'est faite en phase avec l'avènement de l'électronique, il n'y a dès lors plus lieu de s'étonner de cet engouement des spécialistes en fiabilité à raisonner en terme de "lambda", quitte même, parfois, à étendre ce concept, non sans certains risques, à des domaines autres que l'électronique, pour ne citer que celui de la mécanique.

Ces quelques rappels étant faits, si l'on se propose d'aller un peu plus loin au fond des choses, on peut cependant se rendre compte, au prix de quelques réflexions élémentaires, que la signification profonde du "lambda" n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît.

Par exemple, lorsque l'on considère un ensemble de composants électroniques, doit-on attribuer à chaque composant la même valeur de "lambda", quand bien même cet ensemble constituerait un lot assez homogène ? A la limite, cette question a-t-elle même un sens, et, dans la négative, seule la notion de "lambda" attaché à un composant abstrait qui représenterait en quelque sorte le composant le plus banalisé du lot considéré ne devrait-elle pas être susceptible d'être prise en compte ? La célèbre "courbe en baignoire" – ou bathtub – curve – (Fig. 1), elle aussi largement reconnue comme digne de foi par la majorité des spécialistes en fiabilité, invite d'ailleurs à aller dans ce sens, car, si l'on raisonnait en terme de "lambda" individuel, on voit mal pourquoi, durant les premiers temps de fonctionnement d'un composant donné, le taux de panne de ce composant diminuerait ou, autrement dit, par quel facteur miraculeux la capacité à survivre de ce composant s'améliorerait au cours du temps. Il s'en suit que l'image de la courbe en baignoire est bien plutôt représentative d'un taux de panne correspondant à celui d'un composant moyen d'un lot donné, lot dont le niveau de qualité s'améliore au fur et à mesure que les composants qui étaient potentiellement les plus faibles se voient progressivement éliminés.

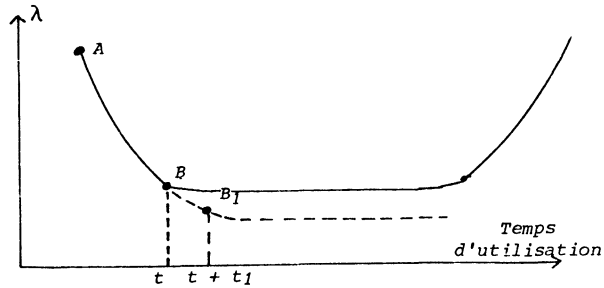


Figure 1. — La courbe en baignoire classique ou “bathtub - curve”

Ainsi, sur la vue de la classique “bath-curve”, passé la période dite “infantile” — partie AB sur la figure 1 —, le taux de panne du composant représentant le mieux le composant moyen du lot à un moment donné de l’existence de celui-ci, apparaît se stabiliser autour d’une valeur bien déterminée. Le composant est à ce moment considéré comme étant dans sa période de “vie utile” dont l’aboutissement conduit, beaucoup plus tard, à un état où les phénomènes d’usure font que le “lambda” se remet à croître. En suivant cette approche classique, c’est durant la période de “vie utile” que se manifesterait un processus de mortalité de type poissonien dans la mesure où c’est dans cette période que le taux de panne, qui est celui fourni par les tables de données, semble être constant.

Toutefois, un nouveau problème se pose relativement à cette période de “vie utile” des composants. Une difficulté apparaît en effet à la lecture des tables de données elles-mêmes. Ces tables indiquent en effet diverses valeurs de “lambda” pour un type de composant déterminé travaillant dans des conditions de contraintes et d’environnement bien spécifiées, en fonction de certains niveaux de qualité attribués à ce composant. Par niveau de qualité, nous entendons l’ensemble plus ou moins important des tests et contrôles qui ont été mis en œuvre pour éliminer la plus grande proportion de composants potentiellement viciés. D’un bout à l’autre de l’échelle, par exemple, nous trouvons le composant le plus standard d’une part, et le composant “spatial” d’autre part, dont les “lambda” associés peuvent être entre eux dans un rapport supérieur à cent. Une technique parmi celles visant à éliminer les composants les plus faibles — techniques dites de “screening” — consiste à laisser vieillir un certain temps, parfois sous contraintes accélérées, un lot de composants. On admet alors qu’au terme de ce vieillissement artificiel ou “déverminage”, on est passé du point A au point B de la courbe en baignoire, et que la période de vie utile à “lambda” constant peut être considérée comme abordée.

Dans ces conditions, comment expliquer qu’un “déverminage” plus prolongé par exemple que le précédent et correspondant de la sorte à un niveau de qualité supérieur du lot de composants considéré, aurait conduit, après consultation des tables de données, à un taux de panne meilleur, c’est-à-dire plus faible en valeur absolue ? Car il s’agit bien, à ce niveau, de taux de panne constants, dans un cas comme dans l’autre. Faut-il alors, comme le font certains auteurs, admettre l’existence de paliers horizontaux différents de la courbe en baignoire — en pointillés sur la figure 1 — paliers d’autant plus bas que le déverminage a été davantage prolongé ? Dans cette vision des choses, on peut toutefois se demander pourquoi, une fois amorcé le palier nominal en trait plein, le taux de panne ne continue pas à décroître, par raison de similitude avec un complément de déverminage.

Dans l'optique inverse, où l'on considère que le fait de passer d'un déverminage de durée t à un déverminage de durée $t + t_1$ conduit à passer du point B au point B_1 sur la partie descendante de la courbe en baignoire, on ne peut plus, en toute rigueur, raisonner en terme de taux de panne constant dans une période d'utilisation du composant compris entre t et $t + t_1$, ce qui va à l'encontre du principe des tables de données qui, pour un niveau de qualité de ce composant correspondant à un déverminage de durée t , lui assigneraient un "lambda" bien déterminé et parfaitement constant.

En résumé, si l'on postule l'existence des paliers horizontaux des courbes en baignoire, on est amené à caractériser un niveau de déverminage donné — hypothèse de multi-paliers pour la même courbe en baignoire —, ou bien, dans l'hypothèse d'un palier unique, par une position plus ou moins basse sur la partie gauche de la courbe.

Ces deux approches conduisant, comme on l'a vu, à des contradictions de principe avec les tables de données, il apparaît légitime d'envisager une nouvelle approche susceptible de déboucher sur un profil quelque peu différent de la classique "bath-curve". Pour cela, quelques compléments de réflexion sur la nature profonde du lambda vont être apportés dans le cadre du chapitre suivant.

2. UN POINT DE VUE SUR LA SIGNIFICATION DU LAMBDA

De manière sous-jacente à sa formulation mathématique, le "lambda" traduit, sur un plan plus physique, la capacité plus ou moins grande d'un composant — ou d'un type déterminé de composant — à résister avec succès aux différentes contraintes d'environnement auxquelles il est susceptible d'être soumis.

Or, comme nous pensons l'avoir démontré au cours de nos réflexions précédentes, il apparaît que le "détail" n'est pas fait parmi les composants issus d'un même lot de fabrication, ayant le même niveau de qualité et un profil d'utilisation identique. La fiabilité de tous les composants du lot est ainsi rendue banalisée, ce qui revient à affecter le même "lambda" à chacun de ces composants. Plus précisément, la succession des défaillances survenant au cours du temps n'est envisagée ainsi que sous les auspices d'un processus de mortalité poissonien affectant l'ensemble du lot, sans préjugé du fait que tel composant ayant été trouvé défaillant avant tel autre pouvait être "potentiellement" moins résistant que ce dernier.

Dans ces conditions, une philosophie différente consiste à ne plus admettre cette identité de "résistances potentielles" pour chacun des composants d'un même lot. Nous allons, au contraire, caractériser un composant donné par un certain degré de résistance à une contrainte de nature déterminée (électrique, thermique...). On désignera ainsi par $r_{i,j}$ la résistance potentielle du $i^{\text{ème}}$ composant à la contrainte de nature j . En première approximation, il suffira d'admettre que la quantité $r_{i,j}$ représente le niveau maximum de contrainte de nature j que peut supporter sans détérioration notable le $i^{\text{ème}}$ composant considéré. Le processus est, en réalité, plus complexe, en raison des

effets cumulatifs des contraintes répétées et, a fortiori, de contraintes combinées de natures différentes.

La présente philosophie n'en serait pour autant pas invalidée, car il suffirait, pour être plus précis, de considérer de manière plus extensive une fonction globale $r_{i,\langle j \rangle}$ dans laquelle le symbole $\langle j \rangle$ traduit la prise en compte de contraintes simultanées $1, 2, \dots, j, \dots$.

En suivant cette philosophie, nous nous trouvons ainsi fondés à admettre que le phénomène "défaillance" d'un composant "i" est, en réalité, la résultante de deux facteurs tout à fait indépendants l'un de l'autre :

- d'une part la résistance $r_{i,j}$ du composant à toute contrainte j
- d'autre part le spectre véritable de chacune des contraintes auxquelles ce composant est soumis.

De manière plus imagée, on a représenté, sur la figure 2, un même spectre de contrainte de nature j appliquée à deux composants i et k , d'un même type, mais présentant des niveaux différents de résistance à la contrainte j , soit respectivement $r_{i,j}$ et $r_{k,j}$. Si l'on admet, en première approximation, que ces niveaux restent à peu près constants dans la période de "vie utile" des composants considérés - autrement-dit avant les premiers symptômes de l'usure - on voit, sur la figure 2, que les composants i et k seraient respectivement défaillants aux instants t_i et t_k avec $t_k > t_i$.

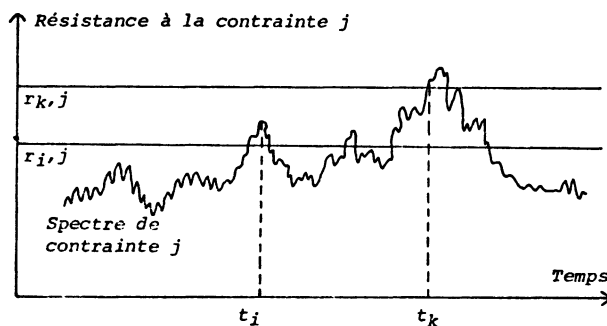


Figure 2

En réalité, deux composants différents ne sont jamais soumis à des spectres de contraintes j rigoureusement identiques. C'est pourquoi, en pratique, deux composants qui présenteraient, dans un cas limite théorique, des niveaux équivalents de résistance à l'ensemble des contraintes $\langle j \rangle$, ont peu de chance de tomber défaillants simultanément. Plus précisément, cela signifie que, si le taux de défaillance d'un composant donné est, pour un environnement déterminé, directement corrélé à sa résistance aux contraintes $\langle j \rangle$ auxquelles il est soumis c'est, en revanche, le spectre exact des contraintes $\langle j \rangle$ qui est la cause d'un processus de mortalité apparemment poissonien. La connaissance parfaite d'un tel spectre multidimensionnel étant pratiquement inaccessible, on conçoit bien que le phénomène de défaillance catalectique puisse être considéré comme étant davantage de nature aléatoire que de nature déterministe.

Cette philosophie étant acceptée, il apparaît à présent intéressant d'en explorer les conséquences au niveau d'un lot entier de composants.

Dans cet objectif, la prise en compte de l'existence d'un éventail, plus ou moins étendu, des résistances à la contrainte des différents composants du lot conduit, de façon naturelle, à l'utilisation d'une approche bayésienne.

3. UNE MODELISATION BAYESIENNE DU TAUX DE DEFAILLANCE

Considérons un lot de composants d'un type déterminé et issu d'une même ligne de fabrication.

Si l'on admet, pour chaque composant individualisé "i" de ce lot, une résistance $r_{i,\langle j \rangle}$ au spectre de contraintes $\langle j \rangle$, on est conduit à admettre l'existence d'une distribution statistique $g(r_{i,\langle j \rangle})$ des quantités $r_{i,\langle j \rangle}$. Or, on l'a vu précédemment, le taux de défaillance λ_i du composant i est une quantité mathématique directement corrélée à la résistance au spectre de contraintes $r_{i,\langle j \rangle}$ de ce composant, ce qui signifie qu'à une fonction $r_{i,\langle j \rangle}$ donnée correspond univoquement une valeur λ_i déterminée.

Par conséquent, l'existence de la distribution $g(r_{i,\langle j \rangle})$ entraîne celle, de manière aussi univoque, de la même distribution $g(\lambda_i)$ sur les taux de défaillance des composants du lot considéré.

Notons bien que, contrairement à l'approche bayésienne classique dans laquelle la quantité λ_i apparaîtrait comme une variable aléatoire censée représenter un taux de défaillance unique mais inconnu, chaque λ_i est ici parfaitement déterminé par univocité avec la fonction $r_{i,\langle j \rangle}$ et a, par conséquent une valeur "objective". La distribution $g(\lambda_i)$ — que nous désignerons dorénavant, pour simplifier l'écriture par $g(\lambda)$ — représente ainsi la distribution de quantités physiques parfaitement déterminées — celle des taux de défaillance des composants d'un lot —, et non celle d'une variable aléatoire. Cependant, à partir du moment où le nombre de composants du lot est suffisamment important, ce que nous supposons, nous sommes fondés à admettre une variation sensiblement continue sur l'ensemble des "lambda" du lot considéré, et donc à traiter la distribution $g(\lambda)$ comme celle d'une variable aléatoire pour laquelle la quantité différentielle $d\lambda$ représenterait, en réalité, la différence élémentaire des taux de défaillance entre deux composants de résistances à la contrainte infiniment voisines.

Ces remarques étant faites, revenons sur la fonction $g(\lambda)$. Celle-ci reflète la distribution statistique des "lambda" des composants survivants du lot à un moment défini de l'existence — ou de l'utilisation — de ce dernier. En effet, il a été vu précédemment — sur l'exemple de la figure 2 — que les composants ayant les "lambda" les plus élevés sont ceux qui, a priori, ont tendance à tomber défectueux le plus rapidement. Cela signifie qu'au fur et à mesure de l'évolution de la vie opérationnelle des composants du lot considéré, la moyenne de la distribution $g(\lambda)$ va se déplacer vers la gauche, comme le précise la figure 3.

Nous allons à présent préciser ces réflexions de manière plus analytique, en désignant par :

— $f(t/\lambda)$ la densité de probabilité de l'instant de panne d'un composant ayant un taux de défaillance égal à λ

– $f(t)$ la distribution inconditionnelle de l'instant d'une panne portant sur l'ensemble des composants du lot considéré.

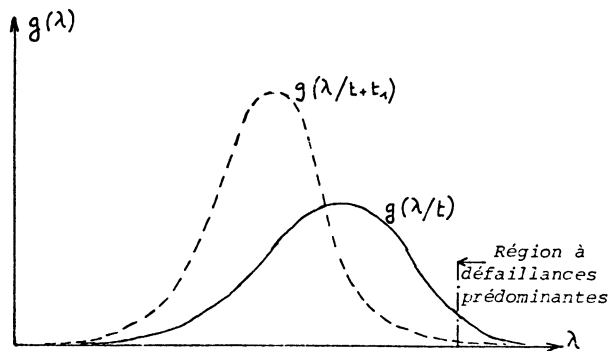


Figure 3

Sur la base de ces définitions, l'expression de la distribution inconditionnelle $f(t)$ peut être établie, en suivant la méthode bayésienne, comme étant une probabilité marginale de l'instant de panne portant sur l'ensemble des valeurs des "lambda", c'est-à-dire, a priori, entre zéro et l'infini.

Il s'en suit que :

$$f(t) = \int_0^{\infty} f(t/\lambda) g(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

La difficulté majeure réside en fait, comme dans toute approche de nature bayésienne, dans le "bon choix" de la distribution a priori – c'est-à-dire à l'instant "zéro" – $g_0(\lambda)$. Il va de soi que cette distribution doit refléter au mieux la véritable dispersion des "lambda" des composants du lot en début de vie opérationnelle de ce dernier.

Or, cette dispersion est, dans la pratique, plus ou moins mal connue. On pourrait, par exemple, imaginer une distribution uniforme dans le cas de l'incertitude maximum, ou, dans l'hypothèse de meilleures connaissances sur cette dispersion, des distributions de type Weibull ou log-normales.

Dans le cas présent, nous préférons partir d'une distribution de type gamma à deux paramètres, α et β , et cela pour les deux raisons suivantes :

- la conjuguée naturelle bayésienne de la loi de probabilité exponentielle, correspondant ici à la fonction $f(t/\lambda)$, n'est autre que la loi gamma
- de par l'existence de deux paramètres et des aspects très différents susceptibles d'être pris par la loi gamma suivant les valeurs attribuées à ces paramètres, cette loi s'adapte bien à des types de distribution très variés et présente de la sorte une grande souplesse d'utilisation.

Nous considérons donc comme distribution initiale des "lambda" du lot de la fonction :

$$g_0(\lambda) = \frac{e^{-\lambda/\beta} \lambda^{\alpha}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1)} \quad (2)$$

où $\Gamma(\alpha + 1)$ représente la fonction gamma incomplète pour la valeur $\alpha + 1$ de la variable.

De plus, nous admettons que cette distribution gamma initiale est celle des "lambda" d'un lot dont les composants "franchement défectueux" – c'est-

à-dire qui ne fonctionneraient déjà pas à l'instant zéro – ont préalablement été éliminés par un certain nombre de contrôles préliminaires (contrôles visuels, tests électriques, etc.).

La notion de “lambda” liée ultérieurement à un processus de mortalité exponentiel ne semble, en effet, devoir présenter aucune signification pour des composants déjà défectueux en début d'utilisation, autrement dit préalablement à l'instant zéro.

En tenant compte de l'hypothèse de mortalité exponentielle pouvant s'appliquer à un composant bien défini, on peut écrire :

$$f(t/\lambda) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (3)$$

expression dans laquelle λ représente le taux de défaillance propre au composant considéré.

La distribution inconditionnelle de l'instant de panne au niveau de l'ensemble des composants du lot peut donc s'écrire, d'après (1) :

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-\lambda t} e^{-\lambda/\beta} \lambda^\alpha}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1)} d\lambda$$

Après intégrations par partie successives, il vient :

$$f(t) = \frac{(\alpha + 1) \beta}{(1 + \beta t)^{\alpha+2}} \quad (4)$$

En désignant par $R(t)$ la fiabilité inconditionnelle sur le lot à l'instant t , on peut encore écrire :

$$R(t) = 1 - \int_0^t f(u) du = \int_t^\infty \frac{(\alpha + 1) \beta}{(1 + \beta u)^{\alpha+2}} du = \left(\frac{1}{1 + \beta t} \right)^{\alpha+1} \quad (5)$$

Enfin, si l'on désigne par $h(t)$ le taux de défaillance inconditionnel sur le lot à l'instant t , on a :

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

soit, d'après (4) et (5) :

$$h(t) = \frac{(\alpha + 1) \beta}{1 + \beta t} \quad (6)$$

Ce dernier résultat est très important. Il montre en effet que, sous l'angle bayésien et dans l'hypothèse d'une distribution a priori de type gamma, le taux de défaillance inconditionnel décroît hyperboliquement avec le temps de fonctionnement.

Nous admettrons toutefois une telle représentation comme valide dans la limite de période dite de “vie utile” caractérisant le type de composant considéré. En effet, le modèle (6) ne traduit pas l'effet de vieillissement qui, comme l'on sait, apparaît au bout d'une période généralement assez longue. Plus précisément, si l'on revient aux considérations théoriques exposées au paragraphe 2, on devra relier le phénomène de vieillissement à une décroissance, à partir d'un

temps de fonctionnement plus ou moins long, de la fonction "résistance à la contrainte" $r_{i,j}$ qui avait été supposée constante pour un composant donné (Fig.2).

La prise en compte du phénomène de vieillissement pourrait conduire à un modèle général, quel que soit t , du taux de défaillance inconditionnel ayant pour forme :

$$h(t) = \frac{(\alpha + 1)\beta}{1 + \beta t} e^{\gamma t} \quad (7)$$

le facteur exponentiel, dans lequel la constante γ est nettement inférieure à 10^{-4} pour la majorité des types de composants, étant reconnu comme représentant assez bien l'effet du vieillissement sur le taux de défaillance.

Il est aisé de démontrer, enfin, que la décroissance du taux de défaillance inconditionnel $h(t)$ traduit bien le déplacement vers la gauche de la distribution a priori $g_0(\lambda)$. Soit, en effet, $g(\lambda/t)$ la distribution des taux de défaillance des composants encore en vie à l'instant t .

Cette distribution a pour expression, en vertu du théorème de Bayes :

$$g(\lambda/t) = \frac{g_0(\lambda) \cdot e^{-\lambda t}}{\int_t^\infty g_0(\lambda) e^{-\lambda t} d\lambda} = \frac{e^{-\left(\frac{1}{\beta} + t\right)\lambda} \lambda^\alpha}{\int_0^\infty e^{-\lambda\left(\frac{1}{\beta} + t\right)} \lambda^\alpha d\lambda} \quad (8)$$

Il apparaît donc que la distribution $g(\lambda/t)$ est une distribution de type gamma dont les paramètres α' et β' sont tels que :

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha \\ \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\beta} + t \end{cases}$$

La valeur moyenne $m'(\lambda)$ de cette nouvelle distribution n'est autre que le taux de défaillance inconditionnel à l'instant t .

On peut en effet vérifier que :

$$m'(\lambda) = \beta'(\alpha' + 1) = \frac{(\alpha + 1)\beta}{1 + \beta t} = \frac{m_0(\lambda)}{1 + \beta t},$$

en désignant par $m_0(\lambda)$ la valeur moyenne de la distribution initiale $g_0(\lambda)$.

Le déplacement dans le temps vers la gauche de la distribution $g(\lambda/t)$ peut donc être mesuré par la quantité $1 + \beta t$: rapport entre les moyennes des distributions $g(\lambda/t)$ et $g_0(\lambda)$.

On peut enfin noter le resserrement de la distribution $g(\lambda/t)$ au cours du temps. En effet, si l'on désigne par $\sigma'(\lambda)$ l'écart-type de cette distribution à l'instant t , on a :

$$\sigma'(\lambda) = \beta' \sqrt{\alpha + 1} = \frac{\beta'}{\beta} \sigma(\lambda) = \frac{\sigma(\lambda)}{1 + \beta t}$$

où $\sigma(\lambda)$ représente l'écart type de la distribution initiale $g_0(\lambda)$.

Le resserrement au cours du temps de la distribution $g(\lambda/t)$ peut donc être également caractérisé par la quantité $1 + \beta t$: rapport entre les écart-types des distributions $g(\lambda/t)$ et $g_0(\lambda)$.

4. CONCLUSION ET PERSPECTIVES D'APPLICATION

L'approche bayésienne qui vient d'être menée sur le taux de défaillance des composants électroniques débouche naturellement sur un nouveau profil de la "classique" courbe en baignoire. En réalité, le terme de "baignoire" appliqué à ce nouveau profil devient même incorrect, dans la mesure où le palier horizontal n'existe plus. Si l'on se base, en effet, sur le modèle généralisé (7) du taux de défaillance inconditionnel, on voit en effet apparaître, sur la courbe en trait plein tracée dans le plan (t, λ) du diagramme tri-dimensionnel de la figure 4 :

- une période de décroissance hyperbolique qui caractérise la vie utile du lot de composants
- une remontée exponentielle qui caractérise le vieillissement des composants à partir d'un temps de fonctionnement élevé :

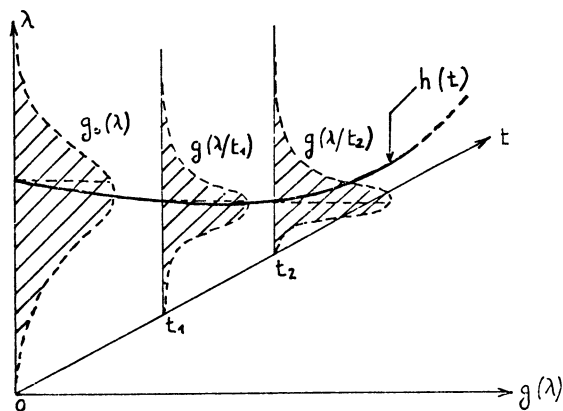


Figure 4

Dans cette optique, la mise en fonctionnement d'un lot donné de composants peut apparaître comme un déverminage qui se poursuit dans le temps, dans la mesure où, avant usure, le taux de panne inconditionnel au niveau des composants survivants continue à décroître. Le déverminage "effectif" reste, toutefois, une opération de vieillissement particulière qui consiste à amener dans un minimum de temps, le taux de panne inconditionnel depuis l'extrémité gauche M_0 de la courbe $h(t)$ jusqu'à un point M suffisamment à droite sur cette courbe, la mise en œuvre de contraintes accélérées (Ex : température de 125°C , tension de blocage maximum pour les semi-conducteurs, etc.) permettant de réduire artificiellement la durée nécessaire à cette opération.

Par voie de fait, le déverminage "effectif" peut être perçu comme un essai de vieillissement artificiel d'une durée telle qu'au bout de l'opération, les composants survivants aient atteint un niveau de fiabilité compatible avec un objectif requis. En effet, soit :

- λ^* l'objectif requis sur le taux de défaillance dans des conditions déterminées de fonctionnement du composant
- K le coefficient d'accélération de pannes dû aux contraintes en déverminage par rapport aux contraintes opérationnelles.

La durée t^* du déverminage nécessaire pour atteindre l'objectif visé est telle que : $h(Kt^*) = \lambda^*$, soit, dans l'hypothèse d'une distribution a priori de type gamma sur les taux de défaillance des composants du lot :

$$\frac{(\alpha + 1)\beta}{1 + K\beta t^*} = \lambda^*$$

Cette relation ne prend un sens que lorsque l'objectif visé n'est pas déjà atteint à l'instant zéro, ce qui impose : $(\alpha + 1)\beta > \lambda^*$.

Dans cette hypothèse, la durée cherchée a pour expression :

$$t^* = \frac{(\alpha + 1)\beta - \lambda^*}{K\beta t} \quad (9)$$

La formule (9) est susceptible de présenter un intérêt pratique lorsqu'on est en mesure de connaître les paramètres α et β de la distribution gamma a priori. Ces paramètres dépendent en particulier du type de composant considéré, du niveau de qualité correspondant et du fournisseur. Une méthode possible pour déterminer α et β consiste à analyser le comportement, en vieillissement contrôlé, d'un ou de plusieurs lots de composants du type considéré et issus de lignes de fabrication homogènes chez le même fournisseur. Cette méthode, illustrée en annexe sur un cas d'espèce traité par l'auteur, permet d'une part de tester la validité du modèle "gamma" a priori, et, d'autre part, cette validité étant supposée acquise, de déterminer les meilleures estimations de α et β en fonction de la distribution des pannes observées sur l'essai de vieillissement.

En définitive, il apparaît que l'hypothèse d'une distribution a priori sur les taux de défaillance des composants d'un même lot présente un intérêt tant sur un plan pratique que sur un plan formel. Pour sa part, l'auteur a pu éprouver la validité d'un modèle de type gamma lors de l'exploitation d'un certain nombre de résultats d'essais de vieillissement relatifs à des résistances et à des semi-conducteurs discrets. Il est probable, toutefois, que le modèle "gamma" ne saurait prétendre à l'exhaustivité en vue d'une application à des composants issus de certaines lignes de fabrication et, a fortiori, à la totalité des types de composants existants. C'est la raison pour laquelle il apparaît indispensable, aux yeux de l'auteur, de poursuivre les investigations dans un champ d'application plus vaste — circuits intégrés logiques ou analogiques, mémoires, etc. — afin de connaître les limites de la loi gamma dans ce type d'utilisation et, hors de ces limites, de déterminer d'autres natures des lois "a priori" susceptibles de présenter une meilleure compatibilité avec les résultats expérimentaux.

ANNEXE

Une illustration numérique de l'approche menée dans le présent article est présentée ici sur l'exemple d'un essai de vieillissement portant sur des transistors non fiabilisés du type 2N 1565.

Les conditions de l'essai ont été les suivantes :

- durée totale de l'essai : 5000 heures
- fonctionnement continu : 600 mW; $V_{ce} = 40$ V
- température ambiante : 25°C
- nombre d'éléments conformes à $t = 0$: 893
- définition des défauts : selon critères CCTU.

Le tableau 1 présente les résultats de l'essai de vieillissement. On y fait apparaître les informations suivantes :

- les cinq tranches de temps successives (t_1, t_2) comprises entre les points de relevés
- les temps milieux : $t_m = \frac{t_1 + t_2}{2}$
- le nombre de composants trouvés défectueux dans chaque tranche (t_1, t_2) : C
- le nombre de composants survivants en début de chaque tranche (t_1, t_2) : n
- l'inverse de l'estimateur du taux de panne instantané aux temps t_m :

$$\hat{\lambda}^{-1} = \frac{nx(t_2 - t_1)}{C}$$

Les résultats de cet essai peuvent se corréler avec l'approche théorique menée dans cet article de la façon suivante. Il a été vu que, lorsqu'on prend pour distribution a priori des taux de panne une loi gamma, le taux de panne inconditionnel au niveau du lot est une fonction hyperbolique du temps.

Si l'on reprend l'expression (6), on voit que l'inverse du taux de panne inconditionnel s'écrit :

$$h^{-1}(t) = \frac{1}{(\alpha + 1)\beta} + \frac{t}{\alpha + 1}$$

Autrement dit, $h^{-1}(t)$ est une fonction linéairement croissante avec le temps. Dans le système d'axe (t, h^{-1}) , la droite $h^{-1}(t)$ peut être définie par les deux caractéristiques suivantes :

- ordonnée à l'origine : $a = \frac{1}{(\alpha + 1)\beta}$
- pente : $b = \frac{1}{\alpha + 1}$

Si donc l'on parvient à évaluer expérimentalement les deux caractéristiques a et b dans un essai de vieillissement d'un lot de composants déterminé, on voit que les estimateurs des paramètres α et β de la distribution gamma a priori peuvent être obtenus par les relations :

$$\hat{\alpha} = \frac{1 - b}{b}$$

$$\hat{\beta} = \frac{b}{a}$$

Cette méthode de calcul ayant été choisie dans notre exemple, on a tracé, sur la figure 5, la droite (D) s'ajustant le mieux avec les cinq points expérimentaux (méthode des moindres carrés).

TABLEAU 1

Résultat d'un essai de vieillissement portant sur 893 transistors 2N 1565

Intervalles de temps (t_1, t_2)	Temps milieu (t_m)	Nombre de composants défectueux (C)	Nombre de composants survivants (N)	$\hat{\lambda}^{-1}$ instantané $\times 10^4$ (heures)
0 h – 500 h	250 h	19	893	2,35
500 h – 1000 h	750 h	9	874	4,86
1000 h – 2000 h	1500 h	17	857	5,04
2000 h – 3000 h	2500 h	12	845	7,04
3000 h – 5000 h	4000 h	18	827	9,19

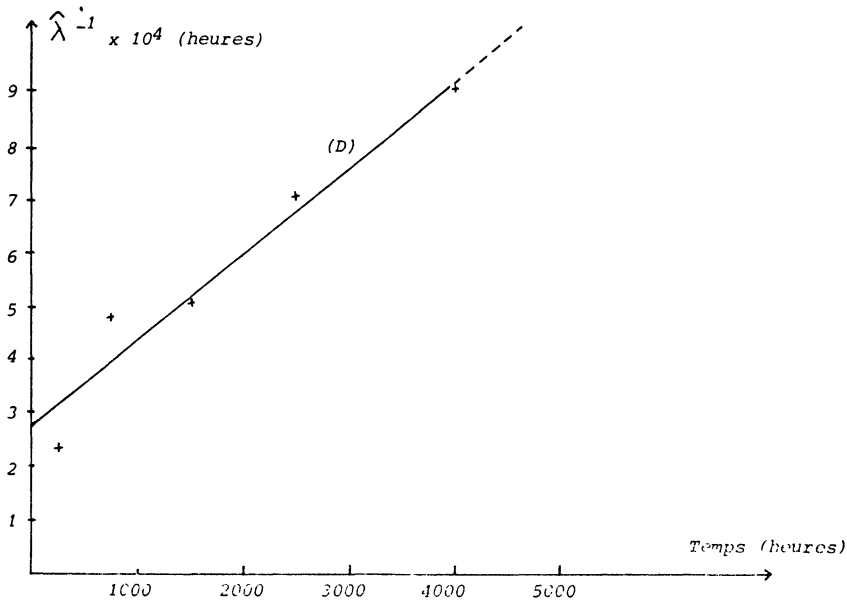


Figure 5. – Evolution de $\hat{\lambda}^{-1}$ avec le temps

Les résultats obtenus sont les suivants :

- coefficient de corrélation : $r = 0,971$
- ordonnée de (D) à l'origine : $a = 26.933$ (heures)
- pente de (D) : $b = 16,682$.

On constate donc une excellente corrélation entre la droite théorique et les résultats expérimentaux, ce qui démontre, sur cet exemple, le bien-fondé de la loi gamma comme distribution a priori. Les estimateurs de α et de β ont ici pour valeurs :

$$\hat{\alpha} = -0,940 \quad \text{et} \quad \hat{\beta} = 6,19 \cdot 10^{-4} .$$

Le taux de panne instantané a alors pour expression :

$$h(t) = \frac{3,71 \cdot 10^{-5}}{1 + 6,19 \cdot 10^{-4}t}$$

A titre d'exemple, on obtiendrait par extrapolation, dans les limites de validité de ce modèle :

- à 10000 heures : $h(10000) = 5,16 \cdot 10^{-6}/h$
- à 50000 heures : $h(50000) = 1,16 \cdot 10^{-6}/h$
- à 100000 heures : $h(100000) = 5,9 \cdot 10^{-7}/h$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. BAZOVSKY. – *Fiabilité – Théorie et pratique de la sûreté de fonctionnement* (Dunod).
- [2] IEEE Transactions of Reliability. – *Special issue on Bayesian techniques* (August 1972).
- [3] J. RINGLER. – *Réduction des coûts d'essais de fiabilité par la pratique des techniques bayésiennes*. (Colloque International sur la Fiabilité et la Maintenabilité, Paris juin 1978).
- [4] R. STEWART. – *A causal redefinition of failure rate*. Theorems, stress dependence, and application to devices and distributions (IEEE Transaction of reliability – December 1966).
- [5] C. HARRIS and N. SINGPURWALLA. – *Life distributions derived from stochastic hazard functions* (IEEE transaction of reliability, June 1968).
- [6] M. SHOOMAN. – *Reliability physic models* (IEEE transaction of reliability, March 1968).
- [7] T. CALVIN. – *Modeling the bathtub curve* (1974, Annual Reliability and Maintainability Symposium).