

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. GLOUKHIAN

Moyennes distantielles dans la sphère euclidienne

Revue de statistique appliquée, tome 28, n° 1 (1980), p. 69-75

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1980__28_1_69_0

© Société française de statistique, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MOYENNES DISTANTIELLES DANS LA SPHERE EUCLIDIENNE

E. GLOUKHIAN

A l'intérieur de la sphère $S_n(R)$ de l'espace euclidien à n dimensions (fig. 1), on prend au hasard un point M , et, au hasard, une direction $M\Delta$ issue de M . La distance de M à la frontière S_n le long de la droite $M\Delta$ est notée ξ . En supposant tous les points M équiprobables, ainsi que par ailleurs toutes les directions $M\Delta$ autour de M , on se propose de calculer l'espérance mathématique de ξ^k ($k = 1, 2, \dots$), notée ξ^k , qui est la moyenne de ξ^k .

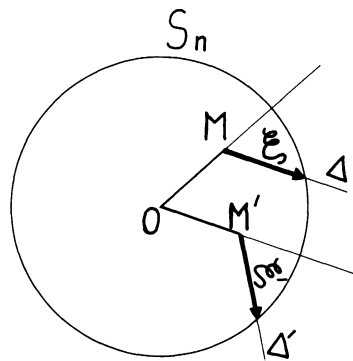


Figure 1

Dans sa généralité, le problème contient $2n - 1$ paramètres : les n coordonnées du point M et les $n - 1$ paramètres angulaires de $\vec{\xi}$. Or, les considérations suivantes permettent de réduire à deux le nombre de paramètres.

Deux vecteurs $\vec{\xi}$ et $\vec{\xi}'$ seront dits indiscernables s'ils peuvent être déduits l'un de l'autre par rotation de S_n autour de O . Il faut pour cela que :

leur origines M et M' soient à la même distance, r , du centre O (fig. 1),

ces vecteurs fassent le même angle, φ , avec le diamètre correspondant OM et OM' .

Nous sommes amenés à "recenser" tous les vecteurs définis par les deux paramètres "naturels" r et φ . Ce faisant, nous introduirons une densité radiale $f_1(r)$ et une densité angulaire $f_2(\varphi)$.

Mots-Clés : Probabilités géométriques.

1. **Densité radiale $f_1(r)$.** – La probabilité de trouver le point M dans la couche sphérique $(r, r + dr)$ est égale au volume de cette couche, le volume de la sphère étant supposé normalisé à l'unité. Il vient successivement pour les volumes $V_n(R)$ et $V_n(r)$ délimités par $S_n(R)$ et $S_n(r)$:

$$V_n(R) = AR^n \quad \left(\text{ici } A = \frac{\frac{n}{\pi^2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \right),$$

$$V_n(r) = Ar^n,$$

$$dV_n(r) = Anr^{n-1} dr,$$

$$\frac{dV_n(r)}{V_n(R)} = \frac{nr^{n-1} dr}{R^n}.$$

2. **Densité angulaire $f_2(\varphi)$.** – Sur la sphère unité de centre en M (fig. 2), l'on découpe une zone sphérique en faisant tourner autour de l'axe vertical Oy deux rayons voisins d'azimuts φ et $\varphi + d\varphi$. La probabilité de trouver le vecteur $\vec{\xi}$ dans l'angle $(\varphi, \varphi + d\varphi)$ est égale à l'aire $d\sigma$ de la zone sphérique (à l'angle solide) normalisée à l'unité. On trouve pour cette aire $d\sigma$ normalisée à l'unité l'expression

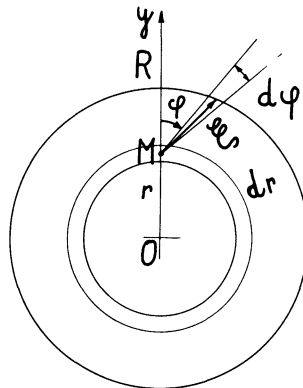


Figure 2

$$d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-2} \varphi d\varphi.$$

La fonction

$$f_2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-2} \varphi$$

est la densité angulaire cherchée.

Ainsi, les variables aléatoires r et φ sont distribuées sur les segments $[0, R]$ et $[0, \pi]$ avec les densités de probabilité

$$f_1(r) = \frac{nr^{n-1}}{R^n} \quad \text{et} \quad f_2(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin^{n-2} \varphi.$$

La variable aléatoire à deux dimensions $\{r, \varphi\}$ est distribuée sur le rectangle $0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi$ avec la densité de probabilité

$$f(r, \varphi) = f_1(r) f_2(\varphi) = \frac{n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} R^n \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi,$$

soit, en notant que $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$,

$$f(r, \varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{R^n \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi.$$

La fonction $f(r, \varphi)$ trouvée est la densité de probabilité du vecteur $\vec{\xi}(r, \varphi)$, et par suite de ξ^k .

La moyenne cherchée $\overline{\xi^k}$ de ξ^k a pour expression formelle :

$$\overline{\xi^k} = \int_0^R \int_0^\pi \xi^k(r, \varphi) f(r, \varphi) dr d\varphi.$$

Pour calculer cette intégrale, nous passons au préalable des paramètres r, φ aux paramètres r, t (fig. 3). Nous omettons les calculs que nécessite ce passage, mais il est utile d'indiquer l'expression de ξ en paramètres r, t :

$$\xi = [R^2 - 2Rr \sin t + r^2]^{1/2}.$$

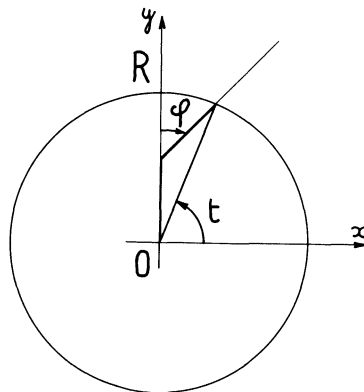


Figure 3

L'expression de la moyenne en paramètres r, t est :

$$\bar{\xi}^k = \frac{2}{R\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^{n-1} \cos^{n-2} t (R - r \sin t)}{[R^2 - 2rR \sin t + r^2]^{\frac{n-k}{2}}} dr dt.$$

Cette intégrale, d'aspect compliqué, peut être calculée par les méthodes classiques. Nous nous proposons d'indiquer ici l'essentiel des calculs.

Les paramètres d'intégration r, t figurant ici ne sont pas des coordonnées polaires (cf. fig. 2), mais il est loisible de les interpréter comme des coordonnées polaires dans un certain plan, puis nous passerons en coordonnées cartésiennes. On obtient l'élément d'aire $r dr dt$ en empruntant r à r^{n-1} :

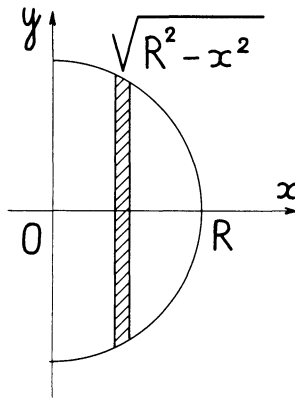


Figure 4

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$dx dy = r dr dt.$$

Le domaine d'intégration \mathcal{O} est à présent le demi-cercle représenté sur la figure 4. Il vient

$$\bar{\xi}^k = \frac{2}{R\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\mathcal{O}} \int \frac{x^{n-2} (R - y) dx dy}{(R^2 - 2Ry + x^2 + y^2)^{\frac{n-k}{2}}}.$$

On a

$$I_{n,k} = \int_{\mathcal{O}} \int = \int_0^R x^{n-2} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{(R - y) dy}{[(R - y)^2 + x^2]^{\frac{n-k}{2}}}.$$

Supposons, pour l'instant, $\frac{n-k}{2} \neq 1$. On obtient pour $I_{n,k}$:

$$(n-k-2) I_{n,k} = \int_0^R x^{n-2} [2R(R - \sqrt{R^2 - x^2})]^{\frac{k-n+2}{2}} dx - \quad (1)$$

$$- \int_0^R x^{n-2} [2R(R + \sqrt{R^2 - x^2})]^{\frac{k-n+2}{2}} dx. \quad (2)$$

Faisons la substitution $x = R \sin 2u$. On obtient :

$$(1) = \int_0^{\pi/4} R^{n-2} (\sin 2u)^{n-2} (4R^2 \sin^2 u)^{\frac{k-n+2}{2}} 2R \cos 2u du = \\ = 2^{k+1} R^{k+1} \int_0^{\pi/4} \sin^k u \cos^{n-2} u \cos 2u du$$

$$(2) = 2^{k+1} R^{k+1} \int_0^{\pi/4} \sin^{n-2} u \cos^k u \cos 2u du.$$

Dans l'expression obtenue de l'intégrale (1) substituons $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$, et dans celle de l'intégrale (2), $\cos 2u = 1 - 2 \sin^2 u$. On obtient :

$$(1) - (2) = 2^{k+2} R^{k+1} \int_0^{\pi/4} \sin^k u \cos^n u du - \\ - 2^{k+1} R^{k+1} \int_0^{\pi/4} \sin^k u \cos^{n-2} u du + \\ + 2^{k+2} R^{k+1} \int_0^{\pi/4} \sin^n u \cos^k u du - \\ - 2^{k+1} R^{k+1} \int_0^{\pi/4} \sin^{n-2} u \cos^k u du.$$

Faisant $u = \frac{\pi}{2} - \theta$, on vérifie aussitôt que

$$\int_0^{\pi/4} \sin^p u \cos^q u du = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^q u \cos^p u du.$$

Par conséquent,

$$(n-k-2) I_{n,k} = 2^{k+2} R^{k+1} \int_0^{\pi/2} \sin^k u \cos^n u du - \\ - 2^{k+1} R^{k+1} \int_0^{\pi/2} \sin^k u \cos^{n-2} u du.$$

Les deux intégrales ci-dessus sont des intégrales eulériennes :

$$\beta(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} u \cos^{2q-1} u du = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 (n - k - 2) I_{n,k} &= 2^{k+1} R^{k+1} \beta\left(\frac{k+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) - \\
 &\quad - 2^k R^{k+1} \beta\left(\frac{k+1}{2}, \frac{n-2}{2}\right) = \\
 &= 2^{k+1} R^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k}{2} + 1\right)} - 2^k R^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Utilisant à deux reprises dans le premier terme la propriété de la fonction Γ : $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, il vient :

$$(n - k - 2) I_{n,k} = 2^k R^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)} \frac{n - k - 2}{n + k}.$$

Nous avons supposé $n - k - 2 \neq 0$. Nous avons donc

$$I_{n,k} = 2^k R^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{(n+k) \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}.$$

Il vient en reportant dans l'expression intégrale de $\overline{\xi^k}$,

$$\overline{\xi^k} = \frac{2}{R\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} 2^k R^{k+1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{(n+k) \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)},$$

et en définitive,

$$\overline{\xi^k} = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k+2}{2}\right)} R^k.$$

Le cas où $n - k - 2 = 0$, $k = n - 2$ se traite directement sans difficultés particulières et donne

$$\overline{\xi^{n-2}} = \frac{n}{2(n-1)} R^{n-2}.$$

La formule pour $\overline{\xi^k}$ conduit au même résultat si l'on y fait $k = n - 2$. Cette formule est très générale. Au départ, nous avons supposé implicitement $n \geq 2$. Or, la formule reste vraie pour S_1 , auquel cas la sphère dégénère en deux points distants de $2R$. Par ailleurs, k avait été supposé entier. Or, en théorie des fonctions analytiques, les propriétés de la fonction $\Gamma(z)$ sont bien connues. Dès lors, et ceci est important, il est loisible de prolonger les valeurs de $\overline{\xi^k}$ à des valeurs complexes z de k .

Indiquons les valeurs de $\overline{\xi_n^k}$ (n en indice spécifie la dimension de l'espace) pour $k = 1$ (moyenne de ξ) dans le cas de la droite ($n = 1$), du cercle ($n = 2$) et de la sphère dans l'espace à 3 dimensions ($n = 3$) :

$$\overline{\xi_1} = R, \quad \overline{\xi_2} = \frac{8R}{3\pi}, \quad \overline{\xi_3} = \frac{3R}{4}.$$

Indiquons encore un résultat curieux. Quel que soit n , $\overline{\xi_n^n} = R^n$. Ce fait se vérifie facilement à partir de l'expression pour $\overline{\xi_n^k}$.

Nous terminerons cet article par la remarque suivante. A partir de $\overline{\xi^k}$, on peut calculer les moyennes dans S_n de fonctions arbitraires $f(x)$ sur les vecteurs aléatoires ξ , tels qu'ils ont été définis au début de l'article.