

J. RINGLER

Réduction des coûts d'essais de fiabilité par la pratique des techniques bayésiennes

Revue de statistique appliquée, tome 27, n° 2 (1979), p. 55-68

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1979__27_2_55_0

© Société française de statistique, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉDUCTION DES COUTS D'ESSAIS DE FIABILITÉ PAR LA PRATIQUE DES TECHNIQUES BAYESIENNES

J. RINGLER

MATRA 37, avenue Louis Breguet – 78140 VELIZY

RESUME

Les techniques bayésiennes appliquées au domaine de la fiabilité peuvent constituer un outil permettant de réduire le volume des essais de fiabilité "à priori" nécessaires devant être effectués sur un matériel nouveau.

Un rappel succinct du fondement de l'approche bayésienne étant préalablement donné, il sera fait usage de cette approche pour la détermination d'un plan d'essais de fiabilité devant être subi par des batteries argent/zinc dérivées de types existants et pour lesquelles un objectif de fiabilité a été assigné. Il en résulte une nouvelle politique d'essais de fiabilité, sensiblement moins coûteuse que la politique définie par l'approche classique.

1. GENERALITES

Dans le cadre des projets de réalisation de systèmes à niveau de complexité élevé (satellites artificiels, lanceurs spatiaux, systèmes d'armes automatiques, centrales nucléaires, systèmes de transport automatiques), il est de plus en plus fréquent que les industriels participant à ces projets soient soumis, par le maître d'œuvre, à des "clauses de fiabilité" dont la mise en œuvre peut prévoir à leur égard différentes sanctions-généralement financières - lorsque l'exploitation du système démontre un certain nombre d'incidents prohibitifs. En particulier, ces clauses peuvent prévoir, pour chaque industriel, le respect "d'objectifs de fiabilité" sur les matériels dont ils ont la responsabilité.

Afin d'être en mesure de se faire une opinion sur le respect ou le non respect des objectifs de fiabilité qui ont été assignés à leurs matériels, les différents industriels ont théoriquement le choix entre trois types d'informations :

- les évaluations prévisionnelles de fiabilité, reposant essentiellement sur l'utilisation des recueils de données au niveau composants élémentaires (Recueil de Fiabilité du CNET, MIL HDBK 217-B, etc.),
- les données expérimentales de fiabilité sur des matériels existants et présentant un degré de similitude assez important avec les matériels développés au sein du présent projet,
- les résultats d'essais de fiabilité dont la mise en œuvre aura été jugée utile dans le cadre du projet.

Le problème qui se pose, à ce stade, réside généralement dans la difficulté d'interpréter et de relier entre elles chacune de ces informations. Ainsi, il est bien connu que les évaluations prévisionnelles de fiabilité demeurent souvent l'objet de contestations, ne serait-ce qu'en raison de la pluralité des tables de données. D'autre part, une estimation du potentiel de fiabilité d'un matériel spécifiquement développé pour le projet qui ne reposerait que sur la seule connaissance du comportement en exploitation de matériels ressemblants apparaîtrait également contestable, dans la mesure où ce matériel présente toujours un certain nombre de différences technologiques avec les matériels existants. Or, ce sont précisément ces différences qui feront que le nouveau matériel sera plus ou moins fiable que les matériels précédemment développés.

Il apparaît donc que le meilleur moyen de mesure de la fiabilité d'un matériel conçu pour un projet réside dans la mise en œuvre, par l'industriel responsable, d'un programme spécifique d'essais de fiabilité. Outre cet objectif, les essais de fiabilité présentent de plus un certain nombre d'avantages : détection de défauts de type conceptuel, mise en évidence des points sur lesquels un renforcement de contrôle/qualité est recommandable, etc.

Cependant, malgré l'ensemble de ces avantages, l'expérience montre que les essais spécifiques de fiabilité ne sont que très rarement mis en œuvre dans les projets, y compris ceux où des objectifs de fiabilité ont été assignés. C'est donc le plus souvent durant leur exploitation que les matériels nouveaux démontrent des "faiblesses" que l'on ne soupçonnait pas a priori et qui font que la fiabilité opérationnelle de ces matériels correspond assez mal avec le niveau de fiabilité qui avait été établi de manière prévisionnelle.

Or, comme on le sait, l'absence d'essais de fiabilité dans un projet trouve généralement son origine dans des raisons d'ordre financier d'une part, et de délais d'autre part. En effet, les objectifs de fiabilité qui sont assignés à des systèmes sophistiqués étant le plus souvent très élevés compte-tenu de la nature de la mission, la vérification du respect de ces objectifs par le seul biais d'essais de fiabilité nécessite un nombre d'heures cumulées d'essais spécifiques incompatible avec les délais du programme et son enveloppe financière.

Dans ce contexte, les techniques d'approche bayésienne trouvent un débouché intéressant, dans la mesure où elles permettent une réduction sensible du volume des essais de fiabilité établi sur la base de l'approche classique, moyennant la connaissance de données de fiabilité "à priori" sur les matériels concernés (ex : évaluations prévisionnelles, résultats expérimentaux sur des matériels ressemblants, etc.).

Le présent article se propose donc de rappeler brièvement le fondement de la statistique bayésienne, et d'appliquer celle-ci à la détermination du volume d'un plan d'essais de fiabilité sur le cas concret de batteries argent/zinc.

2. FONDEMENT DE LA STATISTIQUE BAYESIENNE

2.1. Rappel du théorème de Bayes

Soit un ensemble de cas possibles ($A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$) exclusifs entre eux et susceptibles de générer chacun un événement observable E.

On se donne pour acquis :

- la probabilité $P(A_i)$ d'apparition de tout cas A_i ($1 \leq i \leq n$)

– la probabilité conditionnelle $P(E/A_i)$ pour que, le cas A_i s'étant produit, l'évènement E soit généré.

Avec ces hypothèses, lorsque l'évènement E est apparu et constaté, la probabilité à posteriori pour que le cas A_i en soit la cause est donnée par l'expression (1) dite théorème de Bayes :

$$P(A_i/E) = \frac{P(E/A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(E/A_i) \cdot P(A_i)} \quad (1)$$

Cette probabilité est donc mesurée par le produit de la probabilité conditionnelle pour que l'évènement E soit généré lorsque le cas A_i s'est produit par la probabilité pour que A_i se produise, ramené à la probabilité d'apparition de E .

2.2. Passage du théorème de Bayes à la statistique bayésienne

Dans l'établissement du théorème de Bayes, les probabilités $P(A_i)$ d'apparition des causes possibles A_i ont été considérées comme acquises de façon certaine.

On peut voir les choses, à présent, de façon différente. On suppose que :

– le phénomène observable consiste en l'apparition de valeurs possibles $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ susceptibles d'être prises par une variable aléatoire X issue d'une loi de probabilité $f(x/\theta)$ où θ représente la valeur *inconnue* du paramètre θ – ou d'un ensemble de paramètres – caractéristique de cette loi.

– le paramètre inconnu θ est lui-même considéré comme une variable aléatoire suivant "à priori" une loi de probabilité $g(\theta)$ et pouvant prendre l'ensemble des valeurs continues dans un domaine $D(\theta)$.

Dans cette approche, dite approche bayésienne, la probabilité élémentaire pour que, sachant que la valeur x de la variable aléatoire X s'est manifestée, la valeur du paramètre inconnu θ soit comprise entre θ et $\theta + d\theta$ est obtenue par l'extension de la formule (1) en faisant les transpositions suivantes :

- évènement $E \rightarrow$ valeur x de la variable aléatoire X
- cause $A_i \rightarrow$ valeur θ du paramètre θ de la loi de probabilité de X
- probabilité connue $P(A_i) \rightarrow$ distribution "à priori" $g(\theta)$.

Il en résulte une distribution à posteriori de θ après observation de la valeur x de la variable X , donnée par la formule :

$$g(\theta/x) = \frac{f(x/\theta) \cdot g(\theta)}{\int_{D(\theta)} f(x/\theta) \cdot g(\theta) d\theta} \quad (2)$$

Cette formule vérifiant, bien entendu :

$$\int_{D(\theta)} g(\theta/x) d\theta = 1$$

Autrement dit, après avoir postulé une distribution à priori $g(\theta)$ du paramètre inconnu θ , la formule (2) fournit la distribution à posteriori $g(\theta/x)$ de ce paramètre, après observation de l'évènement $X = x$.

Dans l'hypothèse de futures observations portant sur la variable X , la distribution $g(\theta/x)$ doit alors être considérée comme la nouvelle distribution à priori. Ainsi, dans l'hypothèse d'observations successives x_1, x_2, \dots, x_k de la variable X , la formule (2) donne lieu à la formule séquentielle (3) :

$$g_k(\theta/x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{f(x_1/\theta) \cdot f(x_2/\theta) \cdot \dots \cdot f(x_k/\theta) \cdot g(\theta)}{\int_{D(\theta)} f(x_1/\theta) \cdot f(x_2/\theta) \cdot \dots \cdot f(x_k/\theta) \cdot g(\theta) d\theta} \quad (3)$$

La formule (3) n'est facilement exploitable que lorsque la distribution $g(\theta/x_1, x_2, \dots, x_k)$ ainsi obtenue garde une forme stable lorsque le nombre k d'observations varie. On démontre que cette stabilité existe lorsque la loi de probabilité $f(x/\theta)$ possède un résumé exhaustif (réf. 1). Si, de plus, on choisit pour $g(\theta)$ une distribution uniforme dans le domaine $D(\theta)$, la famille des lois g_k est dite "conjuguée bayésienne" de la loi de probabilité $f(x/\theta)$.

D'un point de vue formel, qui est celui de la statistique classique, deux critiques peuvent être émises sur le fondement de l'approche bayésienne :

- 1) On ne peut en aucun cas assimiler un paramètre fixe, en l'occurrence θ , à une variable aléatoire, sous prétexte que l'on ne connaît pas sa valeur exacte.
- 2) La distribution à priori $g(\theta)$ ne fait que mesurer le "degré de connaissance" que l'on pense avoir sur la valeur d'un paramètre, et ne correspond donc pas à la définition classique d'une probabilité.

Il n'est pas du ressort de cet article de prendre position sur ce plan purement formel, en faveur des "bayésiens" et des "classiques", dont la querelle est essentiellement philosophique et remonte à plusieurs décades, ainsi qu'en témoigne la littérature spécialisée.

C'est l'aspect pratique qui nous semble ici le plus intéressant. Sur ce plan, la principale objection qu'on puisse faire réside dans le choix plus ou moins subjectif de la distribution à priori $g(\theta)$. C'est là une conséquence de l'introduction d'un "degré de connaissance" sur θ qui peut être très différent d'un analyste à un autre.

D'une manière générale, on peut dire qu'une grande pauvreté d'informations à priori devra se traduire par une distribution à priori $g(\theta)$ "faible" (fig. 1) de telle sorte qu'aucune valeur du paramètre inconnu θ ne soit trop particulièrement privilégiée. Le cas limite d'une telle distribution est la loi uniforme, qui accorde la même probabilité à chacune des valeurs possibles de θ . Inversement, lorsque l'on dispose d'une assez grande richesse d'informations à priori, il est souhaitable de partir d'une distribution à priori "forte" (fig. 2) au sens où un domaine assez restreint de certaines valeurs de θ se trouvera à priori privilégié : le bon choix de cette distribution forte permet ainsi de minimiser le nombre d'observations x_1, x_2, \dots, x_k nécessaires pour que la distribution à posteriori $g(\theta/x_1, \dots, x_k)$ soit suffisamment stabilisée.



Fig. 1. — Distribution faible

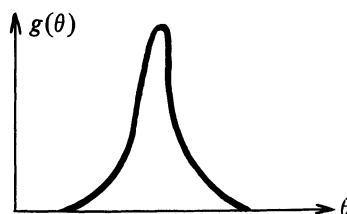


Fig. 2. — Distribution forte

3 – APPLICATION DE L'APPROCHE BAYESIENNE A LA FIABILITE DE MATERIELS A MORTALITE EXPONENTIELLE

3.1. – Conjugée bayésienne de la loi de Poisson

On considère un matériel, destiné à subir des essais de fiabilité et dont la loi de mortalité est de type poissonien. La fiabilité de ce matériel, en fonction du temps, a pour expression :

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Cette loi dépend d'un seul paramètre, λ , qui n'est autre que le taux de défaillance du matériel.

Supposons que l'on n'ait à priori aucune information sur la valeur réelle du paramètre λ avant le début des essais de fiabilité sur ce matériel. Dans l'approche bayésienne, on va donc considérer ce paramètre comme une variable aléatoire distribuée suivant une loi uniforme dans l'intervalle $(0, K)$ sur lequel on fera tendre K vers l'infini.

Lorsque l'on réalise une série d'essais de fiabilité sur ce matériel, on peut définir une variable aléatoire X représentant le nombre de défaillances enregistrées à chaque essai.

Soit un premier essai réalisé sur le matériel considéré pendant un temps cumulé T_1 (plusieurs exemplaires pouvant être testés simultanément). Supposons qu'au cours de cet essai, x_1 défaillances soient apparues (x_1 entier ≥ 0).

Dans l'hypothèse poissonnienne, la probabilité d'avoir x_1 défaillances à taux constant λ sur une durée T_1 s'écrit :

$$f(x_1/\lambda) = \frac{e^{-\lambda T_1} (\lambda T_1)^{x_1}}{x_1 !}$$

De plus, en utilisant la notation du paragraphe 2, la distribution à priori du paramètre inconnu λ s'écrit :

$$g(\lambda) = \frac{1}{K} \text{ dans l'intervalle } (0, K).$$

L'application de la formule (2) conduit à la distribution à posteriori de λ après le premier essai :

$$g_1(\lambda/x_1) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{K} \frac{e^{-\lambda T_1} (\lambda T_1)^{x_1}}{x_1 !}}{\int_0^K \frac{1}{K} \frac{e^{-\lambda T_1} (\lambda T_1)^{x_1}}{x_1 !} d\lambda}$$

Soit :

$$g_1(\lambda/x_1) = \frac{e^{-\lambda T_1} \lambda^{x_1}}{\int_0^\infty e^{-\lambda T_1} \lambda^{x_1} d\lambda}$$

On reconnaît une loi gamma de paramètres :

$$\alpha = x_1 \text{ et } \beta = \frac{1}{T_1} \text{ (voir annexe).}$$

Supposons à présent une série de n essais, de durées respectives T_1, T_2, \dots, T_n , et conduisant à l'observation respectivement de x_1, x_2, \dots, x_n défaillances sur les matériels testés. Alors, l'application de la formule séquentielle (3) conduit à la distribution à posteriori de λ à l'issue du $n^{\text{ème}}$ essai :

$$g_n(\lambda/x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{-\lambda \sum_1^n T_k} \lambda^{\sum_1^n x_k}}{\int_0^\infty e^{-\lambda \sum_1^n T_k} \lambda^{\sum_1^n x_k} d\lambda}$$

Il s'agit d'une loi gamma de paramètres :

$$\alpha_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{T_1 + T_2 + \dots + T_n}$$

Autrement dit :

- α_n représente le nombre de défauts enregistrés sur l'ensemble des n essais,
- β_n représente l'inverse du temps cumulé des n essais.

Il a donc été établi que la famille de distribution g_n garde une forme stable quand n varie : c'est la loi gamma qui est la conjuguée bayésienne de la loi de Poisson.

En particulier, si on réalise un $(n + 1)^{\text{ème}}$ essai d'une durée T_{n+1} et conduisant à x_{n+1} défaillances, les paramètres α_{n+1} et β_{n+1} de la loi gamma correspondant à la distribution à posteriori g_{n+1} s'obtiennent à partir des paramètres α_n et β_n de la distribution g_n de la façon suivante :

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + x_{n+1}$$

$$\frac{1}{\beta_{n+1}} = \frac{1}{\beta_n} + T_{n+1}$$

3.2. – Choix d'une distribution à priori non uniforme

Supposons, à présent, que l'on ait un certain degré de connaissance sur le taux de défaillance du matériel considéré avant la mise en œuvre des essais de fiabilité. Dans cette hypothèse, il faudra choisir pour distribution à priori $g(\lambda)$ une loi non uniforme telle que la famille de distribution à posteriori g_k garde une forme stable. D'après ce qui a été vu précédemment, la distribution à priori $g(\lambda)$ sera une loi gamma dont les paramètres α_0 et β_0 seront choisis de manière à ce que cette distribution reflète au mieux les connaissances que l'on peut avoir sur le paramètre inconnu λ .

Si l'on considère que α_0 et β_0 correspondent respectivement à un nombre de défaillances x_0 qui auraient été enregistrées sur des "essais à priori", et à l'inverse du temps cumulé T_0 de ces essais, on peut d'ores et déjà tirer les enseignements suivants :

– la loi gamma $g(\lambda)$ sera d'autant plus forte que T_0 sera important, ce qui se traduit par une faible valeur de β_0 . C'est là la conséquence d'une bonne connaissance à priori sur le matériel.

– le mode de la loi $g(\lambda)$ sera d'autant proche de zéro que le ratio x_0/T_0 sera faible, ce qui se traduit par une faible valeur de α_0 devant β_0 . Cela traduit une fiabilité "à priori" bonne sur le matériel considéré ou sur des matériels ressemblants.

La difficulté majeure réside donc dans le choix des deux paramètres à priori de la distribution $g(\lambda)$ originelle. Pour cela, il faut préalablement faire un bilan des catégories d'informations dont on dispose sur la fiabilité présumée du matériel considéré. Dans un ordre croissant d'objectivité, ces informations peuvent être les suivantes :

- jugement professionnel qualitatif
- calculs prévisionnels de fiabilité (s'appuyant sur les tables de données au niveau composants)
- résultats d'analyse de variables (ex : méthode du stress/strength en mécanique)
- données expérimentales sur des matériels voisins.

Il n'existe pas de méthode parfaite permettant d'attribuer les "bonnes valeurs" aux deux paramètres de la distribution à priori. On ne saurait toutefois trop recommander la plus grande prudence dans l'attribution de ces valeurs lorsque les informations à priori sont essentiellement subjectives. La règle générale doit donc être de donner un "poids" d'autant moins important aux données à priori que ces données sont moins objectives. Autrement dit, l'impact du plan d'essais de fiabilité du matériel considéré sur la distribution à posteriori g_n sera d'autant plus prépondérant, en regard de l'impact des données "à priori", que ces données auront un caractère subjectif.

En raison de ces incertitudes, il n'est pas inutile de faire, dès les premiers résultats d'essais de fiabilité, un test d'hypothèse sur la compatibilité des données à priori avec ces premiers résultats. On peut procéder comme suit : ayant attribué les valeurs à priori α_0 et β_0 aux deux paramètres de la loi gamma $g(\lambda)$, on peut adopter pour estimateur du taux de défaillance à priori la quantité :

$$\hat{\lambda}_0 = \alpha_0 \beta_0 \quad \text{car : } \alpha_0 = x_0 \quad \text{et} \quad \beta_0 = \frac{1}{T_0}$$

Les premiers résultats d'essais ayant conduit à l'observation de x_1 défaillances sur un temps cumulé T_1 , on peut en déduire un intervalle de confiance Δ , à 95 % par exemple, sur le taux de défaillance :

– si $\hat{\lambda}_0 \subset \Delta$: les données à priori sont compatibles avec les premiers résultats et peuvent donc être maintenues,

– si $\hat{\lambda}_0 \not\subset \Delta$: les données à priori sont incompatibles avec les résultats d'essais et doivent donc être modifiées en conséquence.

4 – DETERMINATION D'UN PLAN D'ESSAIS DE FIABILITE DE BATTERIES ARGENT/ZINC PAR L'APPROCHE BAYESIENNE

Dans un projet relatif à la réalisation d'un système complexe, des objectifs de fiabilité ont été assignés à un certain nombre d'équipements constitutifs du système.

Parmi ces équipements figurent des batteries argent/zinc devant être développées et qualifiées en vue de leur utilisation dans le cadre du projet. L'objectif de fiabilité assigné au taux de défaillance moyen de ces batteries est le suivant :

$$\lambda \leq 10^{-4}/H \text{ à } 60 \% \text{ de confiance.}$$

Si l'on veut valider cet objectif suivant l'approche classique, il faut prévoir un plan d'essais de fiabilité d'environ 9 000 heures cumulées à zéro défaut. Le volume de ce plan étant incompatible avec les contraintes financières et le planning du projet, on se trouve dans un cas typique où l'approche bayésienne peut être utilement envisagée, compte tenu de l'existence de données expérimentales sur la fiabilité de batteries argent/zinc de type légèrement différent du modèle actuellement développé.

On dispose pratiquement des sources d'informations suivantes sur trois types de batteries argent/zinc :

- batteries type A : 6 défaillances enregistrées sur 71 000 heures de fonctionnement cumulé,
- batteries type B : 2 défaillances enregistrées sur 27 000 heures de fonctionnement cumulé,
- batteries type C : 4 défaillances enregistrées sur 40 000 heures de fonctionnement cumulé.

En suivant l'approche bayésienne, on est donc conduit à élaborer une distribution gamma caractérisant la distribution "à priori" du taux de défaillance des batteries argent/zinc du type actuellement développé. Pour que les paramètres à priori α_0 et β_0 de cette distribution reflètent au mieux les connaissances objectives que l'on a des batteries de type A, B et C, il a été appliqué une méthode reposant sur la détermination de "caractéristiques de ressemblance".

On peut en effet définir un certain nombre de critères caractéristiques ayant un impact direct sur la fiabilité d'une batterie argent/zinc. Les critères sélectionnés ont été les suivants :

- (1) nature des séparateurs
- (2) nature du bac
- (3) nature de l'électrolyte
- (4) nature des soudures bac/couvercle
- (5) nombre d'éléments de la batterie
- (6) conditions d'utilisation
- (7) niveau de qualité/contrôle.

Soit une batterie argent/zinc d'un type donné, A par exemple, ayant fonctionné T_A heures à x_A défauts. Relativement à chaque critère (i), on définit un coefficient k_i prenant la valeur 1 ou 0 selon que :

- la batterie A et la batterie actuellement développée sont de même nature ou non par rapport au critère considéré (critères de 1 à 4),

– la caractéristique du critère considéré est plus/autant ou moins pénalisante vis-à-vis de la fiabilité pour la batterie A que pour la batterie actuellement développée (critères de 5 à 7).

On en déduit un coefficient de ressemblance k_A ayant pour expression :

$$k_A = \frac{\sum_{i=1}^7 k_i}{7} \quad (0 < k_A < 1)$$

La contribution des données objectives issues de la batterie A aux données à priori sur la batterie en cours de développement se traduit ainsi par :

- un temps cumulé d’essai “à priori” : $(T_0)_A = k_A T_A$
- un nombre de défaillances “à priori” : $(x_0)_A = k_A x_A$

De la même façon, on évalue les coefficients de ressemblance k_B et k_C par rapport aux batteries B et C, ainsi que les données “à priori” qui en découlent.

On a donc été conduit à faire l’inventaire des 7 caractéristiques précédentes sur l’ensemble des batteries :

- séparateurs : polyamide (toutes batteries)
- bacs : en trogamid sur la batterie développée
: autres plastiques sur A, B et C
- électrolyte : hydroxyde de potassium (toutes batteries)
- soudures : par ultra sons sur la batterie développée
: classiques sur A, B et C
- éléments : 20 sur la batterie développée
: 25 sur A
: 30 sur B
: 15 sur C
- utilisation : analogue (toutes batteries)
- niveau qualité : le plus sévère sur la batterie développée

Cet inventaire permet de dresser le tableau des caractéristiques de ressemblance présenté ci-dessous :

Critère	Batteries A	Batteries B	Batteries C
(1)	1	1	1
(2)	0	0	0
(3)	1	1	1
(4)	0	0	0
(5)	1	1	0
(6)	1	1	1
(7)	1	1	1
	$k_A = \frac{5}{7}$	$k_B = \frac{5}{7}$	$k_C = \frac{4}{7}$

$$\text{D'où : } \left\{ \begin{array}{l} (T_0)_A = \frac{5}{7} \times 71\,000 \text{ heures équivalentes} \\ (x_0)_A = 6 \times \frac{5}{7} \text{ défauts équivalents} \\ (T_0)_B = \frac{5}{7} \times 27\,000 \text{ heures équivalentes} \\ (x_0)_B = 2 \times \frac{5}{7} \text{ défauts équivalents} \\ (T_0)_C = \frac{4}{7} \times 40\,000 \text{ heures équivalentes} \\ (x_0)_C = 4 \times \frac{4}{7} \text{ défauts équivalents} \end{array} \right.$$

Les données "à priori" utilisables pour la batterie développée dans le cadre du projet correspondent donc :

– au temps cumulé d'essais "à priori" :

$$\begin{aligned}
 T_0 &= (T_0)_A + (T_0)_B + (T_0)_C \\
 &= 92\,857 \text{ heures équivalentes}
 \end{aligned}$$

– au nombre de défaillances "à priori" :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= (x_0)_A + (x_0)_B + (x_0)_C \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

La distribution à priori du taux de défaillance de la batterie en cours de développement correspond ainsi à une loi gamma de paramètres :

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= x_0 = 8 \\
 \beta_0 &= \frac{1}{T_0} \simeq 1,077 \cdot 10^{-5}
 \end{aligned}$$

Une vérification préalable dans une table montre que l'objectif de fiabilité prescrit n'est pas tout à fait atteint sur la base de ces données "à priori". On va donc déterminer la durée T^* de l'essai de fiabilité à zéro défaut devant être entrepris pour que l'objectif soit réellement atteint.

Pour cela, il faut considérer la distribution gamma de paramètres :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \alpha_0 + 0 = \alpha_0 \\
 \beta_1 &= \frac{1}{T_0 + T^*}
 \end{aligned}$$

On est conduit à chercher le quantile $\chi_{\nu}^2(0,6)$ de la distribution du khi-deux, associé à la probabilité 0,6, pour un nombre de degrés de liberté :

$$\nu = 2\nu_0 + 2 = 18$$

Il vient : $\chi_{18}^2(0,6) \approx 18,8$

D'où le quantile de la variable λ associé à la même probabilité :

$$\begin{aligned}\lambda(0,6) &= \beta_1 \times \frac{\chi_{18}^2(0,6)}{2} \\ &= 9,4 \beta_1\end{aligned}$$

L'objectif visé correspond à :

$$\lambda(0,6) = 10^{-4}/H$$

On doit donc avoir :

$$\beta_1 = \frac{10^{-4}}{9,4},$$

c'est-à-dire encore : $T_0 + T^* \approx 94\ 000$ heures.

D'où la durée cherchée du plan d'essai :

$$\begin{aligned}T^* &= 94\ 000 - T_0 \\ &= 94\ 000 - 92\ 857 \\ &= 1\ 143\ \text{h}\end{aligned}$$

Ainsi, sur la base des données "à priori", il a été possible de ramener le plan d'essai de fiabilité d'une durée de 9 000 h environ (approche classique) à une durée à peine supérieure à 1 000 h.

Dans l'hypothèse où une défaillance se manifeste durant l'essai de fiabilité ainsi déterminé, deux classes d'éventualités peuvent être envisagées :

1) La défaillance peut être considérée comme étant d'origine aléatoire et ne donne pas lieu à des modifications de conception ou de procédés de fabrication des batteries. Cette défaillance doit donc être intégrée dans la distribution à posteriori du taux de défaillance de la batterie, ce qui nécessite de poursuivre l'essai de fiabilité pendant environ 10 000 heures supplémentaires, au détriment des contraintes financières et de délais du projet.

2) La défaillance a une cause évidente et se traduit par une modification de conception ou de procédé de fabrication des batteries. Dans cette hypothèse, la définition du plan d'essai de fiabilité à prévoir pour la batterie modifiée est à étudier au cas par cas. En particulier, les résultats de l'essai précédent peuvent être intégrés dans les données "à priori" sur la batterie, et l'on peut définir le plan d'essai complémentaire à effectuer en fonction de ces nouvelles données.

5. CONCLUSION

Il a été vu, sur l'exemple de batteries argent/zinc, que l'utilisation des techniques bayésiennes peut conduire à une réduction sensible du volume d'essais nécessaire pour vérifier un objectif de fiabilité. La mise en œuvre de ce plan d'essais de fiabilité, rendue ainsi compatible avec les contraintes de projet, peut être alors raisonnablement envisagée.

Il convient toutefois de souligner qu'un usage immodéré et systématique de l'approche bayésienne ne saurait être préconisé. D'une façon générale, la crédibilité des techniques bayésiennes repose, d'un point de vue pratique, sur le "sérieux" des informations utilisées dans la construction des données "à priori". C'est pourquoi, toute information reposant sur le seul jugement subjectif de l'analyste bayésien restera toujours, à juste titre, un objet de contestation. L'utilisation de tables de données de fiabilité normalisées peut être envisagée dans certains cas, mais le problème majeur réside dans le choix de la "force" devant caractériser ces données en regard des futurs résultats d'essais. C'est pourquoi, lorsqu'ils sont disponibles, les résultats expérimentaux obtenus sur des matériels ressemblants, ou à fortiori identiques, constituent la meilleure information "à priori" envisageable : ils fournissent, en effet, des données raisonnablement objectives, et permettent de définir, par le moyen des coefficients de ressemblance entre les matériels, un "poids" réaliste devant caractériser l'ensemble de ces données "à priori". Certaines précautions doivent toutefois être prises lorsque le matériel développé présente, par rapport aux matériels existants, une caractéristique nouvelle jugée à priori "critique" d'un point de vue fiabilité. On peut envisager, dans ce cas, d'attribuer des poids différents aux paramètres caractéristiques du matériel concerné, le poids maximum étant affecté au paramètre jugé critique.

On remarquera aussi, d'un point de vue pratique, que la réduction du volume d'essais à effectuer susceptible d'être obtenue par l'approche bayésienne est conditionnée implicitement par une certaine adéquation entre l'objectif de fiabilité assigné et les résultats expérimentaux obtenus antérieurement sur des matériels voisins. Dans l'hypothèse où l'on se serait assigné un objectif particulièrement sévère en regard de la fiabilité expérimentale enregistrée sur des matériels voisins, les données "à priori" deviendraient pénalisantes et l'approche bayésienne conduirait à un volume d'essais plus important que dans l'approche classique. Il convient de voir, toutefois, qu'une telle hypothèse suppose soit un manque de réalisme dans l'objectif assigné, auquel cas celui-ci ne saurait être atteint, soit une confiance telle dans la fiabilité des technologies nouvelles utilisées sur le nouveau matériel qu'il est préférable "d'ignorer" toute donnée antérieure et de définir le plan d'essais de fiabilité par l'approche classique. Inversement, il se peut que l'objectif de fiabilité assigné soit déjà atteint, dans l'approche bayésienne, par la seule prise en compte des données "à priori". Dans cette dernière hypothèse, où l'objectif de fiabilité apparaît peu sévère, on pourra toutefois définir un plan d'essais de fiabilité extrêmement réduit et dont le rôle sera essentiellement de démontrer que les caractéristiques nouvelles du matériel développé n'apparaissent pas pénalisantes vis-à-vis de la fiabilité, et donc que les données antérieures sur les matériels ressemblants sont applicables au modèle développé.

Moyennant ces précautions, force est de reconnaître, en guise de conclusion, l'intérêt que peut représenter l'application des techniques bayésiennes à de nombreux domaines de la fiabilité, la détermination de plan d'essais ne constituant qu'un exemple parmi d'autres.

ANNEXE

Loi gamma

Une variable aléatoire X , définie entre 0 et l'infini, suit une loi gamma à deux paramètres, α et β , si cette loi a pour expression générale :

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha + 1)}$$

avec : $\alpha > -1$

$\beta > 0$

$\Gamma(\alpha + 1)$ = fonction eulérienne de 2^e espèce

$$= \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$$

Caractéristiques :

- moyenne : $\beta(\alpha + 1)$
- variance : $\beta^2 (\alpha + 1)$
- médiane : $\alpha \beta$

Tabulation de la fonction de répartition

On démontre que si une variable χ^2 suit une loi du khi-deux à ν degrés de liberté, la variable $\chi^2/2$ est distribuée suivant une loi gamma de paramètres :

$$\alpha = \nu/2 - 1 \quad \text{et} \quad \beta = 1$$

Pour déterminer la fonction de répartition d'une loi gamma de paramètres α et β suivie par une variable x , il suffit donc de considérer la variable : $u = x/\beta$.

La variable u suit alors une loi gamma de paramètres α et 1. Il suffit donc de se reporter à une tabulation de la loi du khi-deux —dite aussi “gamma incomplète”—, en prenant pour degrés de liberté :

$$\nu = 2\alpha + 2$$

Soit $\chi^2_{2\alpha+2}(\delta)$ le quantile associé à la probabilité δ .

On en déduit le quantile de la variable initiale, associé à la même probabilité δ :

$$x(\delta) = \beta \times \frac{\chi^2_{2\alpha+2}(\delta)}{2}$$

REFERENCES

- [1] HANSEL G. et GROUCHKO D. – Préviation séquentielle par la méthode de Bayes. (*Revue de Statistiques Appliquées* n° 3 - 1965).
- [2] IEEE Transactions of Reliability : special issue on Bayesian techniques (August 1972).
- [3] Annals of Assurance Sciences. Eight Reliability and Maintainability Conference (1969) :
 - BALABAN H. : a Bayesian approach to reliability demonstration.
 - SPRINGER M.D. and THOMSON W.E. : Bayesian confidence limits for system reliability.