REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

D. HERNAD
M. MOUILLARD
D. STRAUSS-KAHN

Du bon usage de R/S

Revue de statistique appliquée, tome 26, nº 4 (1978), p. 61-79
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1978__26_4_61_0>

DU BON USAGE DE R/S

D. HERNAD(*), M. MOUILLARD(*) et D. STRAUSS-KAHN(**)

(*) Université de Paris X – Nanterre

(**) Université de Nancy II et CREP

Il est assez surprenant de mettre en regard l'importante bibliographie consacrée à R/S et le petit nombre de ses utilisations empiriques. Selon B. Mandelbrot qui a adopté, après l'avoir améliorée, une méthode primitivement utilisée par le nilologue H.E. Hurst, il s'agit là d'"une invention statistique et (d')une découverte empirique remarquable. . . " [18]. En effet si ". . . du point de vue de la valeur de H, toutes les fonctions aléatoires indépendantes sont indistinguables et équivalentes, R/S a la capacité extraordinaire de séparer les propriétés de dépendance à long terme de X des propriétés de sa distribution marginale" [16].

Cependant, malgré la puissance de cet instrument d'analyse des séries chronologiques il reste peu utilisé, en particulier en France (exception faite des travaux de D. Zajdenweber [28]) et ce en dépit de sa simplicité d'emploi qui découle de son caractère non paramétrique. Peut-être le manque d'intérêt empirique suscité par R/S provient-il d'un approfondissement nécessaire des conditions d'utilisation de cette méthode. Cet article a pour objet d'étudier quelques aspects de la méthode qui n'ont été que rarement abordés (voire jamais). Nous chercherons ainsi, en ce qui concerne la technique proprement dite, quel rôle joue le nombre de courbes utilisées ? Comment se servir du décalage initial ? Comment obtenir très simplement, par simulation, des valeurs de $H < 0{,}5$.

1. RAPPELS SUR LA METHODE

La méthode R/S permet de mesurer l'intensité de la dépendance qui peut exister dans la structure d'une série. Elle repose sur la propriété suivante : la dépendance se traduit par des cycles apériodiques de plus ou moins longue durée, ou (ce qui revient au même) par une corrélation entre la moyenne de la chronique passée et la moyenne de la chronique future quelle que soit la longueur de la série (1).

1.1. Notions de dépendance

Mandelbrot distingue essentiellement deux notions de dépendance qui, une fois leurs rapports étudiés, lui permettront de définir la méthode R/S (2).

(1) Cette équivalence n'est rigoureusement admissible qu'en présence de phénomènes dont les lois marginales sont gaussiennes.

(2) Nous ferons abstraction du concept de R – dépendance.

Mots Clés : **Analyse factorielle, analyse des correspondances, distances du χ^2, équivalence distributionnelle.**

1.1.1. La C-dépendance

Le concept de C-dépendance repose sur la définition d'une quantité, S'(o), qui n'est autre que l'estimation de la puissance spectrale à la fréquence zéro(3) :

$$S'(o) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k) = \frac{C(o)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C(k)$$

où C(k) représente l'autocovariance de retard k.

Mandelbrot (4) effectue alors une classification des séries en quatre catégories, selon la valeur S'(o) :

a) $0 < S'(o) < \infty$: il y aura C-dépendance à court terme, ou encore C-dépendance finie, ou encore mémoire courte ;
b) $S'(o) = \infty$: c'est le cas d'une C-dépendance positive de long terme, ou encore d'une C-dépendance infinie positive ;
c) $S'(o) = 0$: on parlera alors d'une C-dépendance négative de long terme, ou encore d'une C-dépendance infinie négative ;
d) S'(o) n'existe pas : c'est le cas d'une fonction périodique.

Soient maintenant x(t) la série étudiée (5) et $x^*(t) = \sum_{S=1}^{t} x(S)$, la nouvelle série obtenue par sommations successives de x(t).

Soit V(d) la variance de la somme de d valeurs successives de x(t). Elle s'exprime de la manière suivante :

$$V(d) = E[x^*(t+d) - x^*(t)]^2 = d\, C(o) + 2 \sum_{k=1}^{d-1} \sum_{S=1}^{k} C(S)$$

Il montre alors que chacune de ces trois premières catégories de dépendance est associée à un comportement spécifique de V(d) en fonction de d :

a) V(d) sera asymptotiquement proportionnelle à d dans le cas d'une mémoire courte ;
b) V(d) croîtra plus rapidement que d, en cas de dépendance infinie positive ;
c) V(d) croîtra moins rapidement que d, en cas de dépendance infinie négative.

---

(3) En effet, la puissance spectrale non lissée s'exprime par :

$$S'(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C(k)\, e^{-2\pi i f k}, \text{ pour toute fréquence f.}$$

Ce qui permet de remarquer qu'il existe un rapport entre la notion de dépendance et la forme du spectre considéré ([16], pp. 267-268).

(4) [16], pp. 265-267.

(5) Nous supposerons toujours, dans ce qui suit, que la série x(t) a été préalablement centrée [16], p. 268.

1.1.2. La Γ*-dépendance*

Mandelbrot(6) montre ensuite que la corrélation entre la moyenne de la chronique passée, $\frac{x^*(-d')}{d'}$ et celle de la chronique future, $\frac{x^*(d)}{d}$, sera :

$$\Gamma(d', d) = \frac{V(d + d') - V(d) - V(d')}{2[V(d)]^{1/2}[V(d')]^{1/2}}$$

Comme dans le cas de la C-dépendance, il peut établir quatre catégories de séries :

a) $\lim\limits_{d \to \infty} \Gamma(dh, d) = 0$ pour $h > 0$: cas d'une Γ-dépendance finie ou encore courte :

b) $\lim\limits_{d \to \infty} \Gamma(dh, d) > 0$: -dépendance infinie positive ;

c) $\lim\limits_{d \to \infty} \Gamma(dh, d) < 0$: -dépendance infinie négative ;

d) la limite n'existe pas.

1.1.3. Relations entre C et Γ*-dépendances*

Mandelbrot propose une classification unique qui distingue (7) :

a) la (Γ ou C) dépendance finie ou de courte période ou encore mémoire courte, c'est le cas d'une série générée par un processus de moyenne mobile de longueur finie ;

b) la dépendance infinie positive ;c'est le cas d'un bruit fractionnaire gaussien;

c) la dépendance infinie négative.

Bien que cette classification unique permette théoriquement d'apporter des éléments de réponses à l'étude des dépendances internes des séries chronologiques, un certain nombre de faiblesses semblent cependant hypothéquer les conclusions précédentes.

En ce qui concerne la C-dépendance, certaines configurations particulières de la fonction d'autocovariance de la série étudiée peuvent entrainer une confusion quant à la véritable dépendance de la série. Par exemple, lorsque l'autocovariance de retard j est de la forme :

$$\mathrm{COV}(j) = \frac{1}{j}, \text{ pour } j \geqslant 1$$

ou

$$\mathrm{COV}(j) = \frac{1}{1 + j}, \text{ pour } j \geqslant 0$$

la C-dépendance laissera présumer l'existence d'une dépendance infinie puisque $S'(o) = \infty$ alors qu'en fait, il ne s'agit ici que d'une dépendance de court terme.

Par ailleurs les notions de C-dépendance et de Γ-dépendance ne s'appliquent qu'au cas des séries stationnaires au second ordre. Ainsi, par exemple, si l'on s'inté-

---

(6) [16], pp. 270-272.

(7) [16] p. 272.

resse aux lois stables au sens de Paul Lévy, on mesure immédiatement l'étendue d'une telle restriction puisqu'alors, seul le cas $\alpha = 2$ est concerné.

Pour sa part, la méthode R/S permet de définir une mesure de la dépendance utilisable pour presque toutes les lois (pourvu que l'hypothèse de stationnarité(8) soit vérifiée), mettant en évidence une absence de mémoire aussi bien pour une série constituée d'aléas de Cauchy que d'aléas gaussiens.

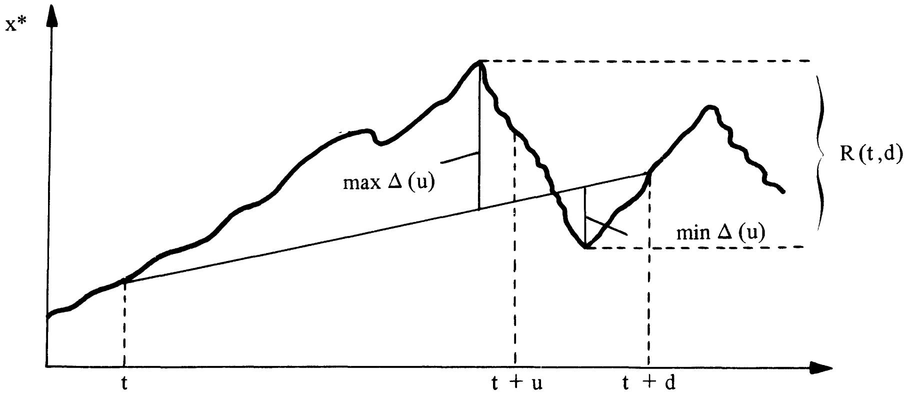
1.2. Principe de la méthode R/S

Le principe d'estimation du paramètre de dépendance H qui caractérise la méthode, a été mis au point par Mandelbrot(9) et il repose sur le calcul du rapport :

$$R(t, d)/S(t, d)$$

sur une fraction de la série étudiée, fraction commençant en t et de longueur d (d sera aussi appelée "décalage").

A partir du graphique proposé par Mandelbrot dans [16] et qui est reproduit ci-dessous, les définitions de R et S sont les suivantes :



GRAPHIQUE 1

Si x(t) est la série étudiée, on forme $x^*(t) = \sum_{s=1}^{t} x(s)$ (10). $\Delta(u)$ est alors l'écart à l'interpolation linéaire de x* entre t et t + d.

$$\Delta(u) = x^*(t + u) - x^*(t) - \frac{u}{d}\,[x^*(t + d) - x^*(t)] \tag{1}$$

(8) La stationnarité est ici définie au sens large et concerne les probabilités de transition: pour tout $t > s$, $x(t) - x(s)$ est indépendant de s et sa variance ne dépend que de $t - s$.

(9) cf [15], [17] et [18].

(10) Les propriétés mathématiques de $x^*(t)$ fondant la méthode sont exposées dans [6], [24], [25] et [27].

On pose :

$$R(t,d) = \underset{0 \leqslant u \leqslant d}{\mathrm{Max}}\, \Delta(u) - \mathrm{Min}\, \Delta(u) \tag{2}$$

et

$$S^2(t,d) = d^{-1} \sum x^2(t+u) - d^{-2}[\sum x(t+u)]^2 \tag{3}$$

L'apport de Mandelbrot a consisté à prendre en compte une version améliorée de la notion d'étendue (relation (2)) au lieu de la définition classique employée par Hurst(11) qui est à l'origine de la méthode.

Le point central de ce calcul est que R – qui est défini sur la variable cumulée x^* – combine les propriétés à long, et court termes de la série, alors que S^2, qui est la variance de la variable x, n'inclut que les propriétés de court terme. Sous certaines hypothèses, le rapport R/S en contient plus que les propriétés de long terme(12).

En effet, l'"analyse R/S" est obtenue à partir des propriétés d'une fonction aléatoire stationnaire définie en transformant x(t) par la fonction R(t, d)/S(t, d)(13). C'est le comportement de cette fonction, R/S, lorsque $d \to \infty$, qui permet alors de définir le concept de R/S – dépendance qui est une forme de dépendance statistique cyclique apériodique.

Définition : Un processus aléatoire satisfaira la loi $\frac{R}{S} \sim c\, d^H$ en moyenne, si $\lim_{d \to \infty} d^{-H}\, E\, [R(t,\, d)/S(t,\, d)]$ est définie strictement positive ([23], p. 982).

Ainsi, asymptotiquement log E [R/S] s'exprimera, en fonction de log d, par une droite de pente 0,5 dans le cas d'une mémoire courte ; par une droite de pente H comprise entre 0.5 et 1 en cas de dépendance infinie positive et par une pente inférieure à 0,5 en cas de dépendance infinie négative(14).

Il nous est alors possible de proposer un algorithme de calcul de H, en accord avec les développements qui précèdent.

1.3. Algorithme de calcul de H

La série peut-être découpée en un certain nombre de tronçons successifs (de longueur d) conduisant chacun à une valeur du rapport R(t, d)/S(t, d). La valeur

---

(11) Cf "Le Nil", Payot Editeur, Mandelbrot ([16], pp. 280-283) a en effet montré que la notion classique d'étendue ne pouvait être utilisée que dans le cas particulier d'une série x(t) stationnaire en moyenne.

(12) Un exemple trivial pour lequel cette division par S s'avère superflue est celui d'une série constituée d'aléas gaussiens.

(13) Mandelbrot traite, de façon précise, de processus stationnaires au second ordre puisque R(t, d)/S(t, d) ne dépend pas de t, cependant il effectue la généralisation de l'emploi de la méthode R/S :

– à l'étude de lois stables au sens de Lévy [12] dont le coefficient caractéristique α est inférieur ou égal à 2 : par exemple dans le cas d'une loi de Cauchy, il vérifie bien que H = 0.5 ([18], p. 358).

– à l'étude de promenade aléatoire pour laquelle H = 1. De façon générale, il note que R/S s'applique aussi bien à une série pour laquelle $[E(x)]^2 = \infty$ qu'à une série stationnaire ([16], p. 267).

(14) Mandelbrot et Wallis ont en effet montré ([21], [22] et [23]), que l'intensité de la dépendance à long terme qui est donnée par le coefficient H, prend des valeurs comprises dans l'intervalle [0,1].

moyenne de ces rapports sera associée au décalage d [15]. Ainsi par exemple avec un décalage égal à 10, l'analyse étant effectuée sur une série de 1 500 points, on calculera le rapport R(t, 10)/S(t, 10) de 1 à 10, de 11 à 20, de 21 à 30, . . . , de 1 491 à 1 500. La valeur retenue sera une moyenne arithmétique de tous les résultats précédents. En recommençant le calcul pour différentes valeurs de d, on obtient une série de couples (R/S, d). Mandelbrot et Wallis ayant montré que l'intensité de la dépendance à long terme est donnée par le coefficient H compris entre 0 et 1, et défini par :

$$R/S \underset{d \to \infty}{\sim} C\, d^H$$

où C est une constante positive, on doit donc s'attendre à une liaison linéaire entre log R/S et log d. Pour obtenir une répartition uniforme de d sur une échelle logarithmique, ses valeurs seront données par :

$$d(i) = n^{iB+1} \quad i = 0, 1, 2, \ldots T.$$

où B est un paramètre de transformation logarithmique[16], n le premier décalage utilisé, et T + 1 le nombre de tronçons retenu pour l'estimation.

Pour obtenir une meilleure estimation de H, il serait souhaitable de recommencer son calcul plusieurs fois à partir d'échantillons différents. Dans la pratique ceci est généralement impossible lorsque l'on travaille sur une série chronologique réelle. Aussi va-t-on constituer un nombre M d'échantillons fictifs en prenant M points de départ arbitraire de la série. Les "échantillons" ainsi constitués sont donc de longueur différente et ne sont pas indépendants.

En effet, la $j^{\text{ième}}$ courbe a pour longueur :

$$N \frac{(M - j + 1)}{M}$$

et comme point de départ :

$$t = N \frac{(j - 1)}{M} + 1 \quad j = 1, \ldots, M$$

Ainsi par exemple avec 1.500 points (N) et dix courbes (M), les points de départ de ces dernières s'échelonneront comme suit : 1, 151, 301, 451, 601, 751, 901, 1051, 1201, 1351. De plus, en supposant un décalage initial égal à 10, les différentes valeurs de R/S seraient calculées pour, par exemple, 11 tronçons de longueur 10, 16, 27, 44, 74, 122, 202, 333,550, 908 et 1500. Et, de ce fait, la dixième courbe ne fournira que 6 estimations alors que la première permettait d'en obtenir 11.

Si pour chacun des M échantillons, on met en relation les valeurs des logarithmes de R/S avec les logarithmes des valeurs de d correspondantes on aboutit au graphique 2.

---

(15) Cette procédure a pour but d'éliminer toute structure déterministe dans la série. Ainsi, si par exemple, la série présente une tendance, elle sera estimée pour chaque sous-échantillon étudié et incorporée dans le calcul de R.

(16) $B = \frac{\log N}{\log n} - 1/T$, avec N = nombre de points de la série analysée, ce qui nous assure que $n \leqslant d(i) \leqslant N, \forall\, i \in [0, T]$.

C'est la pente du faisceau des M courbes qui fournira l'estimation de H. Cette estimation sera d'autant meilleure que ce faisceau se rapprochera d'une droite unique.

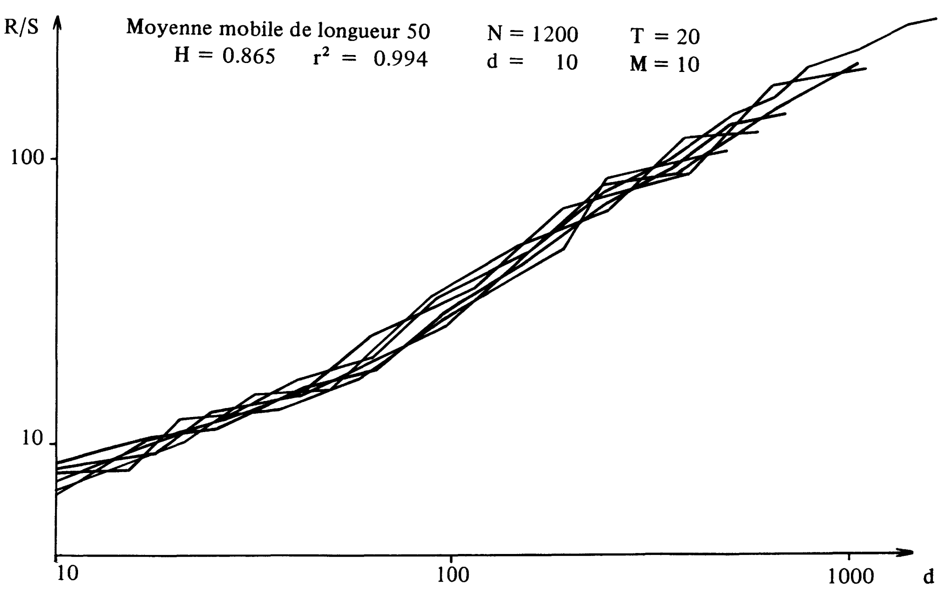
Aussi, afin de rechercher cette droite unique, choisissons-nous d'effectuer un ajustement linéaire sur l'ensemble des couples (log R/S, log d). La qualité de l'ajustement retenu (c'est-à-dire la plus ou moins grande dispersion du faisceau des M courbes estimées) sera "mesurée" par l'intermédiaire du coefficient de détermination r^2 (carré du coefficient de corrélation).

1.4. L'interprétation des résultats

Conformément aux analyses précédentes, la méthode R/S appliquée à toute série stationnaire, doit fournir une estimation de H proche de 0.5, lorsque $d \to \infty$. Or, en pratique – et surtout dans le domaine des séries économiques –. on ne dispose que de séries relativement courtes (moins de 300 points). Il est donc impossible d'étudier la convergence asymptotique de H vers 0.5. Par contre, et comme le fait remarquer Mandelbrot ([13] à [24]) lorsqu'on applique R/S avec un nombre de décalages fini (par exemple 30 décalages sur une série de 400 points pour laquelle sont estimées 10 courbes – cf. annexe) la représentation des points moyens log R/S, en fonction de log d sera telle que :

– tout d'abord, (c'est-à-dire sur les premiers points), il sera possible d'estimer une droite de pente H comprise entre 0.5 et 1 selon la longueur de la mémoire qui caractérise le processus aléatoire étudié : c'est ce que Mandelbrot appelle la phase transitoire ;

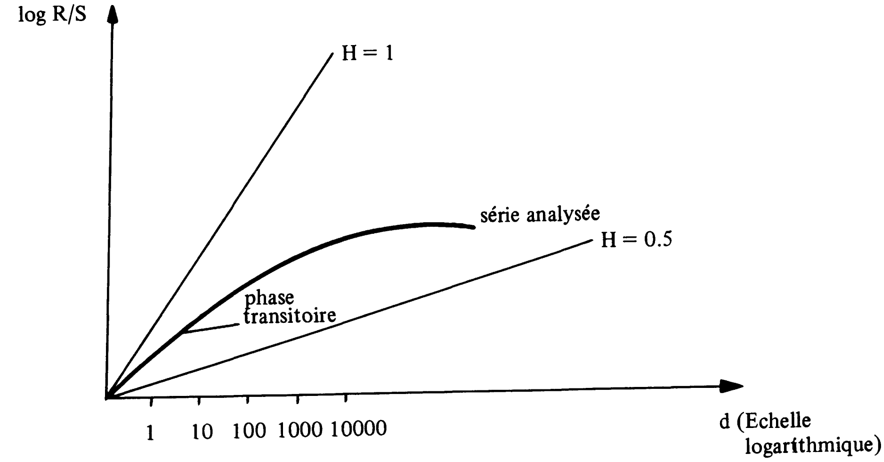
– puis, lorsque le décalage sera suffisamment grand, une nouvelle droite apparaîtra nettement, dont la pente sera proche de 0.5 (cf. graphique 3).



GRAPHIQUE 2

Plus la mémoire sera longue, c'est-à-dire plus la corrélation sera élevée entre $x^* (-d')$ et $x^* (d)$, moins cette convergence sera rapide et plus la phase transitoire sera longue. Ainsi Mandelbrot ([17]) note-t-il que dans le cas de variables aléatoires indépendantes (lois de Gauss, de Cauchy ou loi log-normale), la convergence est très rapide. Par contre, lorsque les valeurs de la série $x(t)$ sont statistiquement dépendantes (cas d'une dépendance de courte période de type moyenne mobile), la phase transitoire est plus longue, mais la loi cd^H tient toujours asymptotiquement.

L'analyse R/S peut donc être employée pour mesurer la longueur de la mémoire, et pour associer à chaque série la valeur de H qui lui correspond. Pour ce faire, nous proposons de balayer l'espace des décalages, c'est-à-dire d'effectuer plusieurs analyses R/S d'une même série pour différentes valeurs du décalage initial employé. L'indicateur de qualité de l'ajustement, r^2, permettra de déceler de façon approximative la longueur de la mémoire recherchée : il devrait être maximum dès que le décalage initial utilisé égale la longueur de la mémoire, pusqu'alors la phase transitoire n'apparait pas sur un graphique représentant les couples (log R/S, log d), éliminant ainsi la présence de la rupture de pente notée précédemment.



GRAPHIQUE 3

Lorsque le décalage initial retenu dépassera cette valeur optimale, la valeur de H tendra progressivement vers 0.5 ([18]).

C'est d'ailleurs une procédure analogue que Mandelbrot propose pour rechercher la longueur de la mémoire et estimer par là-même l'intensité de la dépendance H ([23], p. 974). Il effectue l'analyse R/S pour un décalage initial le

(17) [23], p. 971-72

(18) Sauf bien évidemment dans le cas d'une promenade aléatoire : dans ce cas H tend vers 1.

plus important possible. Il représente alors graphiquement les couples (log R/S, log d). Si une rupture de pente apparait sur le graphique, il conclut alors :

– que la longueur de la mémoire est inférieure au décalage utilisé ;

– que sa valeur égale le décalage pour lequel cette rupture à lieu ; il estime alors H sur le tronçon correspondant à la phase transitoire.

Si aucune rupture de pente n'apparaît, il doit alors recommencer son analyse avec un décalage initial supérieur (si cela est possible, en vertu des conditions rappelées en annexe).

Cette procédure est cependant bien lourde vis-à-vis de celle que nous proposons puisqu'elle repose sur une analyse graphique des résultats. Et à ce titre, elle apparait nettement moins précise et risque de conduire à une multiplication des expériences si la rupture de pente n'est pas directement perçue ou lorsque H est proche de 1.

Quelle que soit la procédure d'estimation utilisée, les résultats obtenus s'interpréteront comme suit, compte tenu de la valeur de H retenue :

a) lorsque la série analysée est purement aléatoire la valeur de H est de 0.5 quel que soit le processus générateur. Ce qui traduit une absence de dépendance dans la série. La valeur de H, dans le cas d'une moyenne mobile, avoisine aussi 0.5 une fois la phase transitoire dépassée ;

b) à mesure que la dépendance augmente, c'est-à-dire à mesure que des cycles de long terme apériodiques apparaissent, la valeur de H se rapproche de celle d'une trajectoire de longue période et le spectre de la série mettra en évidence une très forte puissance à la fréquence zéro (cf. [14], [15], [8] et [11]). La puissance sera infinie ; c'est le cas, bien entendu trivial, de la promenade aléatoire qui est non stationnaire (mémoire infinie), mais aussi des bruits fractionnaires. En ce qui concerne une moyenne mobile simple, la pente H ne sera supérieure à 0.5 que durant la phase transitoire ;

c) lorsqu'en revanche $0 < H < 0.5$, il y a une dépendance négative dans la série. L'interprétation en est plus délicate. Il semble que cela corresponde à un processus tel qu'à une grande fluctuation dans un sens succède une grande fluctuation dans l'autre.

2. ETUDE DE DIFFERENTS PROCESSUS SIMULES ($H \geqslant 0.5$)

Afin d'étudier les propriétés de l'algorithme et de la procédure d'estimation proposés, nous allons appliquer la méthode R/S à un certain nombre de séries simulées. Nous commencerons par l'étude du cas trivial et non stationnaire d'une promenade aléatoire. Nous appliquerons ensuite la méthode à l'étude de processus stationnaires de type moyenne mobile et nous verrons ainsi comment elle nous permet d'identifier chacun de ces processus.

2.1. Simulation d'une promenate aléatoire

On a déjà indiqué que lorsque la dépendance est infinie positive le coefficient H vaut 1. Ce cas qui est d'une interprétation aisée puisqu'il correspond au processus des promenades aléatoires va nous permettre d'étudier certaines propriétés de R/S.

Nous allons donc envisager le processus suivant :

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t \qquad \text{avec} \quad \epsilon_t \in \mathcal{N}\ (0,1)$$

soit

$$x_t = x_0 + \sum_{s=1}^{t} \epsilon_s$$

Avec un décalage initial n = 10 (cf. tableau Al) la valeur de H est trop faible : 0.64. Ceci vient de ce que les premières valeurs de R/S, calculées sur des tronçons relativement courts (10 points, 16 points, 27 points. . .) sont biaisées. La pente entre les points moyens successifs croit avant de se stabiliser, aussi le r^2 ne vaut-il que 0,85. Les premières estimations effectuées sur les tronçons trop petits ne permettent pas de saisir correctement l'effet de mémoire purement cumulatif.

En portant le décalage initial à 30, on constate une nette amélioration puisque H vaut 0,88 et r^2 = 0,98. Avec un décalage initial supérieur à 100 la pente vaut 1 : une mémoire au moins égale, voire supérieure à la longueur de la série est mise en évidence.

Les résultats obtenus ne sont que très faiblement modifiés lorsque l'on constitue 20 "échantillons" (M = 20) à partir de la série initiale. Il en est de même si l'on porte la longueur de la série à 4.000 points (Tableau A2).

Cet exemple montre l'extrême importance du *décalage initial* utilisé. En se limitant à un décalage de 10, on est tenté de conclure à une mémoire relativement faible.

TABLEAU A

Promenade aléatoire

Al N = 1.500 points

n		10 T = 10	30 T = 30	50 T = 50	70 T = 70	90 T = 90	110 T = 110
M = 10	H	.64	.88	.95	.98	.99	1.00
	r^2	.85	.98	.99	1.00	1.00	1.00
M = 20	H	.64	.88	.94	.95	.96	.97
	r^2	.85	.98	.99	.99	1.00	1.00

A2 N = 4.000 points

n		50 T = 50	100 T = 100	150 T = 150	200 T = 200
M = 20	H	.95	.97	1.00	1.00
	r^2	.99	1.00	1.00	1.00

2.2. Simulation d'une moyenne mobile

Le processus générateur est de la forme :

$$x_t = (h+1)^{-1} \sum_{s=t-h}^{t} \epsilon_s \quad \text{avec} \quad \epsilon_s \in \mathcal{N}(0,1)$$

Les simulations ont été effectuées sur des séries de 1.500 points.

2.2.1. Un exemple de mémoire longue mais non infinie : h = 150.

Ici encore, pour mettre la mémoire en évidence, il faut que le décalage initial ne soit pas trop faible. On constate en effet (tableau B1) que lorsque ce décalage vaut 10, la valeur de H n'est que de 0,87 ([19]).

Mais le nombre de couples (R/S, d) pour lesquels le décalage est insuffisant pour appréhender correctement la mémoire est moins important que dans le cas de la promenade aléatoire, aussi la valeur de r^2 est-elle dès le début assez élevée : 0,98.

A partir d'un décalage initial supérieur ou égal à 70, la valeur de H et celle de r^2 se stabilisent : une mémoire longue mais non infinie apparait. Aussi, afin de distinguer entre une promenage aléatoire et une moyenne mobile longue, il s'avère nécessaire de faire varier le décalage initial.

TABLEAU B1

Moyenne mobile : H = 150

N = 1.500 points

n	10 T = 10	30 T = 30	50 T = 50	70 T = 70	90 T = 90	110 T = 110
M = 10 H r^2	.87 .98	.96 99	.97 .99	.98 .99	.98 .99	.98 .99

2.2.2. Le cas d'une mémoire courte : h = 20

Dans le cas d'une mémoire courte, un problème symétrique du précédent se fait jour. L'utilisation d'un décalage initial trop important masque en partie la longueur de la mémoire. Ainsi on constate sur le tableau B2 que les valeurs de H et r^2 décroissent sensiblement dès que le décalage initial dépasse la longueur de la mémoire. L'existence d'une mémoire courte semble donc très nettement mise en évidence.

TABLEAU B2

Moyenne mobile : h = 20

N = 1.500 points

n	10 T = 10	30 T = 30	50 T = 50	70 T = 70	90 T = 90	110 T = 110	130 T = 130
M = 10 H r^2	.70 1.00	.66 .99	.64 .99	.61 .99	.61 .99	.60 .98	.60 .98

(19) Ce résultat est obtenu pour un nombre de courbes (M) égal à 10 ; si on porte M à 20 il vient H = 0,865.

2.2.3. Une simulation intermédiaire : $h = 50$

Pour les valeurs du décalage initial supérieures à 50 la situation est la même que dans le cas précédent, les valeurs de H décroissent sensiblement.

TABLEAU B3

Moyenne mobile : $h = 50$

N = 1.500 points

n	10 T = 10	30 T = 30	50 T = 50	70 T = 70	90 T = 90	110 T = 110
M = 10 H r^2	0.80 0.99	0.80 1.00	0.80 1.00	0.76 0.99	0.74 0.99	0.73 0.99

On pourrait s'attendre à ce que pour un décalage initial inférieur à 50, les valeurs de H soit sous-estimées. Au § 2.2.1. en comparant les résultats obtenus sur une promenade aléatoire et sur une moyenne mobile de longueur 150 on a souligné que, dans ce dernier cas, le nombre de couples (R/S, d) ne permettant pas d'appréhender la mémoire à cause d'un décalage initial trop faible était peu important, ce qui expliquait une erreur moindre que pour la promenade aléatoire. Ici ce phénomène est encore plus sensible, et même avec un décalage initial de 10 l'effet de mémoire peut être correctement mesuré.

Ces quelques simulations – et un assez grand nombre d'autres qui n'ont pas été présentées ici – donnent à penser que la longueur de la mémoire d'une série ne peut être correctement estimée à l'aide de la méthode R/S qu'en faisant systématiquement varier le décalage initial. Se contenter d'un décalage initial faible (de l'ordre de 10) peut masquer l'existence d'une mémoire longue voire infinie (cf le cas de la promenade aléatoire § 2.1. et de la moyenne mobile de longueur 150 § 2.2.1.). De même, un décalage initial trop important ne permet pas de saisir une mémoire courte (cf moyenne mobile de longueur 20 § 2.2.2.). Un balayage s'impose donc ; la longueur de la mémoire semble correspondre au décalage pour lequel la valeur du r^2 est maximum.

2.3. L'identification des processus : le rôle de H.

Les simulations que nous avons précédemment présentées se caractérisaient par l'égalité stricte de T et n.

Comme nous avons essayé de le montrer, une telle démarche permet d'estimer la longueur de la mémoire du processus analysé. En revanche, nous avons pu remarquer qu'il semblait difficile de caractériser précisément ce processus au seul vu de la valeur de H.

En fait, les divers processus analysés seront identifiés par l'intermédiaire des valeurs de H pour lesquels les coefficients r^2 sont maximaux. Ainsi, en reprenant les simulations précédentes, pouvons-nous dresser le tableau suivant :

TABLEAU C1

Valeur caractéristique de H dans le cas suivant	H	r^2	Caractéristiques de l'estimation T = n	M
Promenade aléatoire	1.00	1.00	110	10
Moyenne mobile de longueur 150	.98	.99	110	10
50	.80	1.00	50	10
20	.70	1.00	10	10

Afin de rendre l'utilisation de la technique R/S plus aisée, nous proposons une référence empirique pour différents processus (tableau C2). Celle-ci a été établie en maintenant constante la valeur du paramètre T.

Trois remarques s'imposent :

1) Les valeurs de H que l'on peut retenir en considérant la colonne n = 10, correspondent à celles auxquelles conduit l'analyse théorique de la méthode (§ 1.4.).

2) Le fait de maintenir la valeur de T constante quelque soit le décalage initial utilisé (n) rend caduque toute considération relative au rôle du coefficient r^2 pour "mesurer" la longueur de la mémoire. En effet, l'existence d'une phase transitoire ne se trouve plus pris en compte lorsque le décalage initial augmente (§ 1.4).

3) Enfin, la convergence de H vers 0.5 se trouve illustrée quelque soit le processus étudié lorsque $n \to \infty$; on constate cependant que la vitesse de convergence diminue avec l'importance de la mémoire.

3. UTILISATION DE R/S SUR SERIES COURTES

Les quelques exemples d'application de cette méthode publiés tant en France qu'aux U.S.A. concernent toujours des chroniques (observées ou simulées) dont la longueur dépasse le millier d'observations. Ainsi B. MANDELBROT, lorsqu'il effectue des simulations se plait-il en général à n'étudier que des séries d'au moins 30 000 points. Or, la plupart du temps, l'économiste n'a à sa disposition que des séries courtes ; hormis les cours des titres, leur taille n'excède que rarement quelques centaines de points. Il semble donc particulièrement intéressant de tester les propriétés de R/S sur des séries de 150 points environ (douze ans en données mensuelles).

Les résultats qui suivent ont été obtenus sur les 150 premiers points des séries qui ont été utilisées au § 2.2.1. et 2.2.2. Notons tout d'abord qu'il n'est pas possible d'utiliser de grandes valeurs du décalage initial (n) puisque la contrainte suivante doit être respectée (cf annexe) :

$$N \geqslant M . n$$

6

TABLEAU C2

Référence empirique pour différents processus

M = 5, T = 20, 1 500 points.

Nature du processus			Décalage initial n						
			10	30	50	70	90	110	130
Aléa gaussien		H	.503	.484	.472	.485	.482	.486	.478
		r^2	.988	.980	.962	.958	.938	.935	.897
Moyenne mobile de longueur	10	H	.678	.578	.542	.525	.508	.487	.491
		r^2	.979	.980	.983	.983	.972	.969	.966
	30	H	.786	.689	.642	.625	.596	.575	.569
		r^2	.983	.980	.982	.981	.976	.973	.966
	50	H	.860	.791	.742	.694	.651	.632	.621
		r^2	.987	.977	.975	.980	.976	.976	.973
	70	H	.891	.830	.785	.745	.713	.699	.677
		r^2	.991	.985	.986	.985	.983	.986	.984
	90	H	.906	.853	.819	.790	.773	.756	.737
		r^2	.994	.991	.992	.989	.990	.990	.989
	100	H	.921	.880	.839	.813	.797	.779	.759
		r^2	.995	.991	.992	.988	.991	.990	.987
	500	H	.999	.995	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		r^2	.999	.998	.998	.997	.996	.995	.994
Promenade aléatoire		H	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		r^2	.999	.999	.998	.997	.997	.996	.995

Dans le cas d'une moyenne mobile à mémoire longue (h = 150) les résultats du tableau D1 montrent que la persistance à long terme semble fortement sous estimée pour les valeurs possibles du décalage initial.

TABLEAU D1

Moyenne mobile : h = 150

N = 150 points

n		10 T = 10	15 T = 15
M = 10	H	0.68	0.79
	r^2	0.92	0.96
M = 15	H	0.67	(1)
	r^2	0,92	(1)

(1) non calculable

En diminuant le nombre de courbes utilisées, l'existence d'une mémoire longue mais non infinie apparait avec force.

TABLEAU D2

Moyenne mobile : h = 150

N = 150 points

n		10 T = 10	20 T = 20	30 T = 30
M = 7	H	0.69	0.90	(1)
	r^2	0.92	0.98	(1)
M = 5	H	0.68	0.87	0.94
	r^2	0.92	0.98	0.99

(1) non calculable.

Les tableaux suivants montrent que l'analyse peut aussi être menée dans le cas d'une mémoire courte.

TABLEAU D3

Moyenne mobile : h = 20

N = 150 points

n		10 T = 10	15 T = 15
M = 10	H	0.72	0.70
	r^2	0.99	0.98
M = 15	H	0,72	(1)
	r^2	0.99	(1)

(1) non calculable

N = 150 points

n		10 T = 10	20 T = 20	30 T = 30
M = 7	H	0.70	0.69	(1)
	r^2	0.98	0.97	(1)
M = 5	H	0.70	0.67	0.65
	r^2	0.97	0.97	0.95

La proximité des résultats obtenus ici avec ceux de la section 2.2. semble indiquer que l'utilisation de R/S sur séries courtes n'est pas à rejeter a priori.

4. CONCLUSION

Dans cet article nous avons tenté d'apporter des éléments de réponse à trois problèmes soulevés par l'utilisation de R/S.

a) Le point le plus important concerne sans doute la nécessité de faire varier le décalage initial afin d'obtenir des estimations de H non biaisées. Au demeurant la variation de la valeur r^2 semble pouvoir fournir une indication intéressante sur la longueur de la mémoire du processus sous-jacent.

b) La littérature est assez discrète sur l'interprétation à donner aux valeurs de H inférieures à 0,5 (cf [13] à [23]). Toutefois, le cas H = 0 est presque trivial si on veut bien analyser l'algorithme de calcul (§ 1.2.). Pour que H # 0 il faut et il suffit que la série cumulée $x^*(t)$ soit presque constante ou presque linéaire en t. Ce cas correspond, par exemple, à une série de la forme :

$$x_t = - x_{t-1} + \epsilon_t \quad \text{avec} \quad E(\epsilon) = 0$$

soit

$$x_t = \sum_{S=0}^{N-1} (- 1^S \epsilon_{t-s}) + (- 1)^N x_{t-N}$$

ce qui donne avec $x_{t-N} = 1$, les résultats attendus :

TABLEAU D4

N = 1 500 points

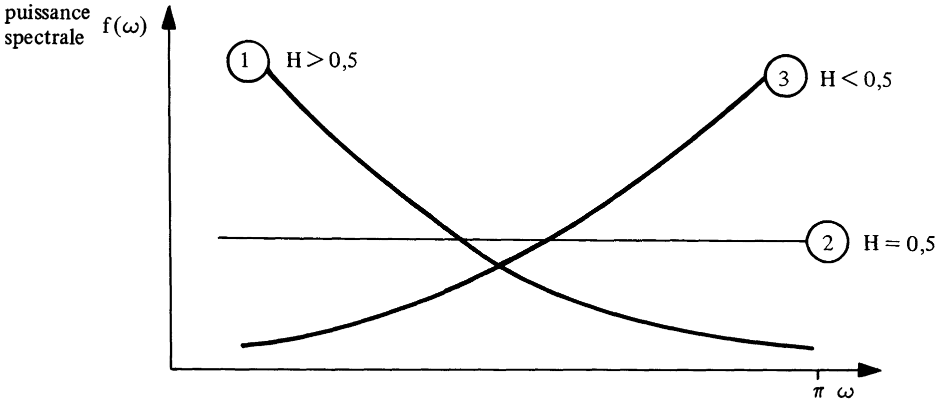
n	50	90
H	0.052	0.045
r^2	0.02	0.01

L'interprétation selon laquelle ces valeurs de H sont le reflet d'une intensité négative semble donc pouvoir être retenue. En effet, si une valeur de $H > 0,5$ correspond à un spectre "typique" (cf [1], [7] et [9]) et si une valeur égale à 0,5 conduit à un spectre plat, on montre facilement (cf [9], [10] et [11]) que $H < 0,5$ s'associe à un spectre inversé du type du spectre 3 du graphique 4 (20).

(20) Une analyse des rapports entre R/S et l'analyse spectrale sera développée dans un prochain article.

GRAPHIQUE 4

Spectres de trois processus conduisant à des valeurs différentes de H



c) L'utilisation de R/S semble pouvoir être envisagée sur des séries beaucoup plus courtes que celles que l'on utilise généralement pour les simulations (plusieurs milliers de points) et donc un emploi sur des séries économiques (quelques centaines de points) n'est pas à exclure.

ANNEXE

L'estimation de H se fonde sur celle des coefficients R/S pour différents décalages et courbes utilisés.

La dernière courbe sur laquelle s'effectue une estimation de R/S, ne comprend plus que $\frac{N}{M}$ points. Afin qu'il soit possible d'effectuer cette estimation il est alors nécessaire que la condition suivante soit vérifiée :

$$N \geqslant M \, . \, n$$

où n représente le premier décalage choisi.

Cependant, d'une manière générale, il semble plus justifié de s'assurer au moins j estimations de R/S pour la dernière courbe. Et ce, afin d'obtenir la meilleure précision lors de l'ajustement du faisceau de courbes. Dans ces conditions, nous obtenons :

$$N \geqslant M \, . \, n \, . \left(\frac{N}{M}\right)^{j/n}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADELMAN I. – "Long cycles : facts or artefacts ?". AER LV, juin 1965, pp. 444-463.

[2] FAMA E.F. – "Mandelbrot and the stable paretien hypothesis". *Journal of Business*, XXXVI, octobre 1963, pp. 430-429.

[3] FAMA E.F. et ROLL R. – "Some properties of symetric stable paretien distribution". *Journal of the American Statistical Association*, LXIII, 1968, pp. 817-836.

[4] FAMA E.F. et ROLL R. – "Paremeter of Symetric Stable Distribution". *Journal of the American Statistical Association*, LXVI, 1971, pp. 331-338.

[5] FIELITZ B.D. et SMITH E.W. – "Asymetric Stable Distribution of Stock Price Changes". *Journal of the American Statistical Association*, LXVII, pp. 813-814.

[6] GNEDENKO B.V. et KOLMOGOROFF A.N. – "Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables", 1964, (traduit en anglais par K.L. CHUNG).

[7] GRANGER C.W. – "The typical spectral shape of an economic variable". *Econometrica*, XXXIV (janvier 1966), pp. 150-161.

[8] GRANGER C.W. et ORR D. – "Infinite variance and research strategy in time series analysis". *Journal of the American Statistic Association*, LXVII, juin 1972, pp. 275-285.

[9] GRANGER C.W. – "New technics for analysing economic time series and their places in econometrics" in Essays in honor of O. MORGENSTERN Princ. Univ. Press, 1967.

[10] GRANGER C.W. et MORGENSTERN O. – "Predictability of stock market prices". Heath – Lexington Books, 1970.

[11] HERNAD D. et MOUILLART M. – "Analyse spectrale des chroniques boursières : la théorie des promenades aléatoires". Mémoire de DES, novembre 1975, Univ. de Parix X Nanterre.

[12] LEVY P. – "Processus stochastiques et mouvements browniens". Gauthier-Villars, Paris, 1965.

[13] MANDELBROT B. – "New Methods in Statistical Economics". *Journal of Political Economy*, LXXI (octobre 1963), pp. 421-440 Reproduit dans *Bulletin de l'institut International de Statistique*, session d'Ottawa, XL.

[14] MANDELBROT B. – "Long run linearity, locally gaussian process, H-Spectra and finite variance". *International Economic Review*, X, février 1969, pp. 82-111.

[15] MANDELBROT B. – "A Fast Fractional Gaussian Noise Generator", *Water Resources Research*, VII (juin 1971), pp. 543-553.

[16] MANDELBROT B. – "Statistical Methodology for Non-Periodic Cycles : from the covariance to R/S Analysis". *Annals of Economic and Social Measurement*, I (juillet 1972), pp. 259-290.

[17] MANDELBROT B. – "Le syndrome de la variance infinie et ses rapports avec la discontinuité des prix". *E.A.*, XXVI (1973), pp. 321-348.

[18] MANDELBROT B. – "Le Problème de la Réalité des Cycles lents et le Syndrome de Joseph", *Economie Appliquée*, XXVI (1973), pp. 349-365.

[19] MANDELBROT B. et VAN NESS J.W. – "Fractional Brownian motions, fractional noises and applications". *SIAM Review*, X octobre 1968, pp. 422-437.

[20] MANDELBROT B et WALLIS J.R. – "Noah, Joseph and operational hydology", *Water Resources Research*, IV (octobre 1968), pp. 909-918.

[21] MANDELBROT B. et WALLIS J.R. – "Computer experiments with fractional gaussian noises". *Water Resources Research*, V (février 1969), pp. 228-267.

[22] MANDELBROT B. WALLIS J.R. – "Some long run properties of geophisical records", *Water Resources Research*, V (avril 1969), pp. 321-340.

[23] MANDELBROT B. et WALLIS J.R. – "Robustness of the Rescaled Range and the Measurement of Long-Run Statistical Dependence", *Water Resources Research*, V (octobre 1969), pp. 967-988.

[24] MANDELBROT B. et WALLIS J.R. – "Operational Hydrology Using Self Similar Processes", in John LAWRENCE, ed., Proceedings of the Fifth International Conference on Operations Research (Venise, 1969), (London : Tavistock Press).

[25] MORAN P.A.P. (1964). – "On the range of cumulative sums". *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* (Tokyo), XVI (1964), p. 109.

[26] SLUTZKY E. – "The summation of randon causes as the source of cyclic process". *Econometrica*, avril 1937, pp. 105-146.

[27] TAQQU M. – "Note on Evaluation of R/S for Fractional Noises and Geophysical Records". *Water Resources Research*, VI (1970), p. 349.

[28] ZAJDENWEBER D. – "Hasard et prévision". *Economica*, 1976.