

GUY ROUZET

**Estimation ponctuelle de la durée de vie moyenne d'un produit dont le taux de défaillance est constant, sur la base d'un essai de fiabilité tronqué. Étude du biais de l'estimateur  $m^* = v/r$**

*Revue de statistique appliquée*, tome 26, n° 3 (1978), p. 29-46

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1978\\_\\_26\\_3\\_29\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1978__26_3_29_0)

© Société française de statistique, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue de statistique appliquée » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ESTIMATION PONCTUELLE  
DE LA DURÉE DE VIE MOYENNE D'UN PRODUIT  
DONT LE TAUX DE DÉFAILLANCE EST CONSTANT,  
SUR LA BASE D'UN ESSAI DE FIABILITÉ TRONQUÉ.  
ETUDE DU BIAIS DE L'ESTIMATEUR  $m^* = v/r$

Guy ROUZET

Les méthodes statistiques d'interprétation des résultats d'essais de fiabilité, dans le cas où le taux de défaillance du produit est constant, ont été largement développées ; les tests et les estimations portant sur le taux de défaillance  $\lambda$  ou la durée de vie moyenne  $m = 1/\lambda$ , en particulier, sont aujourd'hui bien connus et couramment utilisés.

L'intervalle de confiance, pour  $m$  ou pour  $\lambda$ , dépend du type d'essai effectué : avec ou sans remplacement des défectueux, censuré ou tronqué. On peut en trouver les différentes formes, notamment, dans l'importante synthèse faite par M. MORICE dans un précédent numéro [1].

L'usage s'est établi, pour la quantification de la fiabilité des produits, de s'adresser à cet intervalle de confiance – le plus fréquemment dans sa version unilatérale ( $0 \leq \lambda \leq \lambda_2$ ) ou ( $m \geq m_1$ ) – plutôt qu'à l'estimation ponctuelle. Ce choix est parfaitement justifié par le désir de fournir un résultat associé à un niveau de confiance donné.

Néanmoins, il arrive que l'on s'intéresse à l'estimation ponctuelle de  $\lambda$  ou de  $m$ . L'estimateur utilisé est alors généralement :

– pour  $\lambda$ , le rapport du nombre de défaillances observées, soit  $r$ , à la durée de vie cumulée pendant l'essai, soit  $v$  :

$$\lambda^* = r/v$$

– pour  $m$ , le rapport inverse :

$$m^* = v/r$$

Les formes explicites données pour les différents types d'essais rappelés plus haut se ramènent à ces définitions.

Cela ne veut pas dire que ces estimateurs soient sans biais, ni même qu'ils aient toujours un sens, puisque  $r$  peut être nul à l'issue d'un essai tronqué. Mais, d'une part, ils ont l'avantage d'avoir une définition simple, et, d'autre part, on ne sait pas leur substituer, dans les cas où ils sont biaisés, des estimateurs sans biais.

L'estimation de  $\lambda$  au moyen de l'estimateur issu de la méthode du maximum de vraisemblance, a été étudiée par MM. DEEMER et VOTAW [2], pour les essais

sans remplacement. Dans le cas des essais censurés, l'estimateur coïncide avec  $\lambda^* = r/v$  ; dans les deux cas, on obtient une estimation biaisée.

La présente étude se limite à l'estimation de  $m$  par  $m^* = v/r$ .

On sait que cet estimateur présente l'intérêt d'être sans biais dans le cas des essais censurés, avec ou sans remplacement.

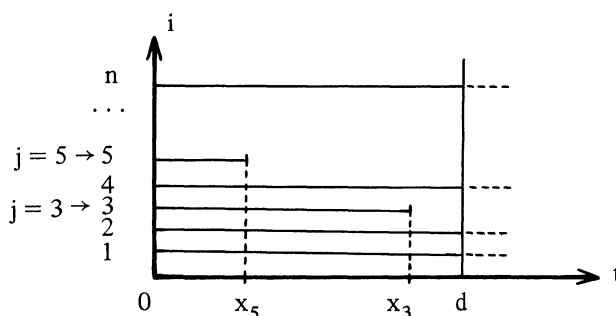
Le calcul algébrique du biais est possible dans le cas des essais tronqués, à l'issue desquels  $r \neq 0$ . Il est utile de connaître ce biais, qui est une caractéristique de la qualité de l'estimation. C'est là l'objet de l'étude.

Les calculs algébriques sont donnés en annexes. Les résultats sont commentés dans les paragraphes ci-après.

## 1. BIAIS DE $m^* = v/r$ POUR UN ESSAI SANS REMPLACEMENT, TRONQUE A L'INSTANT $t = d$ .

### 1.1 Schéma et notation.

L'essai peut être schématisé de la manière suivante :



Soient, pour un essai effectué :

$t$  le temps, mesuré à partir de l'instant où commence l'essai, sur tous les individus de l'échantillon,

$d$  la durée de l'essai, fixée d'avance,

$n$  l'effectif de l'échantillon,

$i$  le numéro de l'individu dans l'échantillon,

$x_i$  la durée de vie (observée ou inconnue parce que  $x_i > d$ ) du  $i$ ème individu,

$j$  le numéro de l'individu dont la durée de vie a été observée ( $j = i$  lorsque  $x_i < d$ ),

$r$  le nombre des individus dont la durée de vie a été observée (nombre de défaillances au cours de l'essai),

$v$  la durée de vie cumulée pendant l'essai, c'est-à-dire :

$$v = \sum_j x_j + (n - r) d$$

et pour un essai à effectuer :

$X_i$  (variable aléatoire) la durée de vie du  $i$ ème individu de l'échantillon,

R (variable aléatoire) le nombre de défaillances qui seront observées durant l'essai,  
 V (variable aléatoire) la durée de vie cumulée à la fin de l'essai, avec :

$$V = \sum_j X_j + (n - R) d$$

### 1.2. Espérance mathématique de V/R.

Par définition, l'estimateur  $m^* = v/r$  serait sans biais si l'espérance mathématique du rapport V/R était égale à la durée de vie moyenne m.

Comme on l'a déjà noté, cette espérance mathématique E (V/R) est infinie, puisque la probabilité attachée à R = 0 n'est pas nulle. Mais si l'on exclut des essais pris en considération ceux où r = 0, donc si l'on ne considère que les valeurs de  $m^*$  calculables, on peut définir l'espérance mathématique correspondante, soit E' (V/R).

Le calcul de E' (V/R) est donné dans l'annexe 1. On obtient :

$$E' (V/R) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda d}{e^{\lambda d} - 1} + \frac{n \lambda d}{e^{n \lambda d} - 1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{k \lambda d} - 1}{k} \right]$$

Si l'on rapporte les valeurs de d et de E' (V/R) à la durée de vie moyenne  $m = 1/\lambda$ , on obtient :

$$\frac{1}{m} E' (V/R) = 1 - \frac{d/m}{e^{d/m} - 1} + \frac{nd/m}{e^{nd/m} - 1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{kd/m} - 1}{k}$$

Le graphique 1 montre comment varie  $\frac{1}{m} E' (V/R)$  en fonction de d/m pour des effectifs d'échantillons de 1, 2, 3, 4, 5 et 10.

### 1.3. Remarques sur la variation du biais de $m^*$ en fonction du rapport d/m.

On voit que :

– lorsque  $d/m \rightarrow 0$  on a  $E' (V/R) \rightarrow 0$  ; ceci paraît d'ailleurs évident si l'on imagine une série illimitée d'essais faits dans les mêmes conditions : on sera conduit à éliminer la plupart d'entre eux, aucune défaillance ne s'étant produite avant d, et à retenir seulement ceux qui correspondent au cas où une défaillance s'est produite très tôt, et où l'on a alors, pour n fini :

$$\frac{1}{m} \frac{v}{r} < \frac{nd}{rm} \rightarrow 0$$

La valeur du biais tend donc vers (- m) lorsque  $d/m \rightarrow 0$ .

– lorsque  $d/n \rightarrow \infty$  le biais est asymptotiquement nul ; dans ce cas, en effet, l'essai n'est plus tronqué, mais devient complet : on obtient les n durées de vie  $x_i$  et l'on a :

$$\frac{v}{r} \simeq \frac{\sum_i x_i}{n} = \bar{x}$$

qui est bien un estimateur sans biais de  $m$ .

– lorsque  $n = 1$ , le biais décroît lentement : il est encore de 31 % pour  $d = 2m$ , de 16 % pour  $d = 3m$ , de 7 % pour  $d = 4m$ .

– lorsque  $n > 1$ , la courbe coupe l'asymptote et présente un maximum positif avant de traduire une décroissance progressive du biais vers zéro.

– la valeur du maximum tend vers une limite pour  $n \rightarrow \infty$ , ce qui implique que l'ensemble de la courbe tend vers une forme limite moyennant une transformation convenable de l'échelle des abscisses.

Le tableau 1 indique les valeurs de l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec l'asymptote, et celles des coordonnées du maximum de la courbe, pour  $n = 1$  à 10.

On voit que les abscisses des deux points tendent à décroître proportionnellement à  $1/n$ , ce qui conduit à rechercher la forme limite pour  $n \rightarrow \infty$  en posant :

$$\left( \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ \frac{d}{m} \rightarrow 0 \end{array} \right) \quad n \frac{d}{m} = u \text{ fini}$$

Le calcul de cette forme limite est donné dans l'annexe 3. On obtient :

$$\frac{1}{m} E' (V/R) \rightarrow \frac{u}{e^u - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k \cdot k!}$$

Le graphique 2 présente la courbe correspondante.

Pour faciliter le passage d'un graphique à l'autre, on a conservé l'indication de  $d/m$  en abscisses, les valeurs numériques de l'échelle étant alors de la forme  $u/n$ .

Le tableau 1 donne également les valeurs caractéristiques de cette courbe limite. On voit que la valeur limite du maximum est 1,320 pour une durée d'essai  $d = 3,750 m/n$ .

Le tableau 2 donne les valeurs de  $\frac{1}{m} E' (V/R)$  pour quelques valeurs de  $u$ .

#### 1.4. Illustration par un exemple numérique.

Pour illustrer les résultats, prenons :

$$n = 100 \quad \text{et} \quad d = 100 \text{ h}$$

Pour  $r$  donné, le rapport  $V/r$  varie alors de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} r = 1 & 9900 \text{ h} < V/r < 10000 \text{ h} \\ r = 2 & 4900 \text{ h} < V/r < 5000 \text{ h} \\ r = 3 & 3233 \text{ h} < V/r < 3333 \text{ h} \\ r = 4 & 2400 \text{ h} < V/r < 2500 \text{ h} \\ & \text{etc.} \end{array}$$

$E' (V/R)$  est l'espérance mathématique d'une variable dont les valeurs possibles comprennent l'ensemble de ces intervalles.

Considérons alors trois valeurs différentes de la durée de vie moyenne  $m$  vraie :

$$m = 2000 \text{ h} \quad m = 5000 \text{ h} \quad m = 20000 \text{ h}$$

Le tableau 3 donne les valeurs correspondantes de  $\Pr [R = r]$ , de  $\Pr [R = r | r \neq 0]$  de  $E_r (V/r)$ , de  $E' (V/R)$  ainsi que des rapports  $\frac{1}{m} E_r (V/r)$  et  $\frac{1}{m} E' (V/R)$  qui caractérisent le biais de l'estimateur.

Les valeurs de  $E_r (V/r)$  en fonction de  $r$  sont pratiquement identiques dans les trois cas ; la valeur moyenne est assez fortement biaisée, en particulier pour  $m = 20000 \text{ h}$  où le rapport  $\frac{1}{m} E' (V/R)$  vaut 0,4325.

Les conditions de cet exemple sont proches du cas limite défini plus haut pour  $n \rightarrow \infty$ , donc de l'utilisation du graphique 2. Dans ce cas limite, la dispersion de  $V/r$  pour chaque valeur  $R = r$  devient négligeable en valeur relative, et  $E' (V/R)$  tend à devenir la moyenne d'une variable discrète prenant les valeurs  $nd$ ,  $nd/2$ ,  $nd/3$ , etc. Le graphique 3 visualise ceci : pour une abscisse donnée, on lit sur les droites les valeurs  $nd/r$  rapportées à  $m$ , et sur la courbe (identique à celle du graphique 2) l'espérance mathématique de ces valeurs  $E' (V/R)$  rapportée à  $m$ .

### 1.5. Remarque sur l'impossibilité de correction du biais.

Il pourrait venir à l'idée d'utiliser ces résultats pour effectuer une correction de l'estimation dans le but d'en supprimer le biais : pour  $n \rightarrow \infty$ , on pourrait estimer le rapport :

$$\frac{\frac{1}{m} E' (V/R)}{\frac{1}{m} nd} = \frac{E' (V/R)}{nd}$$

qui varie de 1 à 0 lorsque  $u$  croît, par  $\frac{v/r}{nd}$  et diviser  $m^*$  par la valeur correspondante de  $\frac{1}{m} E' (V/R)$ .

Mais, comme, à l'issue de l'essai, la valeur de  $r$  est connue, ce n'est pas  $\frac{1}{m} E' (V/R)$  qu'il convient d'utiliser, c'est le rapport  $\frac{1}{m} E_r (V/r)$  qui correspond à la valeur de  $r$  observée. Or, ce rapport ne peut être estimé à partir des résultats de l'essai. Il faut donc renoncer à une correction du biais.

Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple du paragraphe précédent, et supposons que l'on a obtenu :

$$r = 2 \quad \text{et} \quad v = 9950 \text{ h}$$

L'estimation de  $m$  est donc :

$$m^* = \frac{9950 \text{ h}}{2} = 4975 \text{ h}$$

D'après le tableau 3, si la valeur vraie de m est :

$$m = 2000 \text{ h} \quad \text{la correction devrait être } \frac{4975 \text{ h}}{2,4748} = 2010 \text{ h}$$

$$m = 5000 \text{ h} \quad \text{la correction devrait être } \frac{4975 \text{ h}}{0,9900} = 5025 \text{ h}$$

$$m = 20000 \text{ h} \quad \text{la correction devrait être } \frac{4975 \text{ h}}{0,2475} = 20101 \text{ h}$$

Mais rien ne permet d'effectuer cette correction ; dans les trois cas, on retiendra  $m^* = 4975 \text{ h}$ .

L'estimation est très médiocre dans les cas extrêmes ; certes, la probabilité de l'obtenir est relativement faible, puisque pour  $m = 2000 \text{ h}$  la probabilité d'observer  $r = 2$  est de l'ordre de 9 % et pour  $m = 20000 \text{ h}$  de l'ordre de 19 % ; ces probabilités ne sont néanmoins pas négligeables. On notera, d'ailleurs, que les trois valeurs de m considérées dans cet exemple sont incluses, pour  $r = 2$ , dans l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %, qui est, selon l'approximation proposée par M. MORICE dans [1] :

$$\frac{2 \times 9950 \text{ h}}{\chi^2_{0,975} (\nu = 6)} < m < \frac{2 \times 9950 \text{ h}}{\chi^2_{0,025} (\nu = 4)}$$

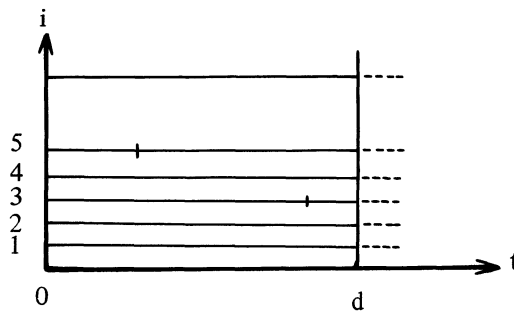
c'est-à-dire :

$$1382 \text{ h} < m < 41116 \text{ h}$$

Ce n'est que pour des valeurs relativement élevées ( $> 20$ ) du rapport  $\frac{nd}{m}$  que l'on obtient une estimation ayant à la fois une dispersion admissible et un biais négligeable.

## 2. BIAIS DE $m^* = v/r$ POUR UN ESSAI AVEC REMPLACEMENT, TRONQUE A L'INSTANT $t = d$

L'essai peut être schématisé de la manière suivante :



Soient encore :

t le temps, mesuré à partir de l'instant où commence l'essai, sur tous les individus de l'échantillon,  
d la durée de l'essai, fixée d'avance,  
n l'effectif de l'échantillon.

Soient :

r le nombre de défaillances au cours de l'essai,  
v la durée de vie cumulée pendant l'essai, c'est-à-dire :

$$v = nd$$

et soit encore, pour un essai à effectuer :

R (variable aléatoire) le nombre de défaillances qui seront observées durant l'essai.

Le rapport  $v/R$  est ici une variable aléatoire discrète, qui prend toute valeur  $v/r$  avec la probabilité  $\Pr (R = r)$ . On exclura ici encore le cas où  $r = 0$  et on étudiera l'espérance mathématique  $E' (v/R)$  correspondant à tous les autres cas.

Le calcul de cette quantité est donné en annexe 4. On obtient :

$$E' (v/R) = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{u}{e^u - 1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^r}{r \cdot r!} \right]$$

avec  $u = n\lambda d$ , ou encore :

$$\frac{1}{m} E' (v/R) = \frac{u}{e^u - 1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^r}{r \cdot r!}$$

avec

$$u = \frac{nd}{m}.$$

On obtient donc le même résultat que pour un essai sans remplacement où  $\left\{ \begin{array}{l} d/m \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \end{array} \right\}$ .

Le biais est caractérisé ici encore par le graphique 2. Les remarques précédentes qui s'appliquaient au cas limite s'appliquent ici également.

### 3. CONCLUSION.

L'estimation de la durée de vie moyenne  $m$  par le rapport de la durée de vie cumulée  $v$  au nombre de défaillances  $r$ , observées à l'issue d'un essai — avec ou sans remplacement — tronqué à l'instant  $t = d$  — avec  $r \neq 0$  — peut être fortement biaisée en même temps que fortement dispersée, même lorsque l'effectif  $n$  de l'échantillon est grand, si le rapport  $nd/m$  n'est que de quelques unités.

Selon les conditions de l'essai, le biais peut varier de  $- 100 \%$  à  $+ 30 \%$  de la valeur vraie, et il n'est pas possible de le corriger.



Il faut donc se garder d'attacher trop de confiance à l'estimation ponctuelle, à moins de disposer des résultats d'un essai au cours duquel on a observé un nombre de défaillances suffisamment grand — une vingtaine au moins — ce qui suppose un rapport  $nd/m$  du même ordre de grandeur.

Pour un niveau de données plus faible, seul l'intervalle de confiance donne une information valable.

TABLEAU 1

Valeurs caractéristiques des courbes donnant  $\frac{1}{m} E' (V/R)$  en fonction de  $\frac{d}{m}$  pour quelques valeurs de  $n$ .

n	abscisse du point d'intersection avec l'asymptote	Maximum de la courbe	
		abscisse	ordonnée
1	—	—	—
2	1,099	2,125	1,165
3	0,628	1,364	1,231
4	0,441	1,006	1,259
5	0,341	0,796	1,275
6	0,277	0,658	1,284
7	0,234	0,560	1,290
8	0,203	0,488	1,295
9	0,178	0,432	1,298
10	0,159	0,388	1,300
$\infty$	1,503/n	3,750/n	1,320

TABLEAU 2

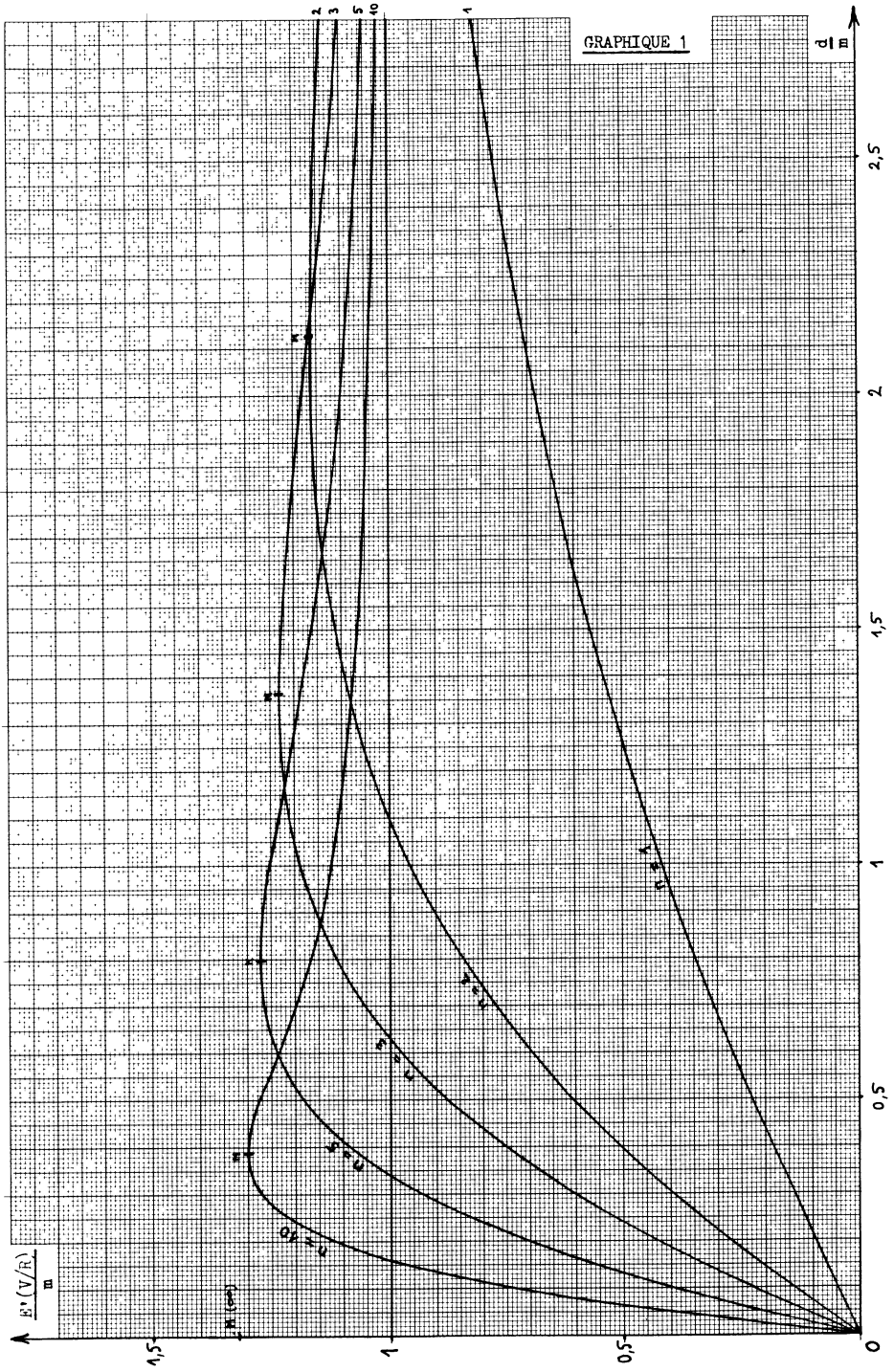
Cas limite  $\left\{ \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ d/m \rightarrow 0 \end{array} \right\} u = \frac{nd}{m}$   
 Valeurs de  $\frac{1}{m} E' (V/R)$  en fonction de  $u$ .

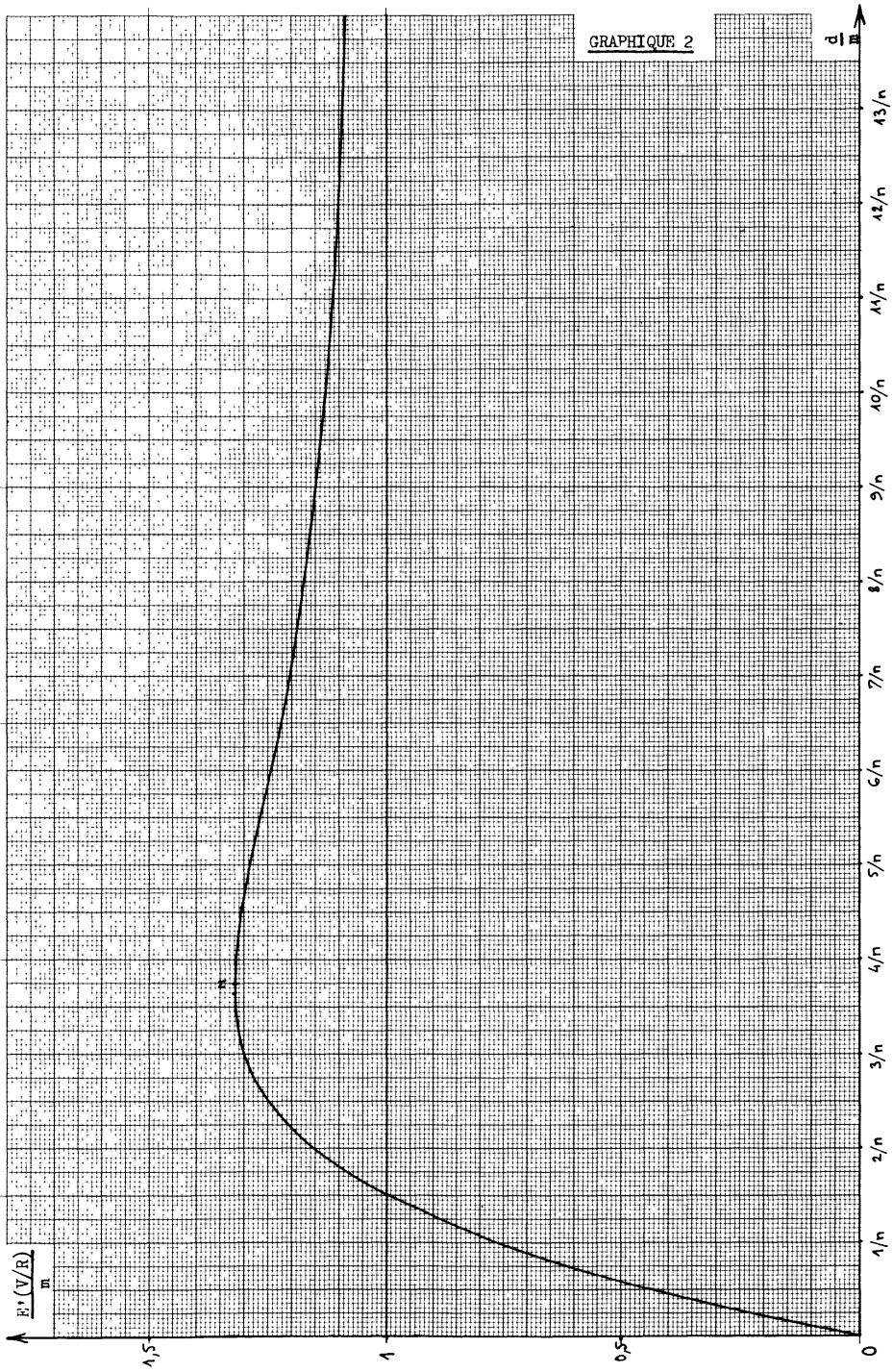
u	$\frac{1}{m} E' (V/R)$
0,5	0,439
1	0,767
1,5	0,999
2	1,153
2,5	1,248
3	1,298
3,5	1,318
4	1,319
4,5	1,307
5	1,289
6	1,247
7	1,207
8	1,175
9	1,149
10	1,130
11	1,115
12	1,103
13	1,092
14	1,085
...	...

TABLEAU 3

Essai tronqué, sans remplacement  
Exemple numérique, avec  $n = 100$  et  $d = 100$  h.

r	m = 2000 h				m = 5000 h				m = 20000 h							
	Pr (R = r) r ≠ 0	E <sub>r</sub> (V/r)	$\frac{1}{m} E_r$ (V/r)	Pr (R = r)	Pr (R = r) r ≠ 0	E <sub>r</sub> (V/r)	$\frac{1}{m} E_r$ (V/r)	Pr (R = r)	Pr (R = r) r ≠ 0	E <sub>r</sub> (V/r)	$\frac{1}{m} E_r$ (V/r)	Pr (R = r)	Pr (R = r) r ≠ 0	E <sub>r</sub> (V/r)	$\frac{1}{m} E_r$ (V/r)	
0	0,0067	—	—	0,1353.	—	—	—	0,6065	—	—	—	—	—	—	—	
1	0,0345	9950 h	4,9748	0,2734	0,3162	9950 h	1,9900	0,3040	9950 h	0,4975	0,7727	9950 h	0,4975	9950 h	0,4975	
2	0,0877	4950 h	2,4748	0,2734	0,3162	4950 h	0,9900	0,0754	4950 h	0,2475	0,1917	4950 h	0,2475	4950 h	0,2475	
3	0,1468	3283 h	1,6415	0,1804	0,2086	3283 h	0,6566	0,0124	3283 h	0,1642	0,0314	3283 h	0,1642	3283 h	0,1642	
4	0,1826	2450 h	1,2248	0,0884	0,1022	2450 h	0,4500	0,0015	2450 h	0,1225	0,0038	2450 h	0,1225	2450 h	0,1225	
5	0,1797	1950 h	0,9748	0,0343	0,0396	1950 h	0,3900	0,0001	1950 h	0,0975	0,0004	1950 h	0,0975	1950 h	0,0975	
6	0,1459	1616 h	0,8081	0,0110	0,0127	1617 h	0,3233	0,0000	1617 h	0,0808	0,0000	1617 h	0,0808	1617 h	0,0808	
7	0,1005	1378 h	0,6891	0,0030	0,0034	1378 h	0,2757	...	...	...	...	...	...	...	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
R ≠ 0	—	E' (V/R)	$\frac{1}{m} E'$ (V/R)	—	—	E' (V/R)	$\frac{1}{m} E'$ (V/R)	—	—	E' (V/R)	$\frac{1}{m} E'$ (V/R)	—	—	E' (V/R)	$\frac{1}{m} E'$ (V/R)	
		2476 h	1,2380			5650 h	1,1300			8650 h	0,4325			8650 h	0,4325	







## ANNEXE 1

### CALCUL DE $E'(V/R)$ POUR UN ESSAI TRONQUE SANS REMPLACEMENT.

La loi de probabilité de  $X_j$  est une loi exponentielle tronquée en  $X_j = d$  :

$$f(x_j) = \frac{\lambda e^{-\lambda x_j}}{\int_0^d \lambda e^{-\lambda x_j} dx_j} = \frac{\lambda e^{-\lambda x_j}}{1 - e^{-\lambda d}}$$

et l'espérance mathématique de  $X_j$  a pour valeur :

$$E(X_j) = \frac{\int_0^d x_j \lambda e^{-\lambda x_j} dx_j}{1 - e^{-\lambda d}} = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda d e^{-\lambda d}}{1 - e^{-\lambda d}} \right]$$

La loi de probabilité conditionnelle de  $V$  pour  $R = r$  a une densité de probabilité non nulle dans l'intervalle  $(n - r)d < V < nd$ .

L'espérance mathématique de  $V$  pour  $R = r$ , soit  $E_r(V)$  se déduit des espérances mathématiques des  $r$  variables  $X_j$  :

$$E_r(V) = r E(X_j) + (n - r) d$$

Le rapport  $V/r$ , qui varie dans l'intervalle  $\left[ \frac{n}{r} - 1 \right] d < \frac{V}{r} < \frac{n}{r} d$ , a pour espérance mathématique :

$$E_r(V/r) = E(X_j) + \frac{n - r}{r} d = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda d e^{-\lambda d}}{1 - e^{-\lambda d}} + \frac{(n - r) \lambda d}{r} \right]$$

$$E_r(V/r) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda d}{1 - e^{-\lambda d}} + \frac{n \lambda d}{r} \right]$$

La loi de probabilité de  $R$  est la loi binômiale de paramètres "n" et "p" tels que :

$$\begin{aligned} \text{"n"} &= n \\ \text{"p"} &= 1 - e^{-\lambda d} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\Pr(R = r) = C_n^r (1 - e^{-\lambda d})^r (e^{-\lambda d})^{n-r}$$

et la loi de probabilité de  $R$  pour  $R \neq 0$  est :

$$\Pr(R = r \mid r \neq 0) = \frac{C_n^r (1 - e^{-\lambda d})^r (e^{-\lambda d})^{n-r}}{1 - e^{-n\lambda d}}$$

D'où  $E'(V/R)$  :

$$E'(V/R) = \sum_{r=1}^n E_r(V/r) \cdot \Pr(R = r | r \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda d}{1 - e^{-\lambda d}} + \frac{n\lambda d}{1 - e^{-n\lambda d}} \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} C_n^r (1 - e^{-\lambda d})^r (e^{-\lambda d})^{n-r} \right]$$

Le calcul reporté en annexe 2 montre que :

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r} C_n^r (1 - e^{-\lambda d})^r (e^{-\lambda d})^{n-r} = e^{-n\lambda d} \sum_{k=1}^n \frac{e^{k\lambda d} - 1}{k}$$

d'où :

$$E'(V/R) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda d}{1 - e^{-\lambda d}} + \frac{n\lambda d e^{-n\lambda d}}{1 - e^{-n\lambda d}} \sum_{k=1}^n \frac{e^{k\lambda d} - 1}{k} \right]$$

ou encore :

$$E'(V/R) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda d}{e^{\lambda d} - 1} + \frac{n\lambda d}{e^{n\lambda d} - 1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{k\lambda d} - 1}{k} \right]$$

## ANNEXE 2

Calcul de :

$$y = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} C_n^r (1 - e^{-\lambda d})^r (e^{-\lambda d})^{n-r}$$

Soit :

$$y = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} C_n^r p^r (1 - p)^{n-r}$$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dp} &= \sum_{r=1}^n C_n^r p^{r-1} (1 - p)^{n-r} - \sum_{r=1}^n \frac{n-r}{r} C_n^r p^r (1 - p)^{n-r-1} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{r=1}^n C_n^r p^r (1 - p)^{n-r} - \frac{1}{1-p} \sum_{r=1}^n \left( \frac{n}{r} - 1 \right) C_n^r p^r (1 - p)^{n-r} \\ &= \frac{1 - (1-p)^n}{p} - \frac{n}{1-p} y + \frac{1 - (1-p)^n}{1-p} \\ &= \frac{1 - (1-p)^n}{p(1-p)} - \frac{n}{1-p} y \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dp} + \frac{n}{1-p} y = \frac{1 - (1-p)^n}{p(1-p)}$$

s'obtient en résolvant d'abord l'équation sans second membre :

$$\frac{dy}{y} = -n \frac{dp}{1-p} \Rightarrow y = A(1-p)^n$$

puis, A étant considéré comme une fonction de p, en intégrant :

$$\frac{dA}{dp} = \frac{1}{(1-p)^n} \left( \frac{dy}{dp} + \frac{n}{1-p} y \right) = \frac{1 - (1-p)^n}{p(1-p)^{n+1}}$$

Comme :

$$\frac{1 - (1-p)^n}{p} = \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} = \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k$$

on a :

$$\frac{dA}{dp} = \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^{-n-1+k}$$

d'où :

$$A = B + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-p)^{-n+k}}{n-k} \equiv B + \sum_{k=1}^n \frac{(1-p)^{-k}}{k}$$

et :

$$y = (1-p)^n \left[ B + \sum_{k=1}^n \frac{(1-p)^{-k}}{k} \right]$$

Pour  $p = 0$ , on doit avoir  $y = 0$ , d'où :

$$B = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

et finalement :

$$y = (1-p)^n \sum_{k=1}^n \frac{(1-p)^{-k} - 1}{k}$$

c'est-à-dire, en remplaçant p par sa valeur  $(1 - e^{-\lambda d})$  :

$$y = e^{-n\lambda d} \sum_{k=1}^n \frac{e^{k\lambda d} - 1}{k}$$



### ANNEXE 3

Forme limite de  $E'(V/R)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

La forme limite de la quantité  $\sum_{k=1}^n \frac{e^{k\lambda d} - 1}{k}$  étant difficile à obtenir, il convient de reprendre le calcul de  $E'(V/R)$  au niveau de l'expression :

$$E'(V/R) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{\lambda d}{1 - e^{-\lambda d}} + \frac{n\lambda d}{1 - e^{-n\lambda d}} \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} C_n^r (1 - e^{-\lambda d})^r (e^{-\lambda d})^{n-r} \right]$$

Lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} n \rightarrow \infty \\ \lambda d \rightarrow 0 \end{array} \right\} \quad n\lambda d = u \quad \text{fini,}$$

on a :

$$E'(V/R) \rightarrow \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - 1 + \frac{u}{1 - e^{-u}} y \right] = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{u}{1 - e^{-u}} y \right]$$

où  $y$  est la quantité étudiée dans l'annexe 1.

L'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dp} + \frac{n}{1-p} y = \frac{1 - (1-p)^n}{p(1-p)}$$

s'écrit, en remplaçant  $p$  par sa valeur :

$$p = 1 - e^{-\lambda d} = 1 - e^{-u/n} \Rightarrow \frac{dp}{du} = \frac{1}{n} e^{-u/n}$$

$$n e^{u/n} \frac{dy}{du} + n e^{u/n} y = \frac{1 - e^{-u}}{(1 - e^{-u/n}) e^{-u/n}}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dy}{du} + y = \frac{1 - e^{-u}}{n(1 - e^{-u/n})}$$

et sa forme limite est donc :

$$\frac{dy}{du} + y = \frac{1 - e^{-u}}{u}$$

La solution de l'équation sans second membre est :

$$y = C e^{-u}$$

d'où, C étant considéré comme une fonction de u :

$$\frac{dC}{du} = e^u \left( \frac{dy}{du} + y \right) = \frac{e^u - 1}{u} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{k!}$$

d'où :

$$C = D + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k \cdot k!}$$

et :

$$y = e^{-u} \left[ D + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k \cdot k!} \right]$$

Pour u = 0, on doit avoir y = 0, d'où : D = 0

et finalement :

$$y = e^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k \cdot k!}$$

La forme limite de E' (V/R) est donc :

$$E' (V/R) \rightarrow \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{u e^{-u}}{1 - e^{-u}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k \cdot k!} \right]$$

ce qui peut s'écrire :

$$E' (V/R) \rightarrow \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{u}{e^u - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k \cdot k!} \right]$$

#### ANNEXE 4

Calcul de E' (v/R) pour un essai tronqué avec remplacement.  
(Le remplacement est supposé instantané)

La loi de probabilité de R est la loi de Poisson de paramètre "m" tel que :

$$"m" = n\lambda d$$

c'est-à-dire :

$$\Pr (R = r) = e^{-n\lambda d} \frac{(n\lambda d)^r}{r!}$$

et la loi de probabilité de R pour R ≠ 0 est :

$$\Pr (R = r | r \neq 0) = \frac{e^{-n\lambda d}}{1 - e^{-n\lambda d}} \frac{(n\lambda d)^r}{r!} = \frac{1}{e^{n\lambda d} - 1} \frac{(n\lambda d)^r}{r!}$$

D'où  $E'(v/R)$  :

$$\begin{aligned} E'(v/R) &= v E'(I/R) = v \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \Pr(R = r | r \neq 0) \\ &= \frac{nd}{e^{n\lambda d} - 1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(n\lambda d)^r}{r \cdot r!} \end{aligned}$$

En posant :

$$u = n\lambda d = \frac{nd}{m}$$

on a :

$$E'(v/R) = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{u}{e^u - 1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{u^r}{r \cdot r!} \right]$$

#### REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] E. MORICE – Quelques modèles mathématiques du durée de vie. *REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUEE*, 1966, Vol. XIV N° 1, p. 45.
- [2] W.L. DEEMER and D.F. VOTAW Estimation of parameters of truncated or censored exponential distributions. *A.M.S.*, 1955, p. 498.