REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. MORLAT

Sur la comparaison entre des intervalles de confiance classiques et bayesiens (cas d'une loi de Laplace-Gauss d'écart type connu)

Revue de statistique appliquée, tome 26, nº 2 (1978), p. 33-35

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1978__26_2_33_0>

SUR LA COMPARAISON ENTRE DES INTERVALLES DE CONFIANCE CLASSIQUES ET BAYESIENS
(Cas d'une loi de Laplace-Gauss d'écart type connu)

G. MORLAT

Après le véritable tir de barrage déclenché contre les méthodes bayesiennes depuis un an ou deux, par nos amis américains et hollandais notamment, dans les colonnes de la Revue de l'Institut International de Statistique, il nous a semblé que l'article d'André Vessereau, qu'on vient de lire, était particulièrement opportun. Il serait en effet fâcheux de voir l'intérêt des praticiens de la statistique se détourner des méthodes bayesiennes, parce que d'éminents statisticiens auront condamné ces méthodes comme non-scientifiques. C'est le résultat d'une longue période de confusion, où l'on a vu s'affronter les partisans des méthodes classiques et ceux des méthodes bayesiennes comme si c'était en effet une affaire de parti-pris ! (parti-pris philosophique, selon certains).

Nous pensons que ce genre de controverse – qui n'a pu se développer que parce que des gens de bonne foi croyaient débattre des solutions diverses apportées au même problème, alors que les uns et les autres parlaient (dans des termes presque identiques et parfois tout à fait identiques) de problèmes fort différents – devrait disparaître prochainement du sommaire des revues de statistique.

L'article de A. Vessereau devrait contribuer à clarifier la situation. Cependant, l'auteur a joué la difficulté, en choisissant de traiter le cas de la loi binomiale, où les conséquences des discontinuités de la fonction de répartion interfèrent quelque peu avec la confrontation entre solutions classique et bayesienne. Il est vrai que l'importance du modèle binomial dans les problèmes de contrôle de qualité pouvait assez justifier ce choix – mais on peut penser que l'étude d'un problème similaire dans le cas d'une loi de Laplace-Gauss, même si elle peut paraître un peu plus scolaire, aidera à comprendre cette partie de l'article de A. Vessereau qui concerne la comparaison "classique-bayesien".

Nous traiterons donc ici du problème suivant :

on dispose d'un échantillon de n épreuves indépendantes d'une loi de Laplace-Gauss, de moyenne μ inconnue et d'écart-type $\sqrt{n}\,\sigma$, σ étant connu (cette notation est choisie pour simplifier les formules ultérieures).

On sait que l'on obtient des intervalles de confiance au seuil α sur μ, en considérant les intervalles classiques :

$$[\overline{x} - \lambda_{\alpha/2}\, \sigma,\ \overline{x} + \lambda_{\alpha/2}\, \sigma]$$

$\lambda_{\alpha/2}$ désignant la variable gaussienne réduite correspondant à la valeur $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la fonction de répartition. On sait aussi qu'en utilisant de tels intervalles, le niveau de confiance obtenu est égal, quel que soit μ, à $1 - \alpha$.

Voyons maintenant comment on peut obtenir des intervalles de confiance bayesiens. dans le sens défini par A. Vessereau. On supposera que la moyenne μ obéit à une loi de probabilité a priori qui est aussi une loi de Laplace-Gauss de moyenne μ_0 et d'écart type σ_0. Un calcul assez classique permet de trouver la loi de probabilité a posteriori de μ, compte tenu de la connaissance d'un échantillon de moyenne empirique $\overline{x}$.

On trouve que c'est une loi de Laplace-Gauss,

de moyenne : $$\mu_1 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_0^2}\,\mu_0 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2 + \sigma_0^2}\,\overline{x}$$

et d'écart-type : $$\sigma_1 = \frac{\sigma\,\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2}}$$

On note que si la distribution a priori de μ est uniforme sur la droite réelle (cas limite obtenu en faisant tendre σ_0 vers l'infini) – alors la distribution a posteriori de μ a pour moyenne $\overline{x}$ et pour écart-type σ.

Un intervalle de confiance bayesien au seuil α sera aisément défini comme :

$$I_\alpha = [\mu_1 - \lambda_{\alpha/2}\, \sigma_1\, , \mu_1 + \lambda_{\alpha/2}\, \sigma_1]$$

et on constate (c'est un résultat bien connu) qu'il coïncide avec l'intervalle de confiance au sens classique dans le cas d'une distribution a priori uniforme.

Sinon, lorsque la distribution a priori est une loi de Laplace-Gauss $(\mu_0\, , \sigma_0)$, on peut étudier comment varie le "degré de confiance" (selon la terminologie d'A. Vessereau) en fonction du paramètre μ (pour une valeur $\overline{x}$ de la moyenne d'un échantillon).

Ce "degré de confiance" s'exprime par la probabilité $P(I\ ; \mu\ .\ \sigma)$ attachée à l'intervalle I dans une loi gaussienne de paramètres μ et σ. Il est maximum pour $\mu = \mu_1$, et tend vers zéro lorsque μ tend vers plus ou moins l'infini. Mais il est toujours inférieur à $1 - \alpha$, puisque σ est toujours plus grand que σ_1. C'est là un fait qui n'apparaissait pas dans l'étude des intervalles de confiance sur le paramètre de la loi binomiale car le phénomène qu'il exprime était quelque peu camouflé par les discontinuités de la "courbe en dents de scie". Or ce phénomène peut surprendre, et même apparaître comme paradoxal : comment un intervalle de confiance bayesien, correspondant à un degré de confiance toujours inférieur à $1 - \alpha$, quel que soit μ, peut-il être compatible avec un degré de confiance précisément égal $1 - \alpha$ lorsque μ varie aléatoirement dans sa loi de probabilité a priori ?

Ce paradoxe n'est qu'apparent, et pour l'expliquer, il faut revenir à la singification du modèle bayesien.

Dans ce modèle, μ et $\overline{x}$ sont deux quantités aléatoires et ne sont pas indépendantes.

On établit sans difficulté leur loi jointe, qui est une loi de Laplace-Gauss dont les paramètres sont :

moyenne de μ : μ_0
écart-type de μ : σ_0
moyenne de $\overline{x}$: μ_0
écart-type de $\overline{x}$: $\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2}$

coefficient de corrélation : $\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2}}$

Donc, les intervalles de confiance bayesiens, qui sont toujours plus étroits que les intervalles de confiance classiques, peuvent cependant conduire au même coefficient de confiance, parce qu'ils sont "mieux placés", à cause de la corrélation entre μ et $\overline{x}$ qui vient d'être mise en évidence : lorsque μ est grand, $\overline{x}$ à toutes les chances d'être grand lui aussi ! (et donc aussi μ_1 centre de l'intervalle de confiance).

Que conclure ? Contrairement à certaines apparences, les intervalles de confiance classiques et les intervalles de confiance bayesiens ne fournissent pas des solutions différentes au même problème, mais bien les solutions de problèmes très différents. Si la moyenne μ de notre loi de Laplace-Gauss doit être tirée au sort, une fois pour toutes, dans sa loi a priori (μ_0 , σ_0) – et que l'on soit amené ensuite à tirer des échantillons dans cette loi de moyenne μ, et à construire des intervalles de confiance, alors seuls les intervalles de confiance classiques peuvent nous permettre d'obtenir directement un niveau de confiance α. Si au contraire chaque échantillon dérive d'une loi de moyenne μ tirée au sort dans la loi a priori (et de façon indépendante) alors les intervalles bayesiens correspondront réellement à un niveau de confiance α. On voit bien qu'on traite là deux problèmes fort différents... et que, selon la conclusion d'A. Vessereau, "tous les outils qu'offre la statistique ne sont pas adaptés à toutes les situations qui se présentent à l'utilisateur".