J. P. MASSON

Décisions sur le modèle de plan d'expérience à 2 facteurs contrôlés

Revue de statistique appliquée, tome 24, n° 2 (1976), p. 19-43

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1976__24_2_19_0>

DÉCISIONS SUR LE MODÈLE DE PLAN D'EXPÉRIENCE A 2 FACTEURS CONTROLÉS (1)

J. P. MASSON
Centre National de Recherches Forestières (INRA - Champenoux)

Cet article présente quelques procédures de décisions adaptees aux questions posées par l'expérimentateur et concernant le modèle de plan d'expérience à 2 facteurs contrôlés.

PLAN

INTRODUCTION

Pratiquement, l'expérimentateur étudiant l'action sur la variable quantitative y de 2 variables qualitatives – ou facteurs A et B se trouve dans l'une des trois situations suivantes :

I – Il sait que les 2 facteurs A et B ont une action sur la variable y ; il veut seulement être renseigné (rassuré !) sur la forme de l'action conjointe de ces 2 facteurs et répondre à la question :

"Y a-t-il ou non interaction entre les deux facteurs ? "

---

(1) article remis en Avril 1975.

Mots-clés : **Décision Multiple – Test d'hypothèse – Analyse de variance – 2 facteurs contrôlés.**

II – Il est "intéressé" par l'effet du facteur A sur la variable y et considère comme accessoire l'étude des effets du facteur B. Il doit alors :

a) Soit choisir entre les décisions :

– Présence d'intéraction "AB" entre les effets de A et de B.

– Présence d'effet additif A

– Absence d'effet A

b) Soit répondre à la question globale :

"Y a-t-il ou non présence d'effet du facteur A ?"

III – Il porte le même "intérêt" aux effets des facteurs A et B sur la variable y. Il doit choisir entre les 5 décisions :

– Présence d'intéraction AB

– Effets additifs des facteurs A et B

– Effet du facteur A ; pas d'effet du facteur B

– Effet du facteur B ; pas d'effet du facteur A

– Absence d'effet des facteurs A et B

Pour répondre à ces questions, l'expérimentateur réalise un plan d'expérience correspondant au modèle a priori :

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$$

$$E\ (y_{ijk}) = \mu_{ij}$$

où y_{ijk} est la variable aléatoire réelle pour la $k^{ième}$ répétition de la modalité i du facteur A et de la modalité j du facteur B avec :

$$i = 1,\ldots,I$$

$$j = 1,\ldots,J$$

$$k = 0,1,\ldots,n_{ij}$$

Le statisticien fait sur ce modèle a priori (à tort ou à raison !) les hypothèses classiques :

– e_{ijk} a une distribution normale de moyenne nulle et de variance σ^2

– les variables y_{ijk} (resp. e_{ijk}) sont stochastiquement indépendantes.

et analyse les résultats utilisant des règles de décision.

Nous présentons dans cet article quelques règles de décision adaptées aux problèmes de choix rencontrés dans les trois situations envisagées précédemment. Cet article résume une partie de [5] et ne contient aucune démonstration, renvoyant le lecteur à la bibliographie numérotée entre crochets.

Dans la première partie, nous étudions la situation décrite en I. Nous précisons les notations et définissons la notion de Réduction qui nous permet de présenter les règles de décision dans le cadre d'un plan d'expérience orthogonal ou non par rapport aux effets des facteurs contrôles A et B. Ensuite, nous présentons le test de Fisher correspondant à l'hypothèse d'absence d'intéraction – donc adapté au problème du choix entre le modèle a priori supposant une intéraction AB entre les effets de A et de B

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + e_{ijk} \text{ (1)} \qquad (1)$$

et le modèle additif :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk} \qquad (2)$$

Nous remarquons alors qu'il est dangereux de choisir un plan d'expérience non orthogonal par rapport aux deux facteurs A et B lorsqu'on ne fait pas a priori l'hypothèse d'additivité des effets de ces facteurs.

Nous ne traiterons pas de la mise en évidence de l'intéraction sur le modèle de plan d'expérience à 2 facteurs sans répétitions ; on sait en effet que, dans ce cas, on doit donner une "forme" à l'intéraction pour choisir entre les décisions :

– Absence d'intéraction AB, et

– Présence d'intéraction AB.

Le lecteur intéressé consultera la bibliographie rapportée en [1].

Nous parlerons dans les deuxième et troisième parties :

– de problème de test quand il s'agit de choisir entre 2 hypothèses ou actions

– de problème de décisions multiples quand il s'agit de choisir entre m ($m > 2$) hypothèses ou actions.

Ceci étant posé, dans la deuxième partie nous envisageons la situation de l'expérimentateur décrite en II :

a) du point de vue décision multiple :

Il s'agit de choisir entre les modèles (1), (2) et

$$y_{ijk} = \mu + \beta_j + e_{ijk} \qquad (3)$$

Nous présentons deux règles usuelles adaptées à ce problème de décision multiple :

– la procèdure sans "Pooling" de l'intéraction avec l'erreur

– la procèdure avec "Pooling",

en insistant sur l'intérêt des procédures de "Pooling".

b) du point de vue test d'hypothèse :

Il s'agit de choisir entre le modèle a priori (1) et le modèle (3). Nous présentons le test de Fisher adapté à l'hypothèse d'absence d'effet du facteur A "intéressant" et les deux tests déduits des deux procédures de décision multiple précédentes ; ces trois tests sont admissibles au sens de la théorie de la décision (cf [5]) = il n'existe pas de test uniformément plus puissant qu'un test d'une de ces trois familles. D'où l'intérêt de la comparaison de

(1) Les écritures (1) et (2) sont très formelles puisque nous n'avons pas défini les paramètres par des conditions de centrage.

puissances qui suit : les puissances de ces trois tests sont comparées pour différentes valeurs des paramètres du modèle a priori sur le plan orthogonal à 2 facteurs A (3 modalités), B (5 modalités), r = 2 répétitions ; (le risque de 1ère espèce de chacun de ces tests est contrôlé égal à 5 % pour que la comparaison de puissance soit valide). Nous verrons alors qu'un test faisant intervenir un ensemble de 2 statistiques peut être théoriquement aussi satisfaisant qu'un test n'en faisant intervenir qu'une, puisque admissible, tout en étant pratiquement souvent plus satisfaisant. Nous étudions ensuite la puissance du test de l'effet "intéressant" A quand on suppose à tort que le modèle a priori est additif !

Dans la troisième partie nous envisageons la situation de l'expérimentateur décrite en III. Les deux facteurs A et B sont intéressants. Il s'agit de faire un choix entre les modèles (1), (2), (3) :

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + e_{ijk} \qquad (4)$$

$$y_{ijk} = \mu + e_{ijk} \qquad (5)$$

Nous présentons deux procédures usuelles de dépouillement des resultats – la procédure de non "Pooling" et la procédure de "Pooling" de l'interaction en insistant sur les probabilités contrôlées dans l'un et l'autre cas.

PREMIERE PARTIE

Nous noterons :

$$y_{ij0} = \sum_k y_{ijk} \qquad y_{ij.} = y_{ij0}/n_{ij}$$

$$y_{i00} = \sum_{jk} y_{ijk} \qquad y_{0j0} = \sum_{ik} y_{ijk} \qquad y_{000} = \sum_{ijk} y_{ijk}$$

$$n_{i0} = \sum_j n_{ij} \qquad n_{0j} = \sum_i n_{ij} \qquad N = \sum_{ij} n_{ij}$$

$$y_{i..} = y_{i00}/n_{i0} \qquad y_{.j.} = y_{0j0}/n_{0j} \qquad y_{...} = y_{000}/N$$

$$\mu_{i.} = \sum_j \mu_{ij}/n_{i0} \qquad \mu_{.j} = \sum_i \mu_{ij}/n_{0j} \qquad \mu_{..} = \sum_{ij} \mu_{ij}/N$$

et par s le nombre de combinaisons (i,j) qui font l'objet d'une ou plusieurs mesures de y.

I-1 – Réduction – Paramètre de non-centralité – Somme de carrés ajustée

I-1.1 – Réduction

On appelle Réduction due à un modèle la somme des carrés "expliquée" par les effets des facteurs contrôlés dans ce modèle. C'est la somme des carrés des estimateurs des espérances de toutes les observations y_{ijk} dans ce modèle.

Une réduction sera notée R ( ) ; dans la parenthèse, on précise les paramètres du modèle.

On définit donc pour le modèle de plan d'expérience à 2 facteurs les réductions R $(\mu, \alpha, \beta, \gamma)$, R (μ, α, β), R (μ, β), R (μ, α), R (μ) correspondant respectivement aux modèles (1), (2), (3), (4), (5).

Remarque : Nous n'avons pas défini les paramètres des modèles correspondant aux réductions précédentes ; car ces réductions, dans les modèles correspondants, ne dépendent pas du choix des conditions de centrage qu'on impose aux paramètres pour leur donner un sens.

Nous renvoyons pour l'expression de ces réductions à la première partie de l'Annexe.

I-1.2 – Paramètre de non centralité

Dans le cadre d'un modèle (ℓ), (pour nous $\ell = 1, 2, 3, 4, 5$), la variable aléatoire $\frac{1}{\sigma^2}$ R ( ) est distribuée comme une variable de χ^2 décentrée de paramètre de non centralité, noté $\lambda_{(\ell)}$ ( ), obtenu en remplaçant dans R chaque variable y_{ijk} par son espérance mathématique μ_{ij} *exprimée en fonction des paramètres de ce modèle* puis en divisant par σ^2.

Pour l'expression des différents paramètres de non centralité correspondant aux réductions en fonction de μ_{ij} nous renvoyons à la 2^e partie de l'annexe.

Précisons le sens de la notation $\lambda_{(\ell)}$ ( ) sur un exemple : le paramètre de non centralité correspondant à R (μ, α) sous le modèle additif (2) est noté

$$\lambda_{(2)} (\mu, \alpha) \; ; \; \lambda_{(2)} (\mu, \alpha) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i \left[\Big(\sum_j n_{ij} \mu_{ij} \Big)^2 / n_{i0} \right]$$

avec μ_{ij} de la forme $\mu + \alpha_i + \beta_j$.

Remarque : Cette notation nous permet de travailler sans définir les paramètres par des conditions de centrage. Le lecteur intéressé par des conditions de centrage pourra interpréter les paramètres de non centralité en tenant compte, dans le calcul de ceux-ci, de ces conditions.

I-1.3 – Sommes de carrés ajustées dues aux effets des facteurs contrôlés

Pour l'intéraction AB, dans le modèle a priori (1), la somme de carrés ajustée (S.C.A.) est :

$$\mathrm{R} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = \mathrm{R} (\mu, \alpha, \beta, \gamma) - \mathrm{R} (\mu, \alpha, \beta)$$

Pour l'effet A, dans le modèle additif (2), la S.C.A. est :

$$\mathrm{R} (\alpha \mid \mu, \beta) = \mathrm{R} (\mu, \alpha, \beta) - \mathrm{R} (\mu, \beta)$$

De même pour l'effet de B, la S.C.A. est :

$$\mathrm{R} (\beta \mid \mu, \alpha) = \mathrm{R} (\mu, \alpha, \beta) - \mathrm{R} (\mu, \alpha)$$

La somme de carrés résiduelle du modèle "a priori" (1) sera notée SCE.

$$\mathrm{SCE} = \sum_{ijk} y_{ijk} - R\,(\mu\,,\alpha\,,\beta\,,\gamma).$$

SCE est distribuée comme un $\sigma^2\ \chi^2$ centré ($\lambda_{SCE} = 0$).

Compte tenu du théorème de COCHRAN, utilisé sur le modèle a priori (1), les statistiques $R\,(\gamma \mid \mu\,,\alpha\,,\beta)$, $R\,(\alpha \mid \mu\,,\beta)$ et SCE sont stochastiquement indépendantes ; de même $R\,(\gamma \mid \mu\,,\alpha\,,\beta)$, $R\,(\beta \mid \mu\,,\alpha)$ et SCE sont indépendantes.

Sur le modèle (ℓ) ($\ell = 1, 2, 3, 4, 5$)

$R\,(\gamma \mid \mu\,,\alpha\,,\beta)/\sigma^2$ est distribuée comme un χ^2 non centré à $s - I - J + 1$ degrés de liberté, de paramètre de non centralité

$$\lambda_{(\ell)}\,(\gamma \mid \mu\,,\alpha\,,\beta) = \lambda_{(\ell)}\,(\mu\,,\alpha\,,\beta\,,\gamma) - \lambda_{(\ell)}\,(\mu\,,\alpha\,,\beta).$$

$R\,(\alpha \mid \beta)/\sigma^2$ est distribuée comme un χ^2 non centré à I-1 degrés de liberté, de paramètre de non centralité

$$\lambda_{(\ell)}\,(\alpha \mid \mu\,,\beta) = \lambda_{(\ell)}\,(\mu\,,\alpha\,,\beta) - \lambda_{(\ell)}\,(\mu\,,\beta).$$

$R\,(\beta \mid \mu\,,\alpha)/\sigma^2$ est distribuée comme un χ^2 non centré à J-1 degrés de liberté, de paramètre de non centralité

$$\lambda_{(\ell)}\,(\beta \mid \mu\,,\alpha) = \lambda_{(\ell)}\,(\mu\,,\alpha\,,\beta) - \lambda_{(\ell)}\,(\mu\,,\alpha).$$

Par exemple, sur le modèle additif (2), $R\,(\gamma \mid \mu\,,\alpha\,,\beta)/\sigma^2$ est distribuée comme un χ^2 centré à $s - I - J + 1$ degrés de liberté car

$$\lambda_{(\ell)}\,(\gamma \mid \mu\,,\alpha\,,\beta) = 0$$

I-2 – Application de ces notions au test de la présence d'interaction

Le modèle de plan d'expérience à 2 facteurs $y_{ijk} = \mu_{ij} + e_{ijk}$ est dit sans intéraction (ou additif si les μ_{ij} sont tels que :

$$\theta_{ij,i'j'} = (\mu_{ij} - \mu_{i'j}) - (\mu_{ij'} - \mu_{i'j'}) = 0,\ \forall i\,,i'\,,j\,,j'$$

c'est-à-dire si la différence des valeurs moyennes de y correspondant à deux modalités i et i' de A et à une modalité j de B est indépendante de j ; on a la propriété symétrique $\mu_{ij} - \mu_{ij'} = \mu_{i'j} - \mu_{i'j'}$

I-2.1 – Présence ou absence d'interaction et test de Fisher habituel

Répondre à la question : *"Y a-t-il ou non intéraction entre les 2 facteurs A et B ?"*, c'est choisir entre l'hypothèse $H_0 : \theta_{ij,i'j'} = 0, \forall i\,,i'\,,j\,,j'$ d'absence d'intéraction et l'hypothèse contraire $\overline{H}_0$.

Pour ce faire, on utilise habituellement l'ensemble des règles de décision du type :

$$\text{si } F\,(\gamma \mid \mu\,,\alpha\,,\beta) \leqslant \rho_\gamma \quad \text{on décide } H_0$$

$$\text{si } F(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) > \rho_\gamma \qquad \text{on décide } \overline{H}_0$$

où ρ_γ est un nombre positif

avec

$$F(\gamma \mid \mu, \alpha\ \beta) = \frac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{s - I - J + 1} \times \frac{N-s}{SCE}$$

La statistique $F(\gamma \mid \mu,\alpha,\beta)$ est distribuée comme une variable de Fisher non centrée à $s - I - J + 1$ et $N - s$ degrés de liberté, de paramètre de non centralité $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ qu'on notera.

$$F[s - I - J + 1, N - s \quad ; \quad \lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)].$$

Le risque de 1ère espèce α une fois choisi, il détermine ρ_γ :

$$\alpha = P\{F(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) > \rho_\gamma \mid H_0\}$$

est indépendant des paramètres μ, α, β non spécifiés par H_0.

La fonction puissance p du test qui ne dépend que de $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ en résulte :

$$P[\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)] = P\{F(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) > \rho_\gamma \mid \lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)\}$$

Rappelons, plus généralement, que le test de Fisher adapté à une hypothèse linéaire est sans biais (1) et uniformément plus puissant parmi les tests sans biais dont la puissance ne dépend que du paramètre de non centralité [cf [5] p. 22 Théorème de HSU].

I-22 – Le problème posé par les combinaisons (i, j) vides

Nous attirons l'attention du lecteur sur le point suivant (cf [8] p. 311) :

Quand il y a des combinaisons vides, tous les μ_{ij} et par suite tous les $\theta_{ij,i'j'}$ ne sont pas estimables ; et les statistiques $R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ et $F(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ correspondent alors au test de l'hypothèse linéaire H :

| H : tout vecteur de $R^{s-I-J+1}$ dont les composantes sont des combinaisons linéaires estimables des $\theta_{ij,i'j'}$ est égal à zéro

Ces combinaisons linéaires sont soit des θ estimables, soit des sommes ou des différences de θ estimables choisies de façon à éliminer les μ_{ij} non estimables correspondant aux combinaisons (i, j) vides.

Donc, sous l'hypothèse H, certaines intéractions peuvent être non nulles ; quand il y a des combinaisons vides, H vraie, ($\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0$), n'implique pas nécessairement H_0 vraie. Considérons, par exemple, le plan d'expérience en blocs incomplets équilibrés (3 traitements ; 3 blocs) à 2 répétitions dont les valeurs de n_{ij} sont rapportées dans le tableau ci-dessous.

(1) Un test sans biais est un test dont la puissance n'est jamais inférieure au risque de 1ère espèce.

j / i	1	2	3
1	2	2	0
2	0	2	2
3	2	0	2

$N = 12$

$s = 6$

Sur le modèle correspondant à ce plan d'expérience à 2 facteurs :

$$\text{SCE a } N - s \quad = 6 \text{ degrés de liberté}$$

$$R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) \text{ a } s - I - J + 1 \quad = 1 \text{ degré de liberté}$$

Considérons les combinaisons :

$$\theta_{11,22} = (\mu_{11} - \mu_{12}) - (\mu_{21} - \mu_{22})$$

$$\theta_{21,32} = (\mu_{21} - \mu_{22}) - (\mu_{31} - \mu_{32})$$

$$\theta_{22,33} = (\mu_{22} - \mu_{23}) - (\mu_{32} - \mu_{33})$$

Ces combinaisons linéaires ne sont pas estimables ; en effet μ_{21}, μ_{32} ne sont pas estimables sous le modèle a priori (1).

La statistique de Fisher $F(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ est adaptée au test de l'hypothèse $H : \theta_{11,22} + \theta_{21,32} + \theta_{22,33} = \mu_{11} + \mu_{22} + \mu_{33} - \mu_{12} - \mu_{31} - \mu_{23} = 0$ et non au test de l'hypothèse H_0.

Il convient donc de ne pas négliger le problème posé par les combinaisons vides dans le choix d'un plan d'expérience à 2 facteurs lorsqu'on ne fait pas a priori l'hypothèse d'additivité;

Quand on rejette l'hypothèse H, on décide qu'il y a intéraction. Quand on garde l'hypothèse H, on décide que l'intéraction est soit absente, soit de la forme spécifiée par l'hypothèse H.

DEUXIEME PARTIE – UN FACTEUR EST PRIVILEGIE

Souvent, un des 2 facteurs, le facteur "intéressant", joue un rôle privilégié au niveau de l'expérimentation : il s'agit d'étudier son effet sur la variable y. Nous distinguons le problème de décision multiple présenté ci-dessous en II-1, du problème de test de l'hypothèse d'absence d'effet du facteur "intéressant" qui est présenté ensuite (II-2) et pour lequel des tests déduits des procédures de décision multiple sont proposés et étudiés.

Nous supposons que le plan d'expérience examiné n'a pas de combinaisons vides ; ainsi $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0$ est une condition nécessaire et suffisante de l'hypothèse d'absence d'intéraction.

II-1 – Décision multiple

II-1.1 – Hiérarchie nécessaire et problème de décision multiple

Comme nous l'avons indiqué en introduction il s'agit de faire un choix entre les hypothèses :

$H_3 : \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) \neq 0$	Présence d'intéraction AB
$H_2 : \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0 \; ; \lambda_{(2)} (\alpha \mid \mu, \beta) \neq 0$	Absence d'intéraction mais présence d'un effet A
$H_1 : \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0 \; ; \lambda_{(2)} (\alpha \mid \mu, \beta) = 0$	Absence d'effet de A,

Le facteur A étant privilégié devant le facteur B.

II-1.2 – Règles de décisions adaptées et leurs propriétés

Nous retiendrons parmi l'ensemble des règles de décisions, les 2 familles de règles de décisions suivantes :

1 – *Pas de "Pooling"*

– si $\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} > q_\gamma$ on décide H_3

– si $\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma$ et $\dfrac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} > q_\alpha$ on décide H_2

– si $\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma$ et $\dfrac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} \leqslant q_\alpha$ on décide H_1

où q_γ et q_α sont deux nombres positifs

Cette famille de règles de décisions est souvent utilisée par le praticien qui contrôle les probabilités :

$$P \left\{ \frac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} > q_\gamma \mid H_2 \cup H_1 \right\} = p_3$$

risque de 1ère espèce correspondant au test de l'hypothèse d'absence d'intéraction

et

$$P \left\{ \frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} > q_\alpha \mid H_1 \right\} = \alpha,$$

risque de 1ère espèce correspondant au test de l'hypothèse d'absence d'effet A sur le modèle à 2 facteurs A, B *sans intéraction.*

$\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE}$ est distribuée comme $\dfrac{s - I - J + 1}{N - s} \times F\,[s - I - J + 1, N - s \; ;$ $\lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)]$ sous le modèle (1) ;

$$\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} \text{ est distribuée comme } \frac{I-1}{N-s} \times F[I-1, N-s; \lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)]$$

sous le modèle additif (2).

2 – "Pooling" de l'intéraction

$$- \text{ si } \frac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} > q_\gamma \qquad \text{on décide } H_3$$

$$- \text{ si } \frac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma \quad \text{et} \quad \frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{[SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)]} > q_\alpha \quad \text{on décide } H_2$$

$$- \text{ si } \frac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma \quad \text{et} \quad \frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{[SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)]} \leqslant q_\alpha \quad \text{on décide } H_1$$

Cette famille de règles de décisions est, nous semble-t-il, moins utilisée que la précédente. Elle présente cependant des propriétés intéressantes :

→ On contrôle les probabilités :

$$P\{\text{Accepter } H_3 \mid H_2 \cup H_1\} = p_3$$

$$P\{\text{Accepter } H_2 \mid H_1\} = p_2$$

$$P\{\text{Accepter } H_1 \mid H_1\} = 1 - (p_2 + p_3) = p_1$$

les nombres positifs q_γ et q_α en résultent. En effet :

– p_3, risque de $1^{\text{ère}}$ espèce correspondant au test de l'hypothèse d'absence d'intéraction, détermine q_γ

– les statistiques $\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE}$ et $\dfrac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}$ sont stochastiquement indépendantes sous l'hypothèse H_1 d'absence d'effet A. (cf [3] et [11] p. 149). Donc :

$$p_2 = P\left\{\frac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma \mid H_1\right\} \times P\left\{\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\alpha \mid H_1\right\}$$

$$p_2 = (1 - p_3) \times P\left\{\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\alpha \mid H_1\right\}$$

et

$$P\left\{\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\alpha \mid H_1\right\} = \frac{p_2}{1 - p_3}$$

détermine q_α puisque

$$\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}$$

est distribuée comme

$$\frac{N - I - J + 1}{I - 1} F [I - 1, N - I - J + 1]$$

sous l'hypothèse H_1.

→ Pour p_3 et p_2 choisis, la règle de décision avec "Pooling" de l'intéraction maximise la probabilité $P\{\text{Accepter } H_3 \mid H_3\}$ (resp. P Accepter $H_2 \mid H_2$) dans l'ensemble des règles basées sur des statistiques dont les lois ne dépendent que du paramètre de non centralité $\lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ (resp. $\lambda_{(2)} (\alpha \mid \mu, \beta)$) (cf [5] ch. 2)

II-2 – Test d'hypothèse

II-2.1 – Le problème du test de l'hypothèse d'absence d'effet du facteur "intéressant"

– Y a-t-il Présence ou Absence d'effet du facteur "intéressant" A ?

Pour décider entre les 2 actions "Présence d'effet A" et "Absence d'effet A" on peut utiliser l'une des 3 règles suivantes dont nous comparons les puissances au paragraphe II.2-2.

1ère règle : Test global

– si $\dfrac{R (\gamma, \alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} \leqslant \rho$ on décide "Absence d'effet A"

– si $\dfrac{R (\gamma, \alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} > \rho$ on décide "Présence d'effet A"

avec

$$R (\gamma, \alpha \mid \mu, \beta) = R (\mu, \alpha, \beta, \gamma) - R (\mu, \beta)$$

2e règle : Tests déduits de la procédure de décision multiple : Pas de "Pooling"

si
$$\frac{R (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant \rho_\gamma$$

et
$$\frac{R (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} \leqslant \rho_\alpha$$

on décide "Absence d'effet A", sinon on décide "Présence d'effet A".

On choisit ρ_γ et ρ_α tels que :

$$P \left\{ \frac{R (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} > \rho_\gamma \mid H_1 \right\} = \alpha_1$$

$$P \left\{ \frac{R (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} > \rho_\alpha \mid H_1 \right\} = \alpha_2$$

avec

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

On sait en effet (cf [4] Vol. 3 – p. 40-43) que ce choix assure un risque de $1^{\text{ère}}$ espèce voisin du risque α choisi. Bien que la présence de SCE au dénominateur des 2 statistiques $\frac{R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE}$ et $\frac{R\ (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE}$ crée une certaine dépendance.

Il existe une infinité de tests, au risque de $1^{\text{ère}}$ espèce α, déduits de la procédure de décision multiple : pas de "Pooling", tous les tests tels que $\alpha_1 \in [0, \alpha]$.

Les tests déduits de cette procédure sont non biaisés et leurs fonctions puissance p dépendent des paramètres

$$\lambda_{(1)}\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)\ ;\ \lambda_{(1)}\ (\alpha \mid \mu, \beta)\ ;\ \rho_\gamma\ ;\ \rho_\alpha .$$

En effet

$$p\ (\lambda_{(1)}\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta), \lambda_{(1)}\ (\alpha \mid \mu, \beta)\ ; \rho_\gamma, \rho_\alpha) = 1 - \int_0^\infty A\ (q) \times B\ (q)\ f\ (q)\ dq$$

avec

$$A\ (q) = P\{R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) \leqslant \rho_\gamma\ q \mid \lambda_{(1)}\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)\}$$

$$B\ (q) = P\{R\ (\alpha \mid \mu, \beta) \leqslant \rho_\alpha\ q \mid \lambda_{(1)}\ (\alpha \mid \mu, \beta)\},\ q > 0$$

f (q) : densité de probabilité de la somme des carrés Erreur,

A (q) est une fonction décroissante de $\lambda_{(1)}\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$

B (q) est une fonction décroissante de $\lambda_{(1)}\ (\alpha \mid \mu, \beta)$

Donc p est une fonction croissante des paramètres

$$\lambda_{(1)}\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) \quad \text{et} \quad \lambda_{(1)}\ (\alpha \mid \mu, \beta)\ ;$$

et le test est non biaisé.

3^e règle : Tests déduits de la procédure de décision multiple de "Pooling"

si
$$\frac{R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant \rho_\gamma$$

et
$$\frac{SCE}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} \leqslant \rho_\alpha$$

On décide "Absence d'effet A" sinon on décide "Présence d'effet A".

Ici les statistiques

$$\frac{R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \quad \text{et} \quad \frac{R\ (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}$$

sont indépendantes sous l'hypothèse d'absence d'effet du facteur A. Si on choisit pour le test déduit de la procédure de "Pooling" ρ_γ et ρ_α tels que :

$$P\left\{\frac{R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} > \rho_\gamma \mid H_1\right\} = \alpha_1$$

$$P\left\{\frac{R(\alpha \mid \mu,\beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu,\alpha,\beta)} > \rho_\alpha \mid H_1\right\} = \alpha_2,$$

alors le risque de 1ère espèce attaché au test déduit de la procédure de décision multiple de "Pooling" est égal à $\alpha = 1 - (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)$; soit α voisin de $\alpha_1 + \alpha_2$.

Il existe une infinité de tests au risque de 1ère espèce voisin de α, déduits de la procédure de décision multiple de "Pooling" : tous les tests tels que $\alpha_1 \in [0,\alpha]$.

G.A.F. SEBER [9] donne l'expression de la puissance p de ces tests que nous donnons en II-2.3. Ce test n'est pas toujours non biaisé : il suffit de choisir ρ_γ suffisamment grand – c'est-à-dire le risque de 1ère espèce correspondant à l'intéraction suffisamment petit – pour que le test soit biaisé.

II-2.2 – Comparaison des puissances des trois types de tests sur un exemple.

On peut montrer [5], en utilisant un théorème de C. STEIN [10] concernant l'admissibilité sur la famille exponentielle, que les trois familles de test présentées ci-dessus sont admissibles au sens de la théorie de la décision. Ceci implique que pour un risque de 1ère espèce α fixé, il n'existe aucun test qui soit uniformément plus puissant qu'un test quelconque de l'une de ces trois familles.

Aussi nous comparons les puissances de ces trois types de tests sur le dispositif orthogonal à 2 facteurs suivant :

Facteur A : 3 modalités $i = 1, 2, 3$

Facteur B : 5 modalités $j = 1, \ldots, 5$

$r = 2$ répétitions par combinaison des facteurs A et B

afin d'en déduire quelque règle empirique de choix entre ces tests selon l'état de la nature caractérisé par

$$(\lambda_{(1)}\ (\gamma \mid \mu,\alpha,\beta),\ \lambda_{(1)}\ (\alpha \mid \mu,\beta))$$

(cf tableaux I, II, III).

Nous avons contrôlé un même risque de 1ère espèce α pour les trois type de tests avec $\alpha = 5\ \%$.

La fonction puissance du test global d'absence d'effet du facteur A est rapportée au tableau I.

Pour le test déduit de la procédure : Pas de "Pooling" on a choisi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = 0.025.$$

En effet nous avons montré (cf [5] p. 65 et suivantes) sur des exemples numériques qu'on n'a généralement pas intérêt à prendre des risques de 1ère espèce différents ; la fonction puissance de ce test est rapportée au tableau II.

Pour le test déduit de la procédure de "Pooling" on a aussi choisi :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = 0.025.$$

La fonction puissance de ce test est rapportée au tableau III.

Tableau I

Fonction puissance du test global d'absence d'effet A

Paramètre de non centralité $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) + \lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Puissance	0.0500	0.1723	0.3353	0.5032	0.6508	0.7670	0.8513	0.9087	0.9457	0.9687	0.9824

Plan factoriel 3 x 5

r = 2 répétitions
A = 3 modalités
B = 5 modalités

Nombre de degrés de liberté de R $(\alpha, \gamma \mid \mu, \beta) = 10$
Nombre de degrés de liberté de SCE $= 15$

Tableau II

Fonction puissance du test déduit de la procédure : "Pas de Pooling"

$\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ \ $\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)$	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
0.0	0.0471	0.3170	0.6129	0.8126	0.9187	0.9674	0.9874
5.0	0.1367	0.3655	0.6328	0.8195	0.9209	0.9680	0.9876
10.0	0.2787	0.4526	0.6732	0.8351	0.9262	0.9696	0.9881
15.0	0.4411	0.5615	0.7285	0.8585	0.9349	0.9726	0.9890
20.0	0.5945	0.6716	0.7888	0.8859	0.9458	0.9765	0.9903
25.0	0.7218	0.7682	0.8452	0.9132	0.9573	0.9808	0.9918
30.0	0.8181	0.8445	0.8923	0.9373	0.9680	0.9851	0.9934

Plan factoriel 3 x 5

r = 2 répétitions
A = 3 modalités
B = 5 modalités

R $(\alpha \mid \mu, \beta)$: 2 degrés de liberté

$$\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta) = \frac{rJ}{\sigma^2} \sum_i (\mu_{i.} - \mu_{..})^2$$

R $(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$: 8 degrés de liberté

$$\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = \frac{r}{\sigma^2} \sum_{ij} (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..})^2$$

SCE : 15 degrés de liberté

Tableau III

Fonction puissance du test déduit
de la procédure de Pooling

$\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu,\beta)$ / $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu,\alpha,\beta)$	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
0.0	0.0491	0.3496	0.6592	0.8504	0.9421	0.9796	0.9933
5.0	0.1318	0.3375	0.6045	0.8021	0.9130	0.9654	0.9872
10.0	0.2730	0.4026	0.6068	0.7824	0.8944	0.9537	0.9813
15.0	0.4366	0.5124	0.6538	0.7921	0.8906	0.9482	0.9774
20.0	0.5914	0.6330	0.7232	0.8221	0.8998	0.9492	0.9764
25.0	0.7198	0.7415	0.7952	0.8606	0.9166	0.9552	0.9780
30.0	0.8169	0.8277	0.8579	0.8983	0.9359	0.9637	0.9812

Plan factoriel 3 x 5

r = 2 répétitions
A = 3 modalités
B = 5 modalités

R $(\alpha \mid \mu,\beta)$: 2 degrés de liberté

$$\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu,\beta) = \frac{rJ}{\sigma^2} \sum_i (\mu_{i.} - \mu_{..})^2$$

R $(\gamma \mid \mu,\alpha,\beta)$ = 8 degrés de liberté

$$\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu,\alpha,\beta) = \frac{r}{\sigma^2} \sum_{ij} (\mu_{ij} - \mu_{i.} - {}_{.j} + \mu_{..})^2$$

SCE : 15 degrés de liberté

Examinons les tableaux I, II, III à $\lambda = 20$ fixé par exemple :

$\lambda = 20$		Puissance		
$\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu,\alpha,\beta)$	$\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu,\beta)$	Test global	Pas de Pooling	Pooling
0.0	20.0	0.6508	0.9187	0.9421
5.0	15.0	0.6508	0.8195	0.8021
10.0	10.0	0.6508	0.6732	0.6068
15.0	5.0	0.6508	0.5615	0.5124
20.0	0.0	0.6508	0.5945	0.5914

où $\lambda = \lambda_{(1)}(\mu,\alpha,\beta,\gamma) - \lambda_{(1)}(\mu,\beta)$

Conclusions

– Pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.025$, les 2 tests déduits des procédures de "non pooling" et de "pooling" ne sont jamais beaucoup moins puissants que le test global ; ils sont bien meilleurs que le test global quand $\lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ est petit devant $\lambda_{(1)} (\alpha \mid \mu, \beta)$

– Pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.025$ le test déduit de la procédure de pooling est plus puissant que le test déduit de la procédure de non-pooling pour $\lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ voisin ou égal à 0. Dans les autres cas la puissance est plus faible ; mais elle n'est jamais beaucoup plus faible.

Nous avons effectué une comparaison analogue sur un autre plan d'expérience à 2 facteurs (cf [5]) et avons obtenu des résultats analogues.

Nous avons représenté graphiquement sur le tableau IV, pour notre exemple, les régions d'acceptation des trois tests que nous venons d'envisager.

II-2.3 – Calcul de la puissance des tests correspondant à la procédure avec "Pooling"

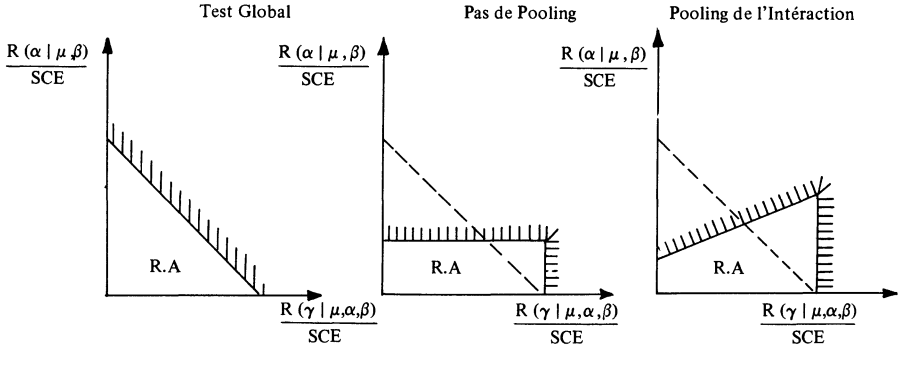
La fonction puissance p du test correspondant à la procédure de Pooling est (cf [9]) :

Tableau IV

Visualisation Graphique des Régions d'acceptation

Plan factoriel 3 x 5

r = 2 répétitions	$R(\alpha \mid \mu, \beta) \Rightarrow$ 2 degrés de liberté
A = 3 modalités	$R(\gamma \mid \mu, \alpha) \Rightarrow$ 8 degrés de liberté
B = 5 modalités	SCE $\Rightarrow$ 15 degrés de liberté



$$1 - p(v_1, v_2) = P\left\{ \frac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} < \rho_\gamma \quad \text{et} \right.$$

$$\left. \frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} < \rho_\alpha \mid v_1, v_2 \right\}$$

avec

$$v_1 = \frac{1}{2} \cdot \lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \cdot \lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(v_1+v_2)} \frac{v_1^j}{j!} \times \frac{v_2^k}{k!} \times I\left[\rho_\gamma/(1+\rho_\gamma) ; \frac{1}{2} r_1 + j, \frac{1}{2} r_0\right] \times$$

$$I\left[\rho_\alpha/(1+\rho_\alpha) ; \frac{1}{2} r_2 + k, \frac{1}{2} r_1 + j + \frac{1}{2} r_0\right]$$

avec les notations :

$$I[x ; p, q] = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1}\, dt$$

$$r_0 = N - s$$

$$r_1 = s - I - J + 1$$

$$r_2 = I - 1$$

Les constantes ρ_γ et ρ_α peuvent être définies par les équations :

$$I\left[1/(1+\rho_\gamma) ; \frac{1}{2} r_0, \frac{1}{2} r_1\right] = \alpha_1$$

$$I\left[1/(1+\rho_\alpha) ; \frac{1}{2}(r_0 + r_1), \frac{1}{2} r_2\right] = \alpha_2$$

Le tableau III a été calculé en utilisant ces résultats.

II-2.4 – Test de l'hypothèse d'absence d'effet A quand on suppose peut-être à tort" le modèle a priori additif

Quand on teste l'hypothèse d'absence d'effet du facteur A en supposant le modèle a priori additif, on utilise la règle de décision suivante :

si $$\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > \rho_\gamma$$

on rejette l'hypothèse d'absence d'effet A, sinon on ne rejette pas cette hypothèse.

Nous allons déterminer la fonction de répartition F (ρ_α ; 2 v_1 , 2 v_2) de

$$\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} :$$

nous pourrons alors calculer la fonction puissance de la règle présentée ci-dessus et tirer les conséquences de l'utilisation de cette règle.

1) *Fonction de répartition de* $\dfrac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}$

Quand $\rho_\gamma \rightarrow +\infty$, $1 - P(v_1, v_2)$ tend vers la probabilité

$$F(\rho_\alpha ; 2 v_1, 2 v_2) = P\left\{\frac{R\ \alpha \mid \mu, \beta}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} < \rho_\alpha \mid v_1, v_2\right\}$$

alors

$$\alpha_1 \rightarrow 0, \frac{\rho_\gamma}{1 + \rho_\gamma} \rightarrow 1, I \quad \rho_\gamma/(1 + \rho_\gamma) ; \frac{1}{2} r_1 + j, \frac{1}{2} r_0 \quad \rightarrow 1$$

et $F(\rho_\alpha ; 2 v_1, 2 v_2)$

tend vers

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(v_1+v_2)} \frac{v_1^j}{J!} \frac{v_2^k}{k!} I\left[\rho_\alpha/(1 + \rho_\alpha) ; \frac{1}{2} r_2 + k, \frac{1}{2} r_1 + j + \frac{1}{2} r_0\right]$$

fonction de répartition du rapport de $2\chi^2$ décentrés indépendants

$$\chi^2(r_2, 2 v_2)/\chi^2(r_1 + r_0, 2 v_2) ;$$

c'est, à une constante près, la fonction de répartition d'une variable de Fisher doublement décentrée (cf [7] p. 134).

2) *Puissance de la règle :*

Sur notre exemple de plan factoriel 3 x 5 nous avons contrôlé le risque de 1ère espèce du test de l'hypothèse d'absence d'effet A à $\alpha = 5\ \%$

$$\alpha\ (= 0.05) = P\left\{\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > \rho_\alpha \mid H_1\right\}$$

en déterminant ρ_α tel que

$$I\left[1/(1 + \rho_\alpha) ; \frac{1}{2}(r_0 + r_1), \frac{1}{2} r_2\right] = \alpha$$

à l'aide des tables de la loi Beta incomplète.

Puis nous avons calculé la fonction puissance

$$p\left[\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta), \lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)\right]$$

pour différentes valeurs des paramètres de non centralité : voir tableau V.

$$p\left[\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta), \lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)\right]$$

est la puissance du test – déduit de la procédure de "Pooling" – de l'hypothèse d'absence d'effet A quand $\alpha_1 = 0$.

Conséquence :

Pour $\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)$ fixé, la puissance décroît quand $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ croît et notamment pour $\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta) = 0$; ce test est donc biaisé dès que $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) \neq 0$. Il est conservatif en présence d'intéraction ; quand le "vrai" modèle est intéractif, le "vrai" risque de $1^{ère}$ espèce est beaucoup plus faible que le risque α choisi et, par suite, la puissance est beaucoup plus faible que la puissance escomptée :

– Pour $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 10$ le risque de $1^{ère}$ espèce est de 0.017 pour α choisi à 0.05.

– Pour $\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 10$ la puissance n'est plus que de 0.28 contre 0.45 quand il n'y a pas d'intéraction pour $\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta) = 5.0$

Tableau V

Fonction puissance p $[\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta), \lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)]$ du test de l'hypothèse d'absence d'effet A quand on suppose le modèle a priori additif sur le plan factoriel 3 x 5

r = 2 répétitions
A = 3 modalités
B = 5 modalités

$\lambda_{(1)}(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$ \ $\lambda_{(1)}(\alpha \mid \mu, \beta)$	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
0.0	0.0507	0.4551	0.7631	0.9133	0.9718	0.9916	0.9960
5.0	0.0293	0.3602	0.6790	0.8652	0.9500	0.9832	0.9947
10.0	0.0169	0.2810	0.5944	0.8090	0.9211	0.9705	0.9898
15.0	0.0097	0.2165	0.5127	0.7470	0.8851	0.9530	0.9823
20.0	0.0056	0.1649	0.4363	0.6811	0.8426	0.9302	0.9716
25.0	0.0032	0.1244	0.3667	0.6138	0.7946	0.9020	0.9572
30.0	0.0019	0.0930	0.3047	0.5469	0.7422	0.8687	0.9389

TROISIEME PARTIE – LES 2 FACTEURS SONT SITUES SUR LE MEME PLAN

Les facteurs A et B sont intéressants et il n'y a pas lieu de privilégier un des facteurs par rapport à l'autre au niveau de la formulation du problème de décision multiple.

III-1 – Le problème de décision multiple

Il s'agit de faire un choix entre les 5 modèles numérotés (1), (2), (3), (4), (5). Soit :

$H_3 \ : \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) \neq 0$	Présence d'intéraction AB
$H_{21} : \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0$;	$\lambda_{(2)} (\alpha \mid \mu, \beta) \neq 0 ; \lambda_{(2)} (\beta \mid \mu, \alpha) \neq 0$ Absence d'intéraction AB Présence d'effets A et B
$H_{22} : \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0$;	$\lambda_{(2)} (\alpha \mid \mu, \beta) = 0 ; \lambda_{(2)} (\beta \mid \mu, \alpha) \neq 0$ Absence d'intéraction AB Effet B ; pas d'effet A
$H_{23} : \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0$;	$\lambda_{(2)} (\alpha \mid \mu, \beta) \neq 0 ; \lambda_{(2)} (\beta \mid \mu, \alpha) = 0$ Absence d'intéraction AB Effet A ; pas d'effet B
$H_1 \ : \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0$;	$\lambda_{(2)} (\alpha \mid \mu, \beta) = \lambda_{(2)} (\beta \mid \mu, \alpha) = 0$ Absence d'effets

III-2 – Règles de décision adaptées et leurs propriétés

Nous retiendrons parmi l'ensemble des règles de décision, les 2 familles de règles de décision suivantes :

1) *Pas de "Pooling"*

– Si $\dfrac{R (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} > q_\gamma$, on décide H_3

– Si $\dfrac{R (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma$ et $\dfrac{R (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} > q_\alpha$ et $\dfrac{R (\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE} > q_\beta$,
on décide H_{21}

– Si $\dfrac{R (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma$ et $\dfrac{R (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} \leqslant q_\alpha$ et $\dfrac{R (\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE} > q_\beta$,
on décide H_{22}

– Si $\dfrac{R (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma$ et $\dfrac{R (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} > q_\alpha$ et $\dfrac{R (\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE} \leqslant q_\beta$,
on décide H_{23}

– Sinon on décide H_1

Cette famille de règles de décision utilisée dans la pratique contrôle par un choix convenable de q_α, q_β, q_γ les probabilités suivantes :

– $P \left\{ \dfrac{(R (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} > q_\gamma \mid \lambda_{(1)} (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) = 0 \right\} = p_3$,risque de $1^{\text{ère}}$ espèce du test de l'hypothèse d'absence d'intéraction : probabilité d'accepter H_3 si H_{21} ou H_{22} ou H_{23} ou H_1 est vraie.

$$- \Pr\left\{ \frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE} > q_\alpha \mid \lambda_{(2)}(\alpha \mid \mu, \beta) = 0 \right\} = \alpha_a, \text{ risque de } 1^{\text{ère}} \text{ espèce}$$

correspondant au test classique de l'hypothèse d'absence d'effet A sur le modèle à 2 facteurs A, B avec intéraction.

2) *"Pooling" de l'intéraction*

– Si $\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} > q_\gamma$, on décide H_3

– Si $\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma$ et $\dfrac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\alpha$ et

$\dfrac{R(\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\beta$,

on décide H_{21}

– Si $\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma$ et $\dfrac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} \leqslant q_\alpha$ et

$\dfrac{R(\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\beta$,

on décide H_{22}

– Si $\dfrac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma$ et $\dfrac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\alpha$ et

$\dfrac{R(\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} \leqslant q_\beta$

on décide H_{23}

– Sinon on décide H_1

Nous préconisons volontiers l'utilisation de cette règle car un choix convenable de q_α, q_β, q_γ permet de contrôler les probabilités :

– $P\{\text{Accepter } H_3 \mid H_2 \cup H_1\} = p_3$

– $P\{\text{Accepter } H_{21} \cup H_{22} \cup H_{23} \mid H_1\} = p_2$

et par suite $P\{\text{Accepter } H_1 \mid H_1\} = 1 - (p_2 + p_3)$

ainsi que le risque $\alpha = \dfrac{p_2}{1 - p_3}$ risque de $1^{\text{ère}}$ espèce de l'hypothèse d'absence d'effet sur le modèle additif.

En effet

$$p_2 = P\left\{ \frac{R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE} \leqslant q_\gamma \mid H_1 \right\} \times P\left\{ \left(\frac{R(\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\alpha \right) \cup \left(\frac{R(\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE + R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\beta \right) \mid H_1 \right\}$$

puisque $\dfrac{R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}{SCE}$ est, sous l'hypothèse H_1, stochastiquement indépendante de $\dfrac{R\ (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{R\ (\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)}\right)$ et qu'on peut trouver q_α et q_β tels que :

$$P \left\{ \left(\frac{R\ (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\alpha\right) \cup \left(\frac{R\ (\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\beta\right) \mid H_1 \right\} = \alpha$$

Nous proposons de déterminer q_α q_β tels que :

$$\alpha_a = P \left\{ \frac{R\ (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\alpha \mid \lambda_{(2)}\ (\alpha \mid \mu, \beta) = 0 \right\}$$

$$\alpha_b = P \left\{ \frac{R\ (\beta \mid \mu, \beta)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} > q_\beta \mid \lambda_{(2)}\ (\beta \mid \mu, \alpha) = 0 \right\}$$

avec

$$\alpha_a + \alpha_b = \alpha$$

Cette approximation est satisfaisante, – nous l'avons déjà indiqué – quand R $(\alpha \mid \mu, \beta)$ et R $(\beta \mid \mu, \alpha)$ sont indépendantes, c'est-à-dire quand le plan est orthogonal par rapport aux deux facteurs A et B. Nous proposons d'utiliser aussi ce procédé quand le dispositif est non orthogonal !

De plus on peut montrer (cf [5]) que les régions du type :

$$\frac{R\ (\alpha \mid \mu, \beta)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} \leqslant q_\alpha \quad \text{et} \quad \frac{R\ (\beta \mid \mu, \alpha)}{SCE + R\ (\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)} \leqslant q_\beta$$

sont des régions d'acceptation admissibles du test de l'hypothèse d'absence d'effet quand le plan d'expérience est orthogonal par rapport aux facteurs A et B et quand le modèle est supposé additif.

Remerciements :

En terminant, je tiens à remercier très vivement :

– Monsieur BENOIST, de la Société Shell Française,

– Mademoiselle J. ULMO, qui a dirigé ce travail et critiqué une première rédaction de cet exposé, ainsi que mes collègues du Département de Biométrie de l'Institut National de la Recherche Agronomique pour leurs nombreuses suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bibliographie concernant la mise en évidence d'une interaction sur le modèle à 2 facteurs sans répétition.

J.B. DENIS – Intéraction en Analyse de Variance à deux facteurs, lorsqu'il n'y a pas de répétitions. Rapport DEA ORSAY 1973

JOHNSON and GRAYBILL – An Analysis of a two way model with interaction without replication *J.A.S.A.* Décembre 1972 – Vol. 67 – N° 340

– Estimation de σ^2 in a two way classification model with interaction *J.A.S.A.* June 1972 – Vol. 67 – N° 338

J. MANDEL – A New Analysis of variance Model for non additive data *Technometrics* Feb. 1971 – Vol. 13 – N° 2

G.A. MILLIKEN and GRAYBILL – Extensions of the general linear hypothesis model *J.A.S.A.* June 1971 – Vol. 65

W. STEFANSKY – Rejecting outliers by maximum normed residuals *A.M.S.* 1971 – Vol. 42 – N° 1 – 35-45

[2] T.W. ANDERSON – The Choice of the degree of a polynomial regression as a multiple decision problem *A.M.S.* 1962, 22

[3] D. BASU – On Statistics independent of a complete sufficient statistic *Sankhya,* A, 1955, Vol. 15

[4] M.G. KENDALL and A. STUART – The advanced theory of statistics

[5] J.P. MASSON – Décisions sur le modèle linéaire – Applications à l'Analyse de Variance. Thèse 3e cycle – ORSAY 1974

[6] PHAM DINH Tuan – Contributions à l'analyse de variance et aux plans d'expérience. Thèse Grenoble 1970

[7] H. SCHEFFE – The Analysis of Variance John Wiley and Sous, New-York 1959

[8] S.R. SEARLE – Linear Models John Wiley and Sous, New-York 1971

[9] G.A.F. SEBER – Linear hypothesis and induced tests *Biometrika,* 1964, 51, p. 41

[10] C. STEIN – The admissibility of Hotelling's T^2-test *Ann. Math. Statistics,* 27, 616-623

[11] J. ULMO – Etude fondamentale de la régression linéaire multiple– Eléments de la théorie des plans d'expérience. Institut de Statistique de l'Université de PARIS 1959-1960

ANNEXE – EXPRESSIONS DES REDUCTIONS ET PARAMETRES DE NON-CENTRALITE SUR LE MODELE DE PLAN D'EXPERIENCE A DEUX FACTEURS

Expression des réductions

$\rightarrow R(\mu) = \dfrac{y_{000}^2}{N}$ est la réduction correspondant au modèle (5)

$\rightarrow R(\mu,\alpha) = \sum_i \dfrac{y_{i00}^2}{n_{i0}}$ " " " " " " (4)

$\rightarrow R(\mu,\beta) = \sum_j \dfrac{y_{0j0}^2}{n_{0j}}$ " " " " " " (3)

$\rightarrow R(\mu,\alpha,\beta) = R(\mu,\alpha) + r' C^{-1} r$

$\qquad\qquad\qquad\quad = R(\mu,\beta) + u' T^{-1} u$

est la réduction correspondant au modèle (2) avec (cf [8] p. 270 et suivantes)

r vecteur de composantes r_j

$$r_j = y_{ojo} - \sum_i n_{ij}\, y_{i..}$$

de $j = 1, \ldots, J-1$

C matrice d'éléments :

$$\begin{cases} c_{jj} = n_{oj} - \sum\limits_i \dfrac{n_{ij}^2}{n_{io}} \\[2ex] c_{jj'} = - \sum\limits_i \dfrac{n_{ij}\, n_{ij'}}{n_{io}} \quad (j \neq j') \end{cases}$$

$j, j' = 1, \ldots, J-1$

u vecteur de composantes u_i

$$u_i = y_{ioo} - \sum_j n_{ij}\, y_{.j.}$$

de $i = 1, \ldots, I-1$

T matrice d'éléments

$$\begin{cases} t_{ii} = n_{io} - \sum\limits_j \dfrac{n_{ij}^2}{n_{oj}} \\[2ex] t_{ii'} = - \sum\limits_j \dfrac{n_{ij}\, n_{i'j}}{n_{oj}} \quad (i \neq i') \end{cases}$$

$i, i' = 1, \ldots, I-1$

$\rightarrow R(\mu,\alpha,\beta,\gamma) = \sum\limits_{ij} \dfrac{y_{ijo}^2}{n_{ij}}$ est la réduction correspondant au modèle (1)

Expression des paramètres de non centralité

Nous avons exprimé dans le tableau ci-dessous "les" paramètres de non centralité correspondant à une réduction en fonction de μ_{ij} sans préciser le modèle pour simplifier les notations :

Réductions	Paramètres de non centralité
$R(\mu)$	$\lambda(\mu) = \dfrac{1}{\sigma^2} \left(\sum\limits_{ij} n_{ij}\, \mu_{ij}\right)^2 / N$
$R(\mu,\alpha)$	$\lambda(\mu,\alpha) = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_i \left[\left(\sum\limits_j n_{ij}\, \mu_{ij}\right)^2 / n_{io}\right]$
$R(\mu,\beta)$	$\lambda(\mu,\beta) = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_j \left[\left(\sum\limits_i n_{ij}\, \mu_{ij}\right)^2 / n_{oj}\right]$
$R(\mu,\alpha,\beta)$	$\lambda(\mu,\alpha,\beta) = \lambda(\mu,\alpha) + \dfrac{1}{\sigma^2} [E(r)]' C^{-1} E(r) =$ $= \lambda(\mu,\beta) + \dfrac{1}{\sigma^2} [E(u)]' T^{-1} E(u)$
$R(\mu,\alpha,\beta,\gamma)$	$\lambda(\mu,\alpha,\beta,\gamma) = \dfrac{1}{\sigma^2} \sum\limits_{ij} n_{ij}\, \mu_{ij}^2$

Quand $n_{ij} = n$ pour tout couple (i,j) on peut mettre sous une forme agréable $R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta)$, $R(\alpha \mid \mu, \beta)$, $R(\beta \mid \mu, \alpha)$ ainsi que les paramètres de non centralité exprimés en fonction de μ_{ij}

$$\left| \begin{aligned} R(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) &= R(\mu, \alpha, \beta, \gamma) - R(\mu, \alpha, \beta) \\ &= n \sum_{ij} (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...})^2 \\ \lambda(\gamma \mid \mu, \alpha, \beta) &= \frac{n}{\sigma^2} \sum_{ij} (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..})^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} R(\alpha \mid \mu, \beta) &= R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \beta) \\ &= nJ \sum_{i} (y_{i..} - y_{...})^2 . \\ \lambda(\alpha \mid \mu, \beta) &= \frac{nJ}{\sigma^2} \sum_{i} (\mu_{i.} - \mu_{..})^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} R(\beta \mid \mu, \alpha) &= R(\mu, \alpha, \beta) - R(\mu, \alpha) \\ &= nI \sum_{j} (y_{.j.} - y_{...})^2 \\ \lambda(\beta \mid \mu, \alpha) &= \frac{nI}{\sigma^2} \sum_{j} (\mu_{.j} - \mu_{..})^2 \end{aligned} \right.$$