Revue de statistique appliquée

Ivette Gomes
Helena M. Barroso
Antonia Amaral

Étude expérimentale de tests d’ajustement

Revue de statistique appliquée, tome 23, nº 2 (1975), p. 5-18
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1975__23_2_5_0>

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE TESTS D'AJUSTEMENT (1)

M. Ivette GOMES, Helena M. BARROSO et M. Antonia AMARAL (2)

I – INTRODUCTION

L'objectif de ce travail est l'étude empirique de quelques tests d'ajustement ("goodness-of-fit") d'une fonction de distribution et d'une fonction de densité de probabilité. Pour cela, nous partons d'échantillons, de taille assez grande, pris dans des populations de divers types, à fonctions de distribution connues, et les soumettons à des tests (de normalité et autres).

La méthodologie que nous avons suivie est différente de celle adoptée par E. Pearson [3] ; dans ce travail, après avoir engendré par simulation en ordinateur quelques milliers d'échantillons aléatoires de dimension $n = 10$ et $n = 20$ de plusieurs distributions continues, Pearson teste la normalité de ces échantillons par diverses méthodes.

Dans les deux sections qui suivent, nous décrivons les tests utilisés et les techniques de calcul employées.

La section 4, est réservée à la description complète du problème et à la présentation des résultats.

II – DESCRIPTION THEORIQUE DES TESTS EMPLOYES

Plusieurs méthodes non-paramètriques ont été proposées pour tester l'hypothèse selon laquelle n observations proviennent d'une population à fonction de distribution $F(x)$ connue (sans paramètres). La plupart de ces méthodes repose sur la comparaison de la fonction de distribution hypothétique, $F(x)$, avec la fonction de distribution empirique.

$$s_n^*(x) = \begin{cases} 0 & x < x'_1 \\ k/n & x'_k \leqslant x < x'_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ 1 & x \geqslant x'_n \end{cases}$$

---

(1) Ce travail a été réalisé dans le Centro de Matemáticas Aplicadas, Faculdade de Ciências de Lisboa, sous l'orientation de M. le Professeur J. Tiago de Oliveira.

(1) Article remis le 18/17/73, révisé le 19/9/74.

où $(x'_1 \leqslant x'_2 \leqslant \ldots \leqslant x'_n)$ est l'échantillon ordonné, obtenu par réordonnancement de l'échantillon initial pris dans la population, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Parmi eux, nous avons employé des tests dus à Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises, Stephens et Sherman, basés, respectivement, sur les statistiques

$$1/\ D_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |s_n^*(x) - F(x)|$$

dont la fonction de distribution asymptotique est

$$Q(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \text{Prob}\,(\sqrt{n}\, D_n \leqslant \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp(-2k^2 \lambda^2) \qquad \lambda > 0$$
$$0 \qquad \lambda \leqslant 0$$

$$2/\ W_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \{S_n^*(x) - F(x)\}^2\, dF(x)\}$$

de distribution asymptotique

$$P(W^2 \leqslant z) = \lim_{n \to \infty} \text{Prob}\,(W_n^2 \leqslant z) =$$

$$\frac{1}{\Pi\sqrt{z}} \sum_{j=0}^{+\infty} (-1)^j \binom{-\frac{1}{2}}{j} \sqrt{4j+1}\, e^{\frac{(4j+1)^2}{16z}} K_{1/4}\left(\frac{(4j+1)^2}{16z}\right)$$

où $K_{1/4}(x)$ est une fonction de Bessel ; Andersen et Darling ont publié [2] la table des valeurs de z qui satisfont à Prob $(W^2 < z) = \alpha$, pour $\alpha = 0.01\ (0.01)\ 0.99,\ 0.999$. avec cinq décimales ;

$$3/\ U_n^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \{s_n^*(x) - F(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} [s_n^*(y) - F(y)]\, dF(y)\}^2\, dF(x)$$

dont la distribution asymptotique est

$$P(U^2 \leqslant z) = \lim_{n \to \infty} \text{Prob}\,(U_n^2 \leqslant z) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \exp(-2\Pi^2 k^2 z) = Q(\Pi\sqrt{z})$$

où $Q(x)$ est la fonction de distribution limite de la statistique de Kolmogorov-Smirnov ;

$$4/\ S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \left| F(x'_i) - F(x'_{i-1}) - \frac{1}{n+1} \right|$$

avec $\qquad F(x'_0) = 0 \quad$ et $\quad F(x'_{n+1}) = 1$,

la distribution asymptotique de la variable aléatoire

$$\left(\frac{ne^2}{2e-5}\right)^{1/2} \left(S_n - \frac{1}{e}\right)$$

étant normale réduite.

Les distributions asymptotiques de ces statistiques peuvent être trouvées, en détail, dans [2], [5] et [6].

Remarquons que W_n^2 et U_n^2 peuvent s'exprimer en termes des statistiques ordonnées

$$W_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ F(x'_j) - \frac{2j-1}{2n} \right\}^2 + \frac{1}{12n}$$

$$U_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ F(x)_j) - \frac{2j-1}{2n} - F + \frac{1}{2} \right\}^2 + \frac{1}{12n} = W_n^2 - n \left(F - \frac{1}{2}\right)^2$$

avec

$$F = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(x'_j) .$$

Deux autres tests, de nature différente des précédents et basés seulement sur la fonction de distribution supposée $F(x)$, ont été proposés par Tiago de Oliveira [7] et utilisent les statistiques :

$$T_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log F(x_j)$$

$$T_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F^2(x_j)$$

lesquelles sont asymptotiquement normales.

Tiago de Oliveira a aussi étudié, [7], des tests d'ajustement qui ne sont applicables que si la distribution de la population testée est absolument continue c'est-à-dire, s'il existe $f(x) = F'(x)$; ces tests se fondent sur les statistiques :

$$D_{1n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \log f(x_j)$$

$$D_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f^2(x_j)$$

lesquelles sont, elles aussi, asymptotiquement normales

3 – DENSITES EMPLOYEES ET ESTIMATION DE LEURS PARAMETRES

Nous avons simulé, en ordinateur, 13 échantillons de taille $n = 1\,002$, avec densités de probabilités présentées dans le tableau I.

A chacun des ces échantillons, et en admettant que rien n'était connu sur sa distribution, nous avons essayé d'ajuster, non seulement les distributions

Tableau I

i		Fonctions de densité de probabilité $f_i(x)$	Valeurs particulières des paramètres pour lesquelles ont été simulés les échantillons	
1	Rectangulaire	$\frac{1}{b-a} \quad a \leqslant x \leqslant b$	$a = 0 \quad b = 1$	
2	Normale	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad x \in R$	$\mu = 0 \quad \sigma = 1$	
3	Exponentielle	$\frac{1}{\delta} e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)} \quad x \geqslant \lambda$	$\lambda = 0 \quad \delta = 1$	
4	Gumbel (max.)	$\frac{1}{\delta} e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)} e^{-e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\sigma}\right)}} \quad x \in R$	$\lambda = 0 \quad \delta = 1$	
5	Cauchy	$\frac{1}{\pi\delta\left(1 + \left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^2\right)} \quad x \in R$	$\lambda = 0 \quad \delta = 1$	
6	Rayleigh	$\frac{x-\lambda}{\delta^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^2} \quad x \geqslant \lambda$	$\lambda = 0 \quad \delta = 1$	
7	Logistique	$\frac{1}{\delta} \frac{e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)}}{\left(1 + e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)}\right)^2} \quad x \in R$	$\lambda = 0 \quad \delta = 1$	
8	Frechet (max.)	$\frac{k}{\delta\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{k-1}} e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{-k}} \quad x \geqslant \lambda$	$\lambda = 0 \quad \delta = 1$ $k = 1$	$\lambda = 0 \quad \delta = 1$ $k = 2$
9	Weibull (max.)	$\frac{R}{\delta}\left(\frac{\lambda - x}{\delta}\right)^{R-1} e^{-\left(\frac{\lambda - x}{\delta}\right)} \quad x \leqslant \lambda$	$\lambda = 0 \quad \delta = 1 \quad R = 3$	
10	Pareto	$\left(\frac{\omega + c}{x + c}\right)^a \frac{a}{x + c} \quad x \geqslant \omega$	$c = 0 \quad \omega = 1 \quad a = 1$	
11	Beta	$\frac{1}{B(p,q)} \frac{1}{(b-a)^{p+q-2}} (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1} \quad a \leqslant x \leqslant b$	$a = 0 \quad b = 1$ $p = 1 \quad q = 2$	$a = 0 \quad b = 1$ $p = 2 \quad q = 2$

du tableau I, avec des paramètres à estimer, mais aussi la distribution de Weibull (minima), dont la densité de probabilité est

$$w_k(x/\lambda\,,\delta) = \begin{cases} 0 & x \leqslant \lambda \\ \frac{k}{\delta}\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)^k} & x > \lambda \end{cases}$$

Remarquons que la distribution exponentielle et celle de Rayleigh obtenues, sont des cas particuliers de cette distribution de Weibull pour $k = 1$ et $k = 2$

Les distributions asymptotiques des statistiques présentées dans la section précédente ne sont connues que dans le cas où il n'est pas nécessaire d'estimer les paramètres de la distribution que l'on va tester comme étant sous-jacente à la population où l'échantillon a été pris. Il est donc évident que l'estimation des paramètres peut complètement changer la distribution de la statistique. Pourtant quand on désire faire des applications, on ne connait pas, en général, les vraies valeurs des paramètres, d'où la nécessité de les estimer.

Un des problèmes qui se posent est celui de savoir quelle est la sensibilité d'un certain test aux problèmes d'estimation. Celui-ci n'est pas, pourtant, l'objectif de ce travail ; ce qui nous intéresse est la comparaison des différents tests utilisant (autant que possible) le même critère d'estimation. Nous avons opté pour la méthode du maximum de vraisemblance parce que, en principe, celle-ci fournit, en des conditions de régularité, les meilleurs estimateurs, sauf en ce qui concerne la distribution rectangulaire et la distribution Beta.

Quant à la distribution rectangulaire, une fois que les estimateurs du maximum de vraisemblance sont obtenus comme des maxima sur la frontière de l'équation du maximum de vraisemblance, nous avons introduit une correction pour ces valeurs, en utilisant

$$a^* = \frac{n\,x'_1 - x'_n}{n-1} \qquad b^* = \frac{n x'_n - x'_1}{n-1}$$

qui sont des valeurs centrées des extrêmes de l'intervalle (a , b), où la fonction est définie.

Pour la distribution Beta il n'a pas été possible d'utiliser la méthode du maximum de vraisemblance à cause de limitations de l'ordinateur, ce qui nous amena à adopter des estimateurs obtenus par la méthode des moments.

Dans ce cas-ci, nous avons pris comme valeur approchée de la fonction de distribution celle que propose Peizer-Pratt [4]

$$B_x(p\,,q) = \frac{1}{B(p\,,q)} \int_0^x x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \approx \phi(Z)$$

avec

$$Z = d.\left\{ \frac{1 + yq\,((q-0.5)/((p+q-1)(1-y))) + (1-y)\,g\,((p-0.5)/((p+q-1)\,y))}{\left(p+q-\frac{5}{6}\right) y\,(1-y)} \right\}^{1/2}$$

$$d = q - \frac{1}{3} - (p+q-2/3)\,(1-x) + 0.02\,(x/q - (1-x)/p + (x-0.5)/(p-q))$$

$$g(x) = \frac{1 - x^2 + 2\ln(x)}{(1-x)^2} \quad x > 0\,, x \neq 1 \quad g(0) = 1\,, g(1) = 0$$

ϕ étant la fonction de distribution d'une normale réduite.

Une fois adopté la critère du maximum de vraisemblance comme méthode d'estimation à suivre, ceux des tests auparavant mentionnés qui sont fondés sur les statistiques T_{1n} et D_{1n} ne peuvent pas être appliqués à certaines distributions, car les valeurs observées des statistiques centrées et réduites.

$$T^*_{1n} = \frac{T_{1n} - E[T_{1n}]}{\sigma(T_{1n})} \qquad D^*_{1n} = \frac{D_{1n} - E(D_{1n})}{\sigma(D_{1n})}$$

sont nulles

La valeur observée t^*_{1n} est nulle quand la distribution testée est de Fréchet (maxima), de Gumbel ou de Weibull (maxima), et de même, pour d^*_{1n} quand la distribution testée est exponentielle, normale ou de Pareto.

Il faut encore souligner que, dans le cas où on entend tester la distribution rectangulaire, les tests sur la fonction de densité ne sont pas applicables, du fait que D_{1n} et D_{2n} ne sont plus fonctions des observations et prennent toujours une valeur constante, indépendemment de la méthode d'estimation suivie.

4 – DESCRIPTION DU PROBLEME. RESULTATS

Soient $F_i(x/\theta)$, $(i = 1, 2, \ldots, 11)$ les fonctions de distribution correspondant aux densités $f_i(x/\theta)$ présentées dans le tableau I, et $F_{12}(x/\theta)$ la fonction de distribution de Weibull (minima), θ étant le vecteur $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_x)$ des paramètres.

On commença par simuler en ordinateur (Time sharing, Honeywell Bull GE 265) un échantillon de $n = 1\,002$ nombres pseudo-aléatoires uniformes(1) (vid. Annexe) et, à partir de ces nombres, et par inversion de transformations uniformisantes (exception faite de la normale, dont la fonction de distribution n'a pas d'inverse explicite), nous avons obtenu les échantillons $(x^j_1, \ldots, x^j_n)$ $(j = 1, 2, \ldots 13)$ mentionnés dans la section 3.

La fonction de distribution F_{oj}, sous-jacente à la population d'où l'échantillon $(x^j_1, \ldots, x^j_n)$ a été pris, est donc une des fonctions F_i, pour une valeur particulière $\theta = \theta°$ du paramètre.

Relativement à chacun de ces échantillons, nous avons testé la possibilité qu'il ait été extrait d'une population à fonction de distribution $F_i(x/\theta)$ $(i=1, \ldots 12)$. en estimant le vecteur θ des paramètres comme il a été indiqué en 3. Nous avons ensuite appliqué la batterie des tests décrite en 2., et obtenu pour les niveaux de signification $\alpha = 0.01$; 0.05 ; 0.10, les résultats présentés dans les tableaux II, III et IV, respectivement.

Ces tableaux ont été élaborés comme suit :

Dans la 1ère colonne se trouvent les distributions $F_{oj}(j = 1, 2, \ldots, 13)$ sous-jacentes aux populations à étudier, et dans la 1ère ligne les distributions $F_i(i = 1, \ldots, 12)$ testées.

---

(1) Des détails sur le procédé de génération peuvent être trouvés dans (1)

Tableau II
$\alpha = 0.01$

Dist. sous-jacente \ Testée	Uniforme	Normale	Exponen.	Gumbel (Max.)	Cauchy	Rayleigh	Logistique	Fréchet (Max.)	Weibull (Max.)	Weibull (Min.)	Pareto	Beta
Uniforme	• • A A A A A A	• R R A R A R R	• R R * R R R R	A R R • R A R R	R R R R R A R R	A R R A R A R R	A R R A R A R R		A R R • R A R R	A R R A R A R R		* * A A A A A A
Normale	• • R R R R R R	• A A A A A A A	• R R * R R R R	R A A • R A R R	R A R R R A R R	R R R R R R R R	A A A A A A A A		A A A • A A A A	A A A A A A A A		* * A A A A A A
Exponentielle	• • R R R R R R	• R R A R R R R	• A A * A A A A	R A R • R A R R	R A R R R R R R	R R R R R R R R	A A R R R A R R	A R A • A A R R		A A A A A A A A		* * A R A A R R
Gumbel (Max.)	• • R R R R R R	• A A A R R R R	• R R * R R R R	A A A • A A A A	R R R R R R R R	R R A R R A R R	A A A A A A R A			R R A A R A R R		* * A A A A R A
Cauchy	• • R R R R R R	• R R R R R R R	• R R * R R R R	* R R • R R R R	A A A A A A A A	R R R R R R R R						* * R R R R R R
Rayleigh	• • R R R R R R	• A A A R A R R	• R R * R R R R	A A A • A A A A	R R R R R A R R	A A A A A A A A	A A A A A A R A		A A A • A A A A	A A A A A A A A		* * A A A A A A
Logistique	• • R R R R R R	• A A A A A R A	• R R * R R R R	R R R • R A R R	R R R R R A R R	R R R R R R R R	A A A A A A A A		A R A • R A R R	A R A * R A R R		* * A A A A R A
Fréchet (K = 1) (Max.)	• • R R R R R R	• R R R R R R R	• R R * R R R R	* R R • R R R R	R A R R R R R R	* R R A R R R R		A A A • A A A A			• R A * R A R R	
Fréchet (K = 2) (Max.)	• • R R R R R R	• R R R R R R R	• A R * R R R R	R R R • R R R R	R A R R R R R R	R R R A R R R R	R R R R R R R R	A A A • A A A A			• R R * R A R R	
Weibull (Max.)	• • R R R R R R	• A A A A A A A	• R R * R R R R	R A R • R A R R	R R R R R A R R	R R R R R R R R	A A A A A A R A		A A A • A A A A	A A A A A A A A		* * R A A A A A
Pareto	• • R R R R R R	• R R R R R R R	• R R * R R R R	* R R • R R R R	R A R R R R R R	* R R A R R R R		A A A • A A A A			• A A * A A A A	
Beta (1,2)	• • R R R R R R	• A R A R A R R	• R R * R R R R	A R R • R A R R	R R R R R R R R	A R A A R A R R	A R R A R A R R			A R A A A A R A		* A A A A A A A
Beta (2,2)	• • R R R R R R	• A A A A A R A	• R R * R R R R	A R A • R A R R	R R R R R A R R	R A A R R R R R	A R A A A A R A		A R A • A A R A	A R A A A A R A		* * A A A A A A

Tableau III

$\alpha = 0.05$

Dist. Testée / Sous-jacente	Uniforme	Normale	Exponen.	Gumbel (Max.)	Cauchy	Rayleigh	Logistique	Fréchet (Max.)	Weibull (Max.)	Weibull (Max.)	Pareto	Beta
Uniforme	• •	• R	• R	A R	R R	A R	A R		A R	A R		* *
	A A	R A	R *	R •	R R	R A	R A		R •	R R		A A
	A A	R A	R R	R R	R A	R R	R A		R A	R R		A A
	A A	R R	R R	R R	R R	R R	R R		R R	R R		A A
Normale	• •	• A	• R	R A	R R	R R	A A		A A	A A		* *
	R R	A A	R *	R •	R R	R R	A A		A •	A A		A A
	R R	A A	R R	R A	R A	R R	A A		A A	A A		A A
	R R	A A	R R	R R	R R	R R	A A		A A	A A		A A
Exponentielle	• •	• R	• A	R A	R R	R R	A R	A R		A A		* *
	R R	R R	A *	R •	R R	R R	R R	A •		A A		A R
	R R	R R	A A	R A	R R	R R	R A	R A		A A		R A
	R R	R R	A R	R R	R R	R R	R R	R R		A A		R R
Gumbel (Max.)	• •	• A	• R	A A	R R	R R	A A			R R		* *
	R R	R A	R *	A •	R R	A R	A R			A A		A A
	R R	R R	R R	A A	R R	R A	R A			R R		R A
	R R	R R	R R	A A	R R	R R	R R			R R		R R
Cauchy	• •	• R	• R	* R	A A	R R						* *
	R R	A R	R *	R •	A A	R R						R R
	R R	R R	R R	R R	A A	R R						R R
	R R	R R	R R	R R	A A	R R						R R
Rayleigh	• •	• A	• R	A A	R R	A A	A R		A A	A A		* *
	R R	A A	R *	A •	R R	A A	A A		A •	A A		A A
	R R	R A	A R	A A	R A	A A	R A		A A	A A		A A
	R R	R R	R R	A A	R R	A A	R R		A A	A A		A A
Logistique	• •	• A	• R	R R	R R	R R	A A		A R	A R		* *
	R R	A A	R *	R •	R R	R R	A A		A •	A *		A A
	R R	A A	R R	R R	R A	R R	A A		R A	R A		R A
	R R	R A	R R	R R	R R	R R	A A		R R	R R		R R
Fréchet (K= 1) (Max.)	• •	• R	• R	* R	R A	* R		A A			• R	
	R R	R R	R *	R •	R R	R A		A •			R *	
	R R	R R	R R	R R	R R	R R		A A			R A	
	R R	R R	R R	R R	R R	R R		A A			R R	
Fréchet (X = 2) (Max.)	• •	• R	• R	R R	R A	R R	R R	A A			• R	
	R R	R R	R *	R •	R R	R A	R R	A •			R *	
	R R	R R	R R	R R	R R	R R	R R	A A			R A	
	R R	R R	R R	R R	R R	R R	R R	A A			R R	
Weibull (Max.)	• •	• A	• R	R A	R R	R R	A R		A A	A A		* *
	R R	A A	R *	R •	R R	R R	A A		A •	A A		R A
	R R	A A	R R	R A	R A	R R	A A		A A	A A		A A
	R R	A A	R R	R R	R R	R R	R A		A A	A A		A R
Pareto	• •	• R	• R	* R	R A	* R		A A			• A	
	R R	R R	R *	R •	R R	R A		A •			A *	
	R R	R R	R R	R R	R R	R R		A A			A A	
	R R	R R	R R	R R	R R	R R		R A			A A	
Beta (1,2)	• •	• A	• R	A R	R R	R R	A R			A R		* *
	R R	R A	R *	R •	R R	R R	R R			A A		A A
	R R	R A	R R	R A	R R	R A	R A			R A		A A
	R R	R R	R R	R R	R R	R R	R R			R R		A A
Beta (2,2)	• •	• A	• R	A R	R R	R A	A R		A R	A R		* *
	R R	A A	R *	R •	R R	A R	A A		A •	A A		A A
	R R	A A	R R	R A	R A	R R	R A		A A	A A		A A
	R R	R A	R R	R A	R R	R R	R R		R A	R A		A A

Tableau IV

$\alpha = 0.10$

Dist. Testée / Sous-jacente	Uniforme	Normale	Exponen	Gumbel (Max.)	Cauchy	Rayleigh	Logistique	Fréchet (Max.)	Weibull (Max.)	Weibull (Min.)	Pareto	Beta
Uniforme	● ● A A A A A A	● R R A R A R R	● R R * R R R R	A R R ● R R R R	R R R R R A R R	A R R A R R R R	A R R A R A R R		A R R ● R A R R	A R R A R R R R		* * A A A A A A
Normale	● ● R R R R R R	● A A A A A A A	● R R * R R R R	R A R ● R A R R	R R R R R A R R	R R R R R R R R	A R A A A A R A		A A A ● A A A A	A A A A A A A A		* * A A A A A A
Exponentielle	● ● R R R R R R	● R R R R R R R	● A A * A A A A	R A R ● R A R R	R R R R R R R R	R R R R R R R R	A R R R R A R R	A R R ● R A R R		A A A A A A A A		* * A R R A R R
Gumbel (Max.)	● ● R R R R R R	● A R A R R R R	● R R * R R R R	A A A ● A A A A	R R R R R R R R	R R A R R A R R	A A R R R A R R			R R A R R R R R		* * A A R A R R
Cauchy	● ● R R R R R R	● R R R R R R R	● R R * R R R R	* R R ● R R R R	A A A A A A A A	R R R R R R R R						* * R R R R R R
Rayleigh	● ● R R R R R R	● A A A R R R R	● R R * R R R R	A R A ● A A R A	R R R R R A R R	A A A A A A A A	A R R R R A R R		A R A ● A A A A	A A A A A A A A		* * A A A A A A
Logistique	● ● R R R R R R	● A A A R A R A	● R R * R R R R	R R R ● R R R R	R R R R R A R R	R R R R R R R R	A A A A A A A A		R R A ● R A R R	R R A * R R R R		* * A A R A R R
Fréchet (K = 1) (Max.)	● ● R R R R R R	● R R R R R R R	● R R * R R R R	* R R ● R R R R	R A R R R R R R	* R R A R R R R		A A A ● A A A A			● R R * R A R R	
Fréchet (K = 2) (Max.)	● ● R R R R R R	● R R R R R R R	● R R * R R R R	R R R ● R R R R	R A R R R R R R	R R R A R R R R	R R R R R R R R	A A A ● A A A A			● R R * R A R R	
Weibull (Max.)	● ● R R R R R R	● A A A A A A A	● R R * R R R R	R A R ● R A R R	R R R R R A R R	R R R R R R R R	A R A A A A R A		A A A ● A A A A	A A A A A A A A		* * R A A A A R
Pareto	● ● R R R R R R	● R R R R R R R	● R R * R R R R	* R R ● R R R R	R A R R R R R R	* R R A R R R R		A A A ● A A R A			● A A * A A A A	
Beta (1,2)	● ● R R R R R R	● A R A R A R R	● R R * R R R R	A R R ● R A R R	R R R R R R R R	R R R R R A R R	A R R R R A R R			A R A A R A R R		* * A A A A A A
Beta (2,2)	● ● R R R R R R	● R A A R A R A	● R R * R R R R	R R R ● R A R R	R R R R R A R R	R A A R R R R R	A R R A R A R R		A R A ● A A R A	A R A A A A R R		* * A A A A A A

Dans chacun des carrés centraux, le résultat obtenu à partir de chacun des huit tests cités en 2., se trouve toujours dans la même position relative, d'après le schéma.

D_{1n}	D_{2n}
S_n	T_{1n}
W_n^2	T_{2n}
D_n	U_n^2

La lettre R figure dans cette position si le test amène à rejeter l'hypothèse testée, et la lettre A si c'est le contraire.

Les positions signalées avec un . correspondent à des tests non utilisables pour les raisons référées en 3., et celles signalées avec * correspondent à des tests qui ne peuvent pas être utilisés à cause de l'annulation de la fonction de distribution ou de la fonction densité en quelques points ou encore à cause de ces limitations de l'ordinateur, les paramètres n'ont pas pu être estimés, les cases correspondant à ces cas-là restant vides.

Il est opportun de remarquer que, aussitôt que la distribution sous-jacente est un cas particulier de la distribution testée, tous les tests applicables ont conduit à la non-rejection de cette distribution, comme on devait s'y attendre.

Relativement à chaque distribution testée, à chaque test, et à chaque niveau de signification α(0.01 ; 0.05 ; 010) nous avons déterminé les fractions partielles de rejection correcte, c'est-à-dire le quotient entre le nombre de rejections vérifiées (vid. tableau V) et le nombre total de rejections correctes. Ce dernier nombre est indiqué dans le même tableau.

La colonne *normale* du tableau II représente les résultats, au niveau de signification $\alpha = 0.05$, de l'ensemble de tests du type :

Ayant un échantillon dont nous connaissons *a priori* la distribution (uniforme, normale, exponentielle, etc.) nous allons tester l'hypothèse.

H_1 : la distribution est normale

v.s. H_2 : la distribution n'est pas normale

Soit en particulier

	Normale	
Exp.	.	R
	R	R
	R	R
	R	R

Tous les tests employés ont conduit à la réjection de l'hypothèse H, au niveau de signification $\alpha = 0.05$ – c'est le sens du symbole R dans le tableau.

Tableau V

Fraction partielle de réjection correcte

	Dist. Testée	Nombre total de rejections correctes	D_{1n}	D_{2n}	D_n	W_n^2	U_n^2	S_n	T_{1n}	T_{2n}
$\alpha = 0.01$	Uniforme	12	•	•	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	Normal	12	•	0.50	0.75	0.75	0.92	0.58	0.33	0.50
	Exponentielle	12	•	0.92	1.00	1.00	1.00	1.00	•	1.00
	Gumbel (Max.)	12	0.56	0.67	0.92	0.92	0.92	0.75	•	0.33
	Cauchy	12	1.00	0.58	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.50
	Rayleigh	12	0.80	0.92	1.00	1.00	1.00	0.75	0.58	0.75
	Logistique	9	0.11	0.44	0.44	0.44	0.89	0.44	0.22	0.11
	Fréchet (Max.)	2	0.00	0.50	0.50	0.00	0.50	0.00	•	0.00
	Weibull (Max.)	5	0.00	0.60	0.40	0.40	0.60	0.20	•	0.00
	Weibull (Max.)	7	0.14	0.71	0.43	0.43	0.71	0.14	0.00	0.00
	Pareto	2	•	1.00	1.00	1.00	1.00	0.50	•	0.00
	Beta	7	•	•	0.29	0.14	0.57	0.29	0.29	0.14
$\alpha = 0.05$	Uniforme	12	•	•	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	Normal	12	•	0.50	0.75	0.75	0.92	0.67	0.42	0.50
	Exponentielle	12	•	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	•	1.00
	Gumbel (Max.)	12	0.56	0.67	0.92	0.92	0.92	0.92	•	0.50
	Cauchy	12	1.00	0.75	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.50
	Rayleigh	12	0.90	0.92	1.00	1.00	1.00	0,83	0.67	0.83
	Logistique	9	0.11	0.78	0.78	0.78	0.89	0.44	0.44	0.11
	Fréchet (Max.)	2	0.00	0.50	0.50	0.50	1.00	0.00	•	0.00
	Weibull (Max.)	5	0.00	0.60	0.40	0.40	0.60	0.20	•	0.00
	Weibull (Min.)	7	0.14	0.71	0.57	0.57	0.71	0.14	0.00	0.48
	Pareto	2	•	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	•	0.00
	Beta	7	•	•	0.71	0.57	0.57	0.29	0.29	0.14
$\alpha = 0.10$	Uniforme	12	•	•	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
	Normal	12	•	0.58	0.75	0.92	0.92	0.67	0.42	0.58
	Exponentielle	12	•	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	•	1.00
	Gumbel (Max.)	12	0.67	0.75	0.92	0.92	1.00	0.92	•	0.50
	Cauchy	12	1.00	0.75	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.50
	Rayleigh	12	0.90	0.92	1.00	1.00	1.00	0.83	0.67	0.83
	Logistique	9	0.11	0.89	0.78	0.78	1.00	0.78	0.56	0.11
	Fréchet (Max.)	2	0.00	0.50	0.50	0.50	1.00	0.50	•	0.00
	Weibull (Max.)	5	0.20	0.60	0.40	0.40	0.60	0.20	•	0.00
	Weibull (Min.)	7	0.43	0.71	0.71	0.57	0.71	0.14	0.17	0.43
	Pareto	2	•	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	•	0.00
	Beta	7	•	•	0.71	0.57	0.57	0.29	0.29	0.14

Toutes ces réjections sont correctes, vu que l'on savait d'avance que l'échantillon suivait une distribution exponentielle.

On pourrait s'attendre à que, chaque fois que l'on essaye d'adapter la normale à une distribution qui ne l'est pas (et de même pour toute autre distribution), le test employé devrait conduire à la réjection (correcte). Pourtant celà ne se vérifie pas toujours. Un exemple :

	Normale	
	.	R
	R	A
Uniforme	R	A
	R.	R

C'est-à-dire, quand nous essayons d'adapter à l'échantillon uniforme une distribution normale, les tests T_{1n} et T_{2n} conduisent à l'acceptation, quoique la réjection fût correcte.

Il s'avère donc que le nombre de réjections auxquelles conduit un test n'égale pas toujours le nombre de réjections qui seraient correctes.

Comme l'on voit sur le tableau III, et dans le cas, par exemple, où la distribution à tester est la normale, la fraction partielle de réjection correcte prend la valeur 8/12 pour le test Sherman ; pour le même test, la valeur 1/5 si la distribution testée est celle de Weibull (maxima).

Pour arriver à une comparaison empirique des différents tests on a calculé pour chacun d'eux le "score" des fractions partielles de rejections correctes, en multipliant chaque fraction par le nombre respectif total de rejections correctes. On a ainsi obtenu la fraction moyenne de réjection correcte, laquelle n'est que le quotient du nombre de fois où le test a conduit à la réjection par le nombre total de réjections correctes auxquelles il devrait conduire, les valeurs de ces fractions moyennes et le nombre total de rejections correctes figurent au tableau VI.

Tableau VI

Fraction moyenne de rejection correcte

	D_{1n}	D_{2n}	D_n	W_n^2	U_n^2	S_n	T_{1n}	T_{2n}
Nombre total de rejections correctes	54	85	104	104	104	104	69	104
$\alpha = 0.01$	0.5000	0.6824	0.7884	0.7692	0.8942	0.6730	0.5652	0.4904
$\alpha = 0.05$	0.5185	0.7530	0.8557	0.8462	0.9038	0.7212	0.6362	0.5384
$\alpha = 0.10$	0.5926	0.7882	0.8654	0.8654	0.9230	0.7596	0.6522	0.5576

Alors nous pouvons dire qu'un test est plus puissant qu'un autre lorsqu'il a une plus grande fraction moyenne de rejection correcte.

Ainsi nous pouvons conclure empiriquement que, parmi tous les tests présentés, le plus puissant est le test U_n^2 de Stephens parce qu'il prend la plus grande fraction moyenne de rejection correcte (voir tableau VI).

En même temps on peut supposer que, du point de vue des applications, la meilleure forme d'action n'est pas la conclusion basée sur un seul test, mais à l'aide d'un groupe de tests. Dans ce cas-là on n'accepterait pas l'hypothèse testée au cas où elle aurait été rejetée par un des tests du groupe. Au niveau de signification $\alpha = 0.10$, les deux couples (U_n^2, S_n) et (U_n^2, D_n) ont la même fraction moyenne de rejection correcte, 0.9326, proche de 0.9422, celle de la batterie de tous les tests. Pourtant, le groupe qui nous semble le plus indiqué est le couple (U_n^2, S_n) puisque, au niveau de signification $\alpha = 0.01$, il présente la fraction moyenne 0.9038, égale à celle de la batterie et supérieure à celle du couple (U_n^2, D_n) (vd. Tableau VII). En vue de ces résultats il nous semble dispensable le calcul des fractions moyennes de réjections correctes pour plus de deux tests ensemble.

Tableau VII

	(U_n^2, D_n)	(U_n^2, S_n)	Batterie
$\alpha = 0.01$	0.8942	0.9038	0.9038
$\alpha = 0.05$	0.9135	0.9135	0.9135
$\alpha = 0.10$	0.9326	0.9326	0.9422

REFERENCES

[1] AMARAL, M.A., BARROSO, H.M., GOIES, M.I., MULLER, D. VEIGA DE OLIVEIRA, M.F. – Un processo de gerar números pseudo-aleatórios e seus testes. Rundamentos e resultados (en voie de publication).

[2] ANDERSON, T.W., DARLING, P.A. (1952) – Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes, *Annals of Mathematical Statistics,* 23, 193-212.

[3] PEARSON, E.S. (1973) – Testing for departure from normality, Addendum to document 69/2 N75 ISO (BRIT. STAND. INSTN.).

[4] PEIZER, D.B., PRATT, J.W. (1968) – A normal approximation for binomial, F, Beta, and other common, related tail probabilities, I, *Journal of the American Statistical Association* (63) 1416-1456.

[5] SHERMAN, B. (1950) – A random variable related to the spacing of sample values, *Annals of the Mathematical Statistics,* 21, 339-361.

[6] STEPHENS, M.A. (1963) – The distribution of the goodness-of-fit statistic U_n^2, I, II, Biometrika, 50, 303-313 et 51, 393-397.

[7] TIAGO DE OLIVEIRA, J. (1963) – Estatística de densidades-resultados assintóticos, Separata da Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa, 2ª série A, vol. IX, fasc. 1.

Distribution limite de $n\omega^{2}$ (1)

$$a_1(z) = \lim_{n \to \infty} \Pr\{n\omega^2 \leqslant z\}$$

z	$a_1(z)$	z	$a_1(z)$	z	$a_1(z)$
.02480	.01	.08562	.34	.17159	.67
.02878	.02	.08744	.35	.17568	.68
.03177	.03	.08928	.36	.17992	.69
.03430	.04	.09115	.37	.18433	.70
.03656	.05	.09306	.38	.18892	.71
.03865	.06	.09499	.39	.19371	.72
.04061	.07	.09696	.40	.19870	.73
.04247	.08	.09896	.41	.20392	.74
.04427	.09	.10100	.42	.20939	.75
.04601	.10	.10308	.43	.21512	.76
.04772	.11	.10520	.44	.22114	.77
.04939	.12	.10736	.45	.22748	.78
.05103	.13	.10956	.46	.23417	.79
.05265	.14	.11182	.47	.24124	.80
.05426	.15	.11412	.48	.24874	.81
.05586	.16	.11647	.49	.35670	.82
.05746	.17	.11888	.50	.26520	.83
.05904	.18	.12134	.51	.27429	.84
.06063	.19	.12387	.52	.28406	.85
.06222	.20	.12646	.53	.29460	.86
.06381	.21	.12911	.54	.30603	.87
.06541	.22	.13183	.55	.31849	.88
.06702	.23	.13463	.56	.33217	.89
.06863	.24	.13751	.57	.34730	.90
.07025	.25	.14046	.58	.36421	.91
.07189	.26	.14350	.59	.38331	.92
.07354	.27	.14663	.60	.40520	.93
.07521	.28	.14986	.61	.43077	.94
.07690	.29	.15319	.62	.46136	.95
.07860	.30	.15663	.63	.49929	.96
.08032	.31	.16018	.64	.54885	.97
.08206	.32	.16385	.65	.61981	.98
.08383	.33	.16765	.66	.74346	.99
				1.16786	.999

(1) Table extraite de l'article M. Anderson et Darling, cf. référence 2.