

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MAURICE DUMAS

Dépassement de risques en cas d'épreuve séquentielle

Revue de statistique appliquée, tome 22, n° 4 (1974), p. 39-55

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1974__22_4_39_0

© Société française de statistique, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉPASSEMENT DE RISQUES EN CAS D'ÉPREUVE SÉQUENTIELLE (1)

Maurice DUMAS

Les points d'acceptation et de rejet, de coordonnées entières, définissant le plan d'une épreuve séquentielle en vue d'un contrôle par attributs, ne peuvent qu'exceptionnellement être situés exactement sur les lignes d'acceptation et de rejet indiquées par la théorie ; il s'ensuit que les risques réels du fournisseur et du client sont différents des risques figurant aux données de l'épreuve, et ne sont pas toujours inférieurs à ces derniers ; un dépassement, parfois notable, du risque du client est spécialement à craindre.

Table des matières.

1. But de la note.
2. Notations et formules.
3. Graphique en P_1 et P_2 et risques réels.
4. Cas d'une E · S N E (Épreuve de Wald).
5. Exemples d'E S N E.
6. Cas général et conclusions.
7. Bibliographie.

1 – BUT DE LA NOTE.

a) L'épreuve séquentielle de Wald, classique en cas de contrôle par attributs d'un lot d'éléments, comprend dans ses données les quantités α , risque du producteur, et β , risque du client.

Aux données, la théorie fait correspondre deux droites parallèles, les droites A et R, respectivement droite d'acceptation et droite de rejet.

De son côté, l'épreuve est définie par des points de sortie, points d'acceptation et points de rejet, qui sont nécessairement de coordonnées entières. Faute de pouvoir, sauf exception, prendre ces points de sortie sur les droites A et R, on les prend à proximité de ces dernières : du fait de cette approximation inévitable, les risques réels, α' et β' , diffèrent de α et β .

Il est classique de prendre les points en cause aussi proches que possible des droites, tout en étant à l'extérieur du domaine qu'elles limitent ; et on pense assez intuitivement qu'en agissant ainsi l'on assure le respect des inégalités :

$$\alpha' \leq \alpha \text{ et } \beta' \leq \beta$$

(1) Article remis en Juin 1973, révisé le 17/6/74

Or cela n'est pas toujours vrai, loin de là : le but de la présente note est précisément de discuter ce point.

b) Il est possible depuis peu (n° 7) d'avoir pratiquement recours à l'épreuve séquentielle exhaustive (ou : E S E) qui se distingue de l'épreuve, non exhaustive, de Wald (ou : E S N E) en ce qu'elle tient exactement compte de ce que le prélèvement de l'échantillon dans le lot a lieu de façon exhaustive ; et en plus, notamment, en ce qu'à risques égaux, elle exige, en moyenne, un échantillon plus faible.

Les droites A et R de l'E S N E sont remplacées par des courbes concourantes à partir desquelles des approximations analogues à celles dites plus haut doivent être faites ; de la sorte, pour l'E S E comme pour l'E S N E, les inégalités dites plus haut ne sont pas toujours satisfaites ; la note en donne des exemples.

2 – NOTATIONS ET FORMULES

La figure 1, qui rassemble quelques notations et formules utiles, donne lieu aux observations suivantes.

sur a – Les coordonnées x et y ont été retenues parce qu'elles conduisent à des formules plus simples que celles correspondant aux coordonnées $x + y = n$ et y , très généralement adoptées.

sur b – 1/ Les courbes A et R de l'E S N E sont des droites parallèles, d'équations :

$$x - \frac{y}{t} = \begin{cases} n_0 & : \text{courbe A} ; \\ -m_0 & : \text{courbe R} . \end{cases}$$

Ce sont ces équations qui conduisent à (3) et (4).

2/ La pente t est toujours inférieure à l'unité ; le cas $t = 1$, qui implique soit $p_1 = p_2$, soit $p_1 = 1 - p_2$, n'est déjà plus un cas de la pratique.

sur c – 1/ Tous les points considérés désormais sur le plan des x et y , sont sauf indication contraire, des points de coordonnées entières.

2/ La notation $x_A^{(y)}$ est bien définie, car il y a un point d'acceptation, et un seul, pour chaque valeur de y , de 0 à a_1 (a_1 est infiniment grand dans le cas de l'E S N E). Si, comme il arrive parfois dans le cas de l'E S E, la valeur maximale de l'ordonnée des points d'acceptation est inférieure à a_1 , les raisonnements de la note ne sont pas changés de ce fait, de sorte que le cas exceptionnel évoqué ici n'est pas pris en considération dans la suite.

3/ La notation $x_R^{(y)}$ désigne l'abscisse de l'un quelconque des points de rejet d'ordonnée y ; la notation $x_R^{(y)}$ est réservée à la plus grande des valeurs de $x_R^{(y)}$.

4/ Au total, pour l'ensemble des valeurs de y d'une E S E, le nombre des abscisses, y compris $x = 0$, auxquelles correspond une valeur $x_R^{(y)}$ – c'est-à-dire le nombre des points de rejet de l'épreuve – est égal à l'abscisse $x_A^{(a_1)}$ du dernier point d'acceptation.

Ce nombre est toujours supérieur à celui des points d'acceptation, soit $a_1 + 1$.

sur d - La note $N^\circ(x, y, E)$ du point x et y dans l'épreuve E est égale au nombre des cheminements distincts pouvant être suivis depuis l'origine jusqu'au point de coordonnées x et y , en progressant par "pas" d'une unité suivant ox (pas "bon") ou suivant oy (pas "défectueux"), et sans toucher aucun point de sortie, sinon, éventuellement, le point final.

Figure 1. Notations et formules

a) Notations de base.

N : effectif du lot.

a et $p = \frac{a}{N}$: effectif et proportion inconnus des défectueux dans le lot.

x et y : nombre des bons et nombre des défectueux observés au cours de l'épreuve.

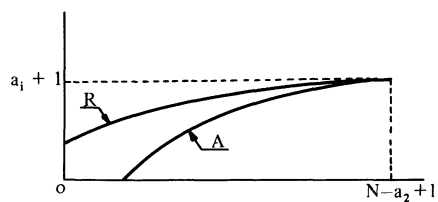
$C(x, y)$: cote du point x, y (voir le b ci-dessous).

$N^\circ(x, y)$: note du point x, y (voir le d ci-dessous).

b) Données et enseignements de la théorie.

ESE

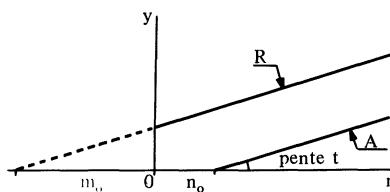
N
 α et a_1 : risque du fournisseur et
 β et a_2 : risque du client
 nombres de défectueux leur correspondant respectivement.



(1)

ESNE

pour N suffisamment grand :
 α et p_1 : risque du fournisseur et
 β et p_2 : risque du client
 proportions de défectueux leur correspondant respectivement.



$$t = \frac{\lg \frac{1-p_1}{1-p_2}}{\lg \frac{p_2}{p_1}};$$

$$n_o = \frac{\lg \frac{1-\alpha}{\beta}}{\lg \frac{1-p_1}{1-p_2}}; m_o = \frac{\lg \frac{1-\beta}{\alpha}}{\lg \frac{1-p_1}{1-p_2}}$$

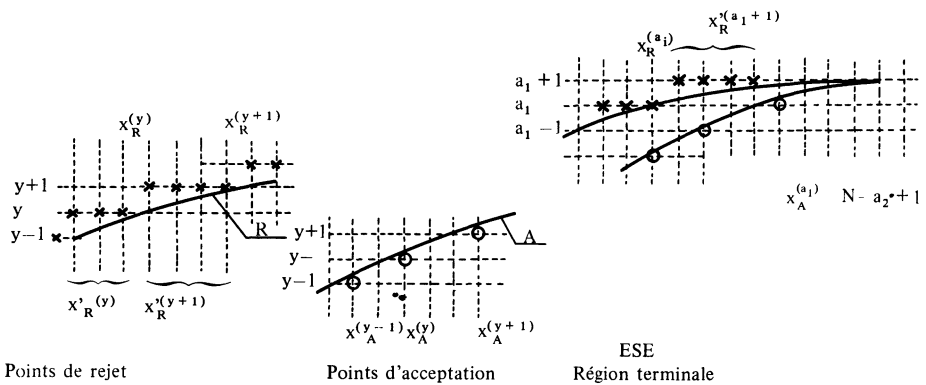
$$(2) C(x,y) =$$

$$\frac{a_2! (N - a_2)! (a_1 - y)! (N - a_1 - x)!}{a_1! (N - a_1)! (a_2 - y)! (N - a_2 - x)!}$$

$$C(x,y) \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^y, \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^x$$

$$(3) \quad C(x,y) = \begin{cases} \beta/(1-\alpha) : \text{courbe A} \\ (1-\beta)/\alpha : \text{courbe R} \end{cases}$$

c) Points de sortie de l'épreuve E.



d) Probabilités diverses.

PA(a, E) : probabilité d'acceptation du lot du fait de l'épreuve E ;

QPA ($x''_A(y)$, a, E) : quote-part de PA due au point d'acceptation $x''_A(y)$;

$$PA(a, E) = \sum_{y=0}^{a_1} QPA(x''_A(y), a, E).$$

PR(a, E) : probabilité de rejet du lot du fait de l'épreuve E ;

QPR($x'_R(y)$, a, E) : quote-part de PR due au point de rejet $x'_R(y)$;

$$PR(a, E) = \sum_{x=0}^{-1+x''_A(a_1)} QPR(x'_R(y), a, E).$$

ESE	ESNE
$(5) \text{ QPA } (x_A^{(y)}, a, E) = \frac{\binom{N-x_A^{(y)}-y}{a-y}}{\binom{N}{a}}$ $N^\circ (x_A^{(y)}, E)$	$\text{QPA } (x_A^{(y)}, p, E) = p^y (1-p)^{x_A^{(y)}}$ $.N^\circ (x_A^{(y)}, E)$
$(6) \text{ QPR } (x'_R^{(y)}, a, E) = \frac{\binom{N-x'_R^{(y)}-y}{a-y}}{\binom{N}{a}}$ $N^\circ (x'_R^{(y)}, E)$	$\text{QPR } (x'_R^{(y)}, p, E) = p^y (1-p)^{x'_R^{(y)}}$ $.N^\circ (x'_R^{(y)}, E)$
<p>e) Cas particuliers $a = a_1 = p_1 \cdot N$ et $a = a_2 = p_2 \cdot N$, et risques réels.</p> <p>Notations simplifiées, utilisées lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre :</p>	
<p>(7) $\text{QPA } (x_A^{(y)}, a_1, E) = \text{QP}_1$; $\text{QPR } (x'_R^{(y)}, a_1, E) = \text{QPR } (a_1)$.</p>	
<p>(8) $\text{QPA } (x_A^{(y)}, a_2, E) = \text{QP}_2$; $\text{QPR } (x'_R^{(y)}, a_2, E) = \text{QPR } (a_2)$.</p>	
<p>(9) $P_1 = \sum_{y=0}^{a_1} \text{QP}_1 = 1 - \alpha'$; α', risque réel du fournisseur.</p>	
<p>(10) $P_2 = \sum_{y=0}^{a_1} \text{QP}_2 = \beta'$; β', risque réel du client.</p>	
<p>(11) $\sum_{x=0}^{1-x_A^{(a_1)}} \text{QPR } (a_1) = \alpha' = 1 - P_1$.</p>	
<p>(12) $\sum_{x=0}^{1-x_A^{(a_1)}} \text{QPR } (a_2) = 1 - \beta' = 1 - P_2$.</p>	

3 GRAPHIQUE EN P_1 P_2 ET RISQUES REELS.

a) Pour la comparaison du couple des risques réels α' et β' à celui des risques α et β figurant aux données, il est commode d'avoir recours à un graphique ayant pour coordonnées les probabilités d'acceptation P_1 et P_2 ; sur ce graphique – dit, dans la suite, graphique en P_1 et P_2 – toute épreuve E, qu'elle soit E S E ou E S N E, donne lieu à deux points : l'un, soit M, représente les données et a pour coordonnées $1 - \alpha$ et β ; l'autre, soit M', représente les risques réels et a pour coordonnées $1 - \alpha'$ et β' .

b) Deux processus conduisent aux valeurs α' et β' des risques réels d'une épreuve E. Ce sont (figure 2) :

1/ *Processus court*. Pour chaque point d'acceptation, calculer par les formules (5), (7) et (8), les quotes-parts QP_1 et QP_2 correspondantes, puis effectuer les sommes des formules (9) et (10).

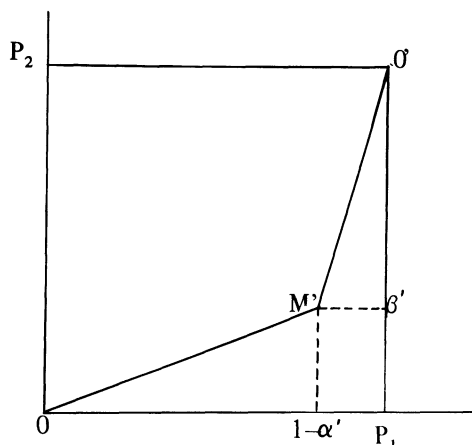


Figure 2 – Résultantes des processus :

- OM' : processus court ;
- $O'M'$: processus long.

Cela revient, sur le graphique en P_1 et P_2 , à porter à partir de l'origine tous les vecteurs de coordonnées finales QP_1 et QP_2 : la somme géométrique de ces vecteurs aboutit au point M' .

2/ *Processus long*. Pour chaque point de rejet, calculer par la formule (6) les quotes-parts $QPR(a_1)$ et $QPR(a_2)$, puis effectuer les sommes des formules (11) et (12).

Cela revient, sur le graphique en P_1 et P_2 , à porter à partir de l'origine les vecteurs de coordonnées finales $QPR(a_1)$ et $QPR(a_2)$ et à en faire la somme géométrique, dont on a à prendre le complément à l'unité pour obtenir une probabilité d'acceptation ; il est plus direct en l'occurrence, de tracer des vecteurs, opposés aux précédents, à partir du point O' opposé à l'origine O , car leur somme géométrique aboutit alors au même point M' que plus haut.

c) Un intérêt du recours au graphique en P_1 et P_2 , est que la pente de tout vecteur représentatif d'un couple de valeurs de quotes-parts, est indépendante de la note N° du point auquel celles-ci se rapportent ; plus précisément, cette pente est égale à la cote $C(x, y)$ de ce point, comme on le vérifie facilement, à partir des formules (2), (5) et (6).

Il s'ensuit, d'après (3) et (4), ceci :

- la pente du vecteur est égale à $\beta/(1 - \alpha)$ si le point est sur A, et à $(1 - \beta)/\alpha$ s'il est sur R (figure 3) ;
- elle est inférieure à $\beta/(1 - \alpha)$ si le point est, par rapport à la courbe A, dans la région des x grands ;
- elle est supérieure à $(1 - \beta)/\alpha$ si le point est, par rapport à la courbe R, dans la région des y grands.

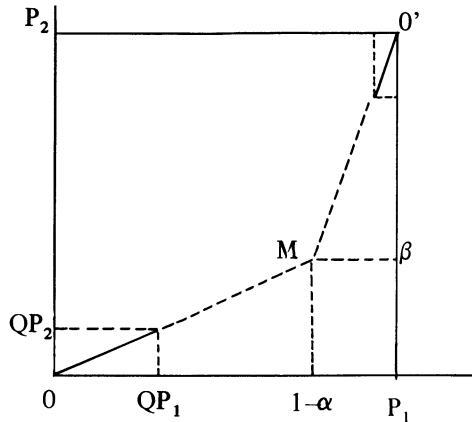


Figure 3 – Vecteurs correspondant à certains points :
 – sur OM : points de la droite A ;
 – sur O' M : points de la droite R.

4 – CAS D'UNE E S N E (Epreuve de Wald).

a) Remarques en rapport avec le graphique en x et y.

1/ La pente t des droites A et R, donnée par (1), dépend uniquement de p_1 et de p_2 .

Inversement, il est aisé de déterminer p_1 et p_2 de manière que t ait telle valeur que l'on désirerait lui voir prendre ; il suffit par exemple de se fixer arbitrairement une valeur de p_2/p_1 , puis de transformer la formule (1) en une relation linéaire en p_1 ou p_2 : voir l'exemple du n°5a.

2/ Lorsque $1/t$ est un nombre entier, les positions des points de sortie, d'ordonnées entières, du plan de l' E S N E, peuvent être précisées ainsi qu'il suit (figure 4) :

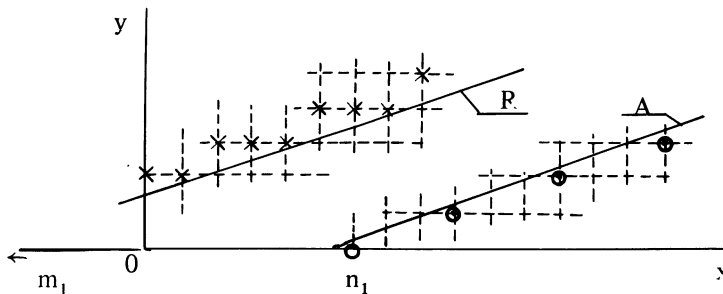


Figure 4 – Points de sortie d'une ESNE à $1/t$ entier ($1/t = 3$)

- Point d'acceptation
- x Point de rejet

– les points d'acceptation sont tous sur la parallèle aux droites A et R coupant l'axe des x en un point dont l'abscisse entière, n_1 , satisfait à :

$$n_o \leq n_1 < n_o + 1 ; \quad (13)$$

– les points de rejet sont tous situés sur une ligne brisée en forme d'escalier régulier, dont les points les plus rentrants des marches (points d'abscisse $x_R^{(y)}$ du c de la figure 1) sont tous – mais sont seuls – sur la parallèle aux droites A et R coupant l'axe des x en un point dont l'abscisse, entière, négative, $-m_1$, satisfait à :

$$m_0 \leq m_1 < m_0 + 1 ; \quad (14)$$

les autres points de rejet appartiennent à la région des y grands par rapport à la dite droite, et, a fortiori, à la droite R.

b) Remarques en rapport avec le graphique en P_1 et P_2 .

Lorsque p_1 et p_2 – et par suite également t – sont fixés, il y a une double infinité d'épreuves possibles, à savoir celles correspondant aux différentes valeurs possibles de α et β , ou, ce qui revient au même d'après (1), de n_0 et m_0 .

Sur le graphique en P_1 et P_2 , les points représentatifs des couples de valeurs α et β auxquels correspondent un seul et même n_0 sont sur la droite issue de O, d'équation :

$$1 - \alpha = \beta \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_2} \right)^{n_0} \quad (15)$$

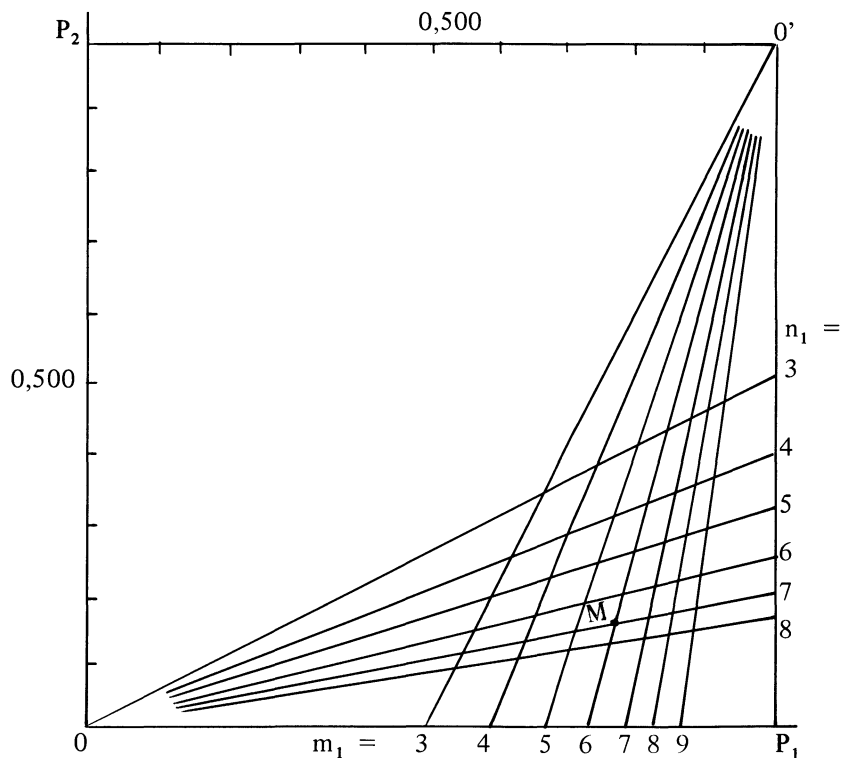


Figure 5 – (Exemple du n° 5) Faisceaux de droites

- à n_0 constant
- à m_0 constant.

On peut donc tracer à partir de O un faisceau de droites, chacune d'elles étant repérée par la valeur de n_0 qui lui correspond.

De même, on peut tracer à partir de O' un faisceau de droites, chacune d'elles étant repérée par la valeur de m_0 qui lui correspond.

La figure 5 représente l'allure des faisceaux en question pour des valeurs entières n_1 et m_1 de n_0 et de m_0 ; ces faisceaux sont d'ailleurs symétriques l'un de l'autre par rapport à la diagonale $P_1 P_2$ perpendiculaire à OO' .

Par ces faisceaux, la surface utile du graphique en P_1 et P_2 se trouve divisée en quadrilatères dont l'un des sommets – à savoir : le sommet intersection des plus grandes valeurs à la fois de n_1 et de m_1 – est, pour la commodité de l'exposé, désigné par "sommet directeur" du quadrilatère ; ainsi M est le sommet directeur du quadrilatère représenté par la figure 6.

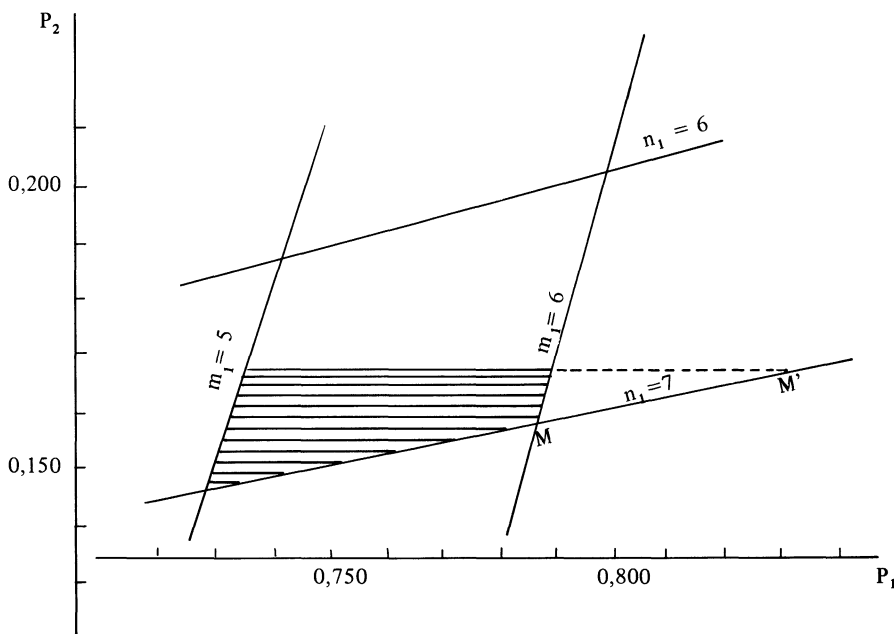


Figure 6 -- (agrandissement partiel de la figure 5) Quadrilatère de sommet directeur M, avec M', point représentatif des risques réels correspondant à l'ensemble du quadrilatère.

Le couple α et β d'une épreuve est réputé appartenir à tel quadrilatère si son point représentatif, de coordonnées $1 - \alpha$ et β , est situé dans ce quadrilatère, ou à la hauteur de celui-ci, sur l'une des droites se rencontrant en son sommet directeur.

c) Premier cas particulier : $1/t$, n_0 et m_0 sont des entiers, connus ; n_0 et m_0 sont par suite désignés par n_1 et m_1 .

Le point représentatif de l'épreuve sur le graphique en P_1 et P_2 est à l'intersection des droites repérées respectivement par les valeurs entières n_1 et m_1 ; soit M ce point (figure 5).

D'autre part, comme tous les points d'acceptation sont sur la droite A (ci-dessus), tous les vecteurs en QP_1 et QP_2 ($n^\circ 3$ ci-dessus) ont pour pente $\beta/(1 - \alpha)$, ce qui est la pente de la droite OM ; finalement le processus court aboutit à reconnaître que le point M' se trouve sur OM .

Pour ce qui est du processus long, une distinction est à faire : ceux des points de rejet qui sont situés sur la droite R donnent lieu chacun à un vecteur d'origine O' et de pente égale, en valeur absolue, à $(1 - \beta)/\alpha$, tandis que les autres points de rejet sont dans la région où l'on a $C(x,y) > (1 - \beta)/\alpha$ et donnent lieu par suite chacun à un vecteur situé dans l'angle $M'O'P_1$ de la figure 3 ; la somme géométrique de tous ces vecteurs se trouve nécessairement dans le même angle.

Le rapprochement des enseignements des deux processus montre (figure 6) que M' est situé sur OM , au delà de M par rapport à O .

En conséquence, dans le cas particulier étudié :

$\alpha' < \alpha$: il n'y a jamais de dépassement de α :

$\beta' > \beta$: il y a toujours dépassement de β .

d) Second cas particulier : $1/t$ est, comme en c , un entier connu ; n_0 et m_0 sont quelconques, connus ; n_1 et m_1 sont les entiers majorant n_0 et m_0 dans les conditions des relations (13) et (14).

Dans les conditions de ce cas particulier, il résulte des remarques du a ci-dessus, qu'à tous les couples α et β appartenant à un même quadrilatère du graphique en P_1 et P_2 correspondent des épreuves qui ont mêmes points de sortie ; par suite aussi, mêmes quotes-parts de probabilités d'acceptation et de rejet ; enfin même couple α' et β' de risques réels.

En particulier, le couple α et β de l'épreuve considérée appartient au quadrilatère dont le sommet directeur M est à l'intersection des droites repérées par n_1 et m_1 ; le couple α' et β' correspondant à cette épreuve est donc celui-là même qui correspond au point M ; c'est finalement le couple représenté par le point M' dont la position sur OM a été précisée à propos du premier cas particulier (c ci-dessus).

En conséquence, dans le cas d'une E S N E à $1/t$ entier :

– il y a dépassement de β , risque du client, chaque fois que le point représentatif du couple α et β de l'épreuve se situe dans la partie ombrée du quadrilatère de la figure 6 ;

– lorsque M' est, comme dans le cas de la figure 6, d'abscisse supérieure à celle de tout point du quadrilatère, il n'y a aucun dépassement de α , risque du fournisseur ; c'est là, semble-t-il, le cas général ; mais il n'est pas démontré que M' ne puisse jamais être tellement près de M que son abscisse soit inférieure à celle de la pointe supérieure du quadrilatère, et s'il en était ainsi, il y aurait dans ce dernier une région de dépassement de α ; mais la pente des droites à m constant, jointe à différents résultats de calcul, donnent à penser qu'il ne pourrait s'agir que d'une très petite région du quadrilatère et d'un très faible dépassement.

e) Cas général.

Le cas général de l'E S N E est joint à celui de l'E S E (n° 6).

5 – EXEMPLES D'E S N E

a) Choix de p_1 et de p_2 . Aux valeurs arbitrairement choisies :

$$1/t = 4 \text{ et } p_2/p_1 = 2,5,$$

correspondent :

$$\lg \frac{1 - p_1}{1 - p_2} = \frac{1}{4} \lg 2,5 = 0,0994850,$$

et par suite

$$p_1 \approx 0,12010 \text{ et } p_2 \approx 0,30025.$$

b) En rapport avec le premier cas particulier (n° 4 c).

1/ Détermination de α et de β rendant entiers n_o et m_o .

Aux valeurs arbitrairement choisies :

$$n_o = 7 \text{ et } m_o = 6,$$

correspondent :

$$\lg (1 - \alpha)/\beta = 7 \times 0,0994850, \text{ d'où } \beta = 0,20119 (1 - \alpha)$$

$$\lg (1 - \beta)/\alpha = 6 \times 0,0994850, \text{ d'où } \beta = 3,95285 (1 - \alpha) - 2,95285,$$

et finalement

$$1 - \alpha = 0,78708, \text{ ou } \alpha = 0,21292, \text{ et } \beta = 0,15835.$$

2/ Détermination des notes N° .

Les calculs du a de la figure 7 ont été conduits jusqu'à $y=7$. Les rapports $N^\circ (x_A^{(y+1)})/N^\circ (x_A^{(y)})$, notées en b de cette figure, montrent la tendance, rapide des N° vers une progression géométrique de raison voisine de 7,1623.

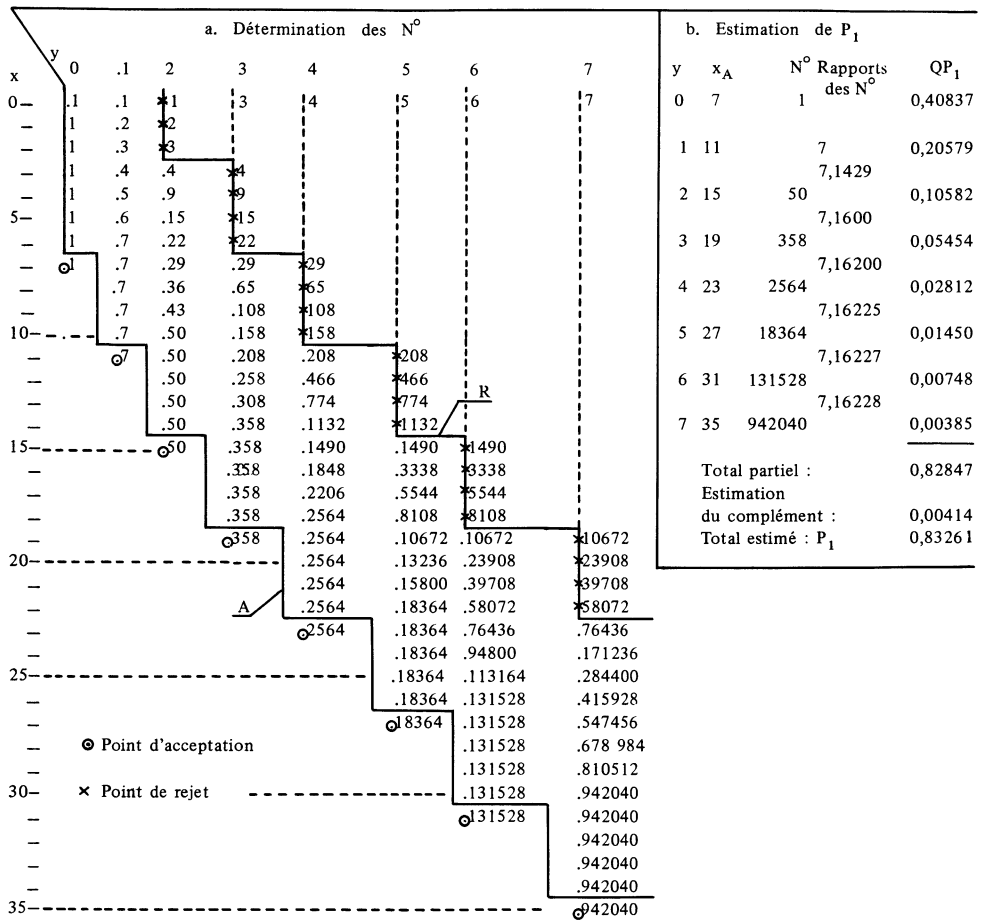


Figure 7 – Calculs divers

3/ Détermination des QP₁.

Les valeurs notées en b de la figure 7 résultent de l'application de la formule (5), compte tenu de ce que :

$$QP_1(x_A^{(0)} = 7) = (1 - p_1)^7 = 0,40837.$$

Remarque est faite que le QP₁ du point $x_A^{(y+1)}$ s'obtient en multipliant celui du point $x_A^{(y)}$, à la fois :

- par la quantité $N^\circ(x_A^{(y+1)})/N^\circ(x_A^{(y)})$ étudiée au 2 ci-dessus ;
- et par la quantité $p_1(1 - p_1)^{1/t}$ qui est indépendante de y, et qui dans le cas présent a pour valeur 0,07199.

Il s'ensuit que les valeurs des QP_1 tendent rapidement à former une progression géométrique de raison :

$$7,1623 \times 0,07199 = 0,5156$$

4/ Détermination des QP_2

Compte tenu de ce que dans le cas particulier considéré tous les points d'acceptation sont sur la droite A elle-même, l'indication du n° 3 c conduit à :

$$QP_2 = QP_1 \times \beta / (1 - \alpha) = 0,20119 QP_1$$

5/ Détermination des risques réels.

Aux 8 premiers points d'acceptation, notés en b de la figure 7, correspond une somme de QP_1 égale à 0,82847, et par suite une somme de QP_2 égale à :

$$0,82847 \times 0,20119 = 0,16668,$$

déjà supérieure à $\beta = 0,15835$ (1 ci-dessus).

Les points d'acceptation d'ordonnée supérieure à 7 ont sur la somme des QP_1 une répercussion que l'on peut estimer égale à la somme des termes d'une progression géométrique, de raison 0,5156, commençant aussitôt après le terme correspondant à $y = 7$, soit 0,00385.

Cette répercussion serait donc égale à :

$$0,00385 \times 0,5156 / (1 - 0,5156) = 0,00414.$$

D'où les estimations :

$$1 - \alpha' \approx 0,82847 + 0,00414 = 0,83261 \text{ et } \alpha' \approx 0,16739 ;$$

$$\beta' \approx 0,83261 \times 0,20119 = 0,16751.$$

6/ Conclusion. Le rapprochement des estimations précédentes et des valeurs du 1 ci-dessus, soit :

$$\alpha = 0,21292 \text{ et } \beta = 0,15835,$$

montre que l'on a bien :

$$\alpha' < \alpha \text{ et } \beta' > \beta.$$

Le dépassement du risque du client est de 5,8 %.

c) En rapport avec le second cas particulier (n° 4d).

1/ Des calculs analogues à ceux du 1 du b ci-dessus ont permis d'établir, sur le graphique en P_1 et P_2 , les deux faisceaux de droites de la figure 5 ; la figure 6 représente le quadrilatère à l'intérieur duquel se trouvent tous les points

représentatifs des couples de risques α et β qui, pour le calcul des risques réels, sont uniformément remplacés par le couple dont le point représentatif est à l'intersection des droites repérées par $n = 7$ et $m = 6$, c'est-à-dire par le couple du 1 du b ci-dessus.

A ces valeurs de α et β correspondent les risques réels dits au 5 du b ci-dessus, et, par suite, le point M' de la figure 6.

A partir de la position de M' , on établit que ceux des points du quadrilatère pour lesquels il y a dépassement du risque du client (partie ombrée de la figure) couvrent environ 37 % de la surface totale du quadrilatère, et que, compte tenu de ce que la pointe basse du quadrilatère est à $\beta = 0,1466$, le dépassement de β peut atteindre 14 %.

2/ Quelques valeurs de α et de β , résultats des calculs dits au 1 ci-dessus, sont notées dans la figure 8, à l'intérieur des petits rectangles disposés à l'intersection des valeurs de n_0 et de m_0 auxquelles elles correspondent.

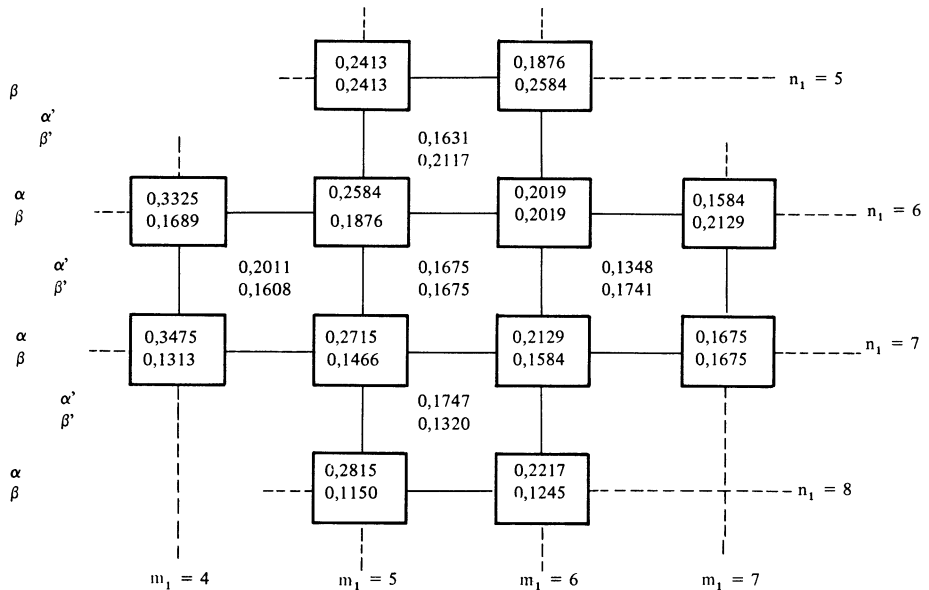


Figure 8

Sont également notées les valeurs de α' et de β' à comparer directement aux valeurs de α et de β des petits rectangles qui les entourent.

Dans tous les cas pouvant ainsi être considérés, des dépassements de β de l'ordre de 14 % sont possibles.

6 – CAS GENERAL ET CONCLUSIONS.

a) Le cas d'une E S N E où p_1 et p_2 ne rendent pas $1/t$ entier, et le cas d'une E S E quelconque, paraissent ne pas pouvoir faire l'objet d'une discussion comparable à celle du n° 4 ; mais les renseignements acquis permettent d'avancer avec certitude les considérations suivantes, toutes en rapport avec le graphique en P_1 et P_2 .

1/ Les vecteurs des quotes-parts QP_1 et QP_2 sont tous de pentes au plus égales à $\beta/(1 - \alpha)$.

2/ Les vecteurs des quotes-parts $QPR(a_1)$ et $QPR(a_2)$ sont tous de pentes au moins égales, en valeurs absolues, à $(1 - \beta)/\alpha$.

3/ Le point commun d'aboutissement des sommes géométriques de ces deux séries de vecteurs – c'est-à-dire, le point de coordonnées $1 - \alpha'$ et β' – se trouve nécessairement, d'après 1 et 2, dans l'une des trois régions hachurées de la figure 9 ; suivant qu'il se trouve dans la région des hâchures horizontales, obliques ou verticales, il y a dépassement de α , respect de α et de β ou dépassement de β .

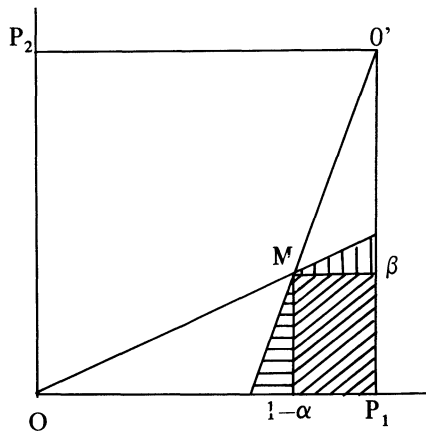


Figure 9 – Zones éventuelles du point $M'(1 - \alpha', \beta')$

4/ Dans le second cas particulier (n° 4 d), il a été fait état de quadrilatères dont tous les points intérieurs définissent les couples α et β justiciables d'une même épreuve, c'est-à-dire correspondant à de mêmes séries de points de sortie ; dans le cas général existe certainement au voisinage du point représentatif de α et β , une zone, dont la forme est un cas d'espèce, jouant le même rôle que la surface d'un tel quadrilatère ; du fait de l'existence de cette zone, les éventualités de dépassement des risques se trouvent renforcées.

b) Exemples numériques.

1/ Des exemples relatifs à des E S N E sont donnés au n° 5,

2/ Cas de l' E S E ayant pour données :

$N = 100$; $a_1 = 4$ et $\alpha = 0,0500$; $a_2 = 8$ et $\beta = 0,1000$.

Le calcul conduit à :

$\alpha' = 0,0079$ et $\beta' = 0,1005$.

Il y a un léger dépassement de β .

3/ Cas de l' E S E ayant pour données :

$N = 50$; $a_1 = 6$ et $\alpha = 0,340$; $a_2 = 16$ et $\beta = 0,093$

avec plus précisément :

$\lg(1 - \alpha)/\beta = 0,8508$ et $\lg(1 - \beta)/\alpha = 0,4261$.

Le calcul conduit à :

$\alpha' = 0,2033$ et $\beta' = 0,1050$.

Le dépassement de β est de près de 13 %.

4/ Des calculs faits à partir de données choisies comme paraissant particulièrement susceptibles de donner lieu à dépassement de α , n'ont conduit à constater aucun dépassement de l'espèce.

c) Les importances relatives des régions hachurées sur la figure 9, les enseignements des cas particuliers étudiés, et ceux des exemples exposés, conduisent aux conclusions suivantes :

1/ Sans doute les épreuves séquentielles exhaustive et non-exhaustive respectent-elles le plus généralement les risques figurant aux données, mais un dépassement, parfois notable de β , risque du client, est toujours à craindre ; si, d'autre part, l'on ne peut pas exclure le cas où il y aurait dépassement de α , risque du fournisseur, du moins son éventualité paraît-elle fort improbable, et son importance pratique ne pourrait être que très faible.

2/ Si l'on veut pouvoir garantir les risques figurant aux données d'une épreuve, il convient de déterminer l' E S E ou l' E S N E correspondant à ces données, puis de calculer les risques réels de cette épreuve, et enfin, si des dépassements apparaissent, d'agir en conséquence par des retouches convenables du plan de l'épreuve.

Ces calculs doivent normalement être l'occasion :

– en cas d' E S N E, de déterminer de façon judicieuse la troncature qui s'impose en tout état de cause ;

– en cas d' E S E, d'ajuster le plan d'épreuve aux données de façon telle que les effectifs d'échantillon soient réduits jusqu'à des valeurs encore plus faibles que celles, déjà très faibles, assurées par l' E S E avant toute retouche ; le [8] indique comment procéder.

7 – BIBLIOGRAPHIE

Wald, dans [1], a donné la théorie de l'E S N E, qui est devenue classique, et aussi, sans la développer, la formule de base de l'E S E.

G. Panizzon [2] a montré comment il était possible de mettre en oeuvre cette formule soit par calculs directs, à la vérité assez laborieux, soit en s'aidant de machines.

Nous-même avons d'abord (voir [3], [4] et [5]) été préoccupé de rétablir la formule de Wald relative à l'E S E, puis nous avons voulu rendre véritablement opérationnelle la détermination d'un plan d'E S E, même en l'absence de machines ; d'où les Tables [6] grâce auxquelles cette détermination se réduit à un très petit nombre d'additions simples, tandis que plus de 300 plans d'E S N E étaient entièrement calculés.

Dans [7], la question particulière de la détermination de la note $N^\circ(x,y)$ d'un point a été largement développée.

A paraître, une note [8] traitant en particulier de l'ajustement de l'E S E aux risques α et β , figurant aux données.

- [1] WALD A – Sequential Analysis. John Wiley and Sons, N.Y., édition de 1952.
- [2] PANIZZON Gaetano. – Controllo sequenziale esaustivo per attributi. *Statistica XXVI*, n° 2, 1966.
- [3] DUMAS Maurice. – Epreuve économique permettant de choisir entre deux hypothèses. C.R. de l'A.S., Paris 1953. t.237 et 238.
- [4] DUMAS Maurice. – L'épreuve séquentielle exhaustive. *Revue de Statistique Appliquée*. Paris, *XVII*, 1 (1969) et *XVIII*, 2 (1970).
- [5] DUMAS Maurice. – Epreuve séquentielle exhaustive. C.R. du congrès de l'ISI, Londres 1969.
- [6] DUMAS Maurice. – Tables commentées des épreuves séquentielles exhaustive et non-exhaustive. *Sciences et Techniques de l'Armement (Mémorial de l'Artillerie Française)* Paris, Fasc. 1 de 1971, puis Dunod éditeur, Paris 1971.
- [7] DUMAS Maurice. – Dénombrement de cheminements. *Revue de Statistique Appliquée*. Paris, *XXI*, 3 (1973).
- [8] DUMAS Maurice. – Epreuves les plus économiques assurant un contrôle de fabrication. *Sciences et Techniques de l'Armement*. A paraître.