REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

DAVID SROUR

Sur quelques estimateurs du paramètre d'un processus poissonien selon que le nombre d'observations est tronqué ou non

Revue de statistique appliquée, tome 20, n° 4 (1972), p. 63-83

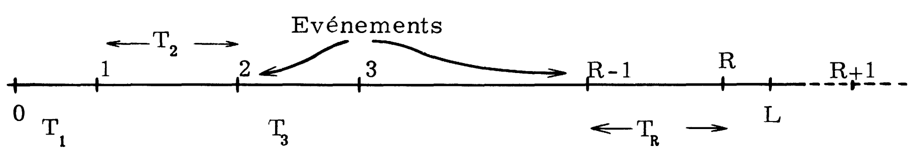
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1972__20_4_63_0>

SUR QUELQUES ESTIMATEURS DU PARAMÈTRE D'UN PROCESSUS POISSONIEN SELON QUE LE NOMBRE D'OBSERVATIONS EST TRONQUE OU NON

David SROUR

1 - INTRODUCTION

On considère une suite d'évènements obéissant à un processus de Poisson que l'on observe pendant une durée L finie. Si R désigne le nombre aléatoire d'évènements sur $[0, L]$, on sait que cette variable possède une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{L}{\theta}$ où θ est le paramètre de la loi exponentielle de densité $\frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$ $(t>0)$ suivie par les intervalles aléatoires T_i de temps écoulés entre deux évènements successifs



Cet article se propose d'analyser un certain nombre d'estimateurs de θ basés soit sur R soit sur $\overline{T} = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_R}{R}$ temps moyen écoulé entre deux évènements successifs, calculé à l'aide des intervalles T_i en nombre aléatoire R.

La variable aléatoire $\overline{T}$ n'est définie que s'il se passe au moins un évènement avant L et nous serons par conséquent amenés à considérer le cas où R est tronqué de la valeur zéro (3ème partie de cet article).

Pour la suite, il conviendra de noter que la statistique R est exhaustive pour θ et totale.

Le premier résultat s'obtient en montrant que la distribution de

$$(T_1, T_2, \ldots\ldots, T_R)$$

conditionnée par R est indépendante de θ :

$$\text{Prob}\ [T_i \in [t_i,\ t_i + dt_i],\ i = 1,\ 2,\ ..,\ R/R = r\ ] = \tag{1.1}$$
$$= \frac{\text{Prob}\ [T_i \in [t_i,\ t_i + dt_i],\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ r\ ;\ T_{r+1} > L - \sum_1^r t_i]}{e^{-\lambda}\lambda^r/r!}$$

Les variables aléatoires T_i, $i = 1, 2, \dots, r + 1$ étant mutuellement indépendantes le numérateur de l'expression ci-dessus s'écrit :

$$\theta^{-r-1} \cdot e^{-\sum_1^r t_i/\theta} \int_{L-\sum_1^r t_i}^{\infty} e^{-x/\theta} dx. \prod_{i=1}^r dt_i = e^{-\lambda}\theta^{-r} \prod_{i=1}^r dt_i$$

D'où la distribution conditionnelle de $(T_1, T_2, \dots, T_R)$

$$\text{Prob}\ [T_i \in [t_i,\ t_i + dt_i],\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ R/R = r] = r!\ L^{-r} \prod_{i=1}^r dt_i \tag{1.2}$$

indépendante de θ.

Quant à la totalité de R, il faut pour l'établir, montrer que toute fonction f(R) d'espérance nulle quel que soit $\theta > 0$ est identiquement nulle :

$$\forall f\ ;\ E\ [f(R)] = 0\ \forall \theta > 0 \Rightarrow f \equiv 0 \tag{1.3}$$

Or si $E\ [f(R)] = 0$ pour tout θ, on a $\sum_{r \geqslant 0} f(r)\ e^{-\lambda}\ \lambda/r! = 0\ \forall \lambda \geqslant 0$ soit pour $\lambda = 0$, $f(0) = 0$.

De même en écrivant que la dérivée terme à terme d'ordre i de la série entière en λ $\sum_{r \geqslant 0} f(r)\ \lambda^r/r!$ est nulle pour $\lambda = 0$ (cette série est en effet uniformément convergente $\forall \lambda$), on a $f(i) = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$ On en déduit donc bien que f est identiquement nulle et que R est totale.

2 - CAS OU R PEUT PRENDRE LA VALEUR "ZERO"

2.1 - Estimateur L/R

On sait que R est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ; la fonction L/λ de λ étant biunivoque, on en déduit que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est L/R mais on notera qu'il est d'espérance infinie. Il n'existe d'ailleurs aucun estimateur sans biais de θ qui, à une constante multiplicative près, est l'inverse du paramètre d'une distribution poissonienne [Réf. 1, page 34].

Par contre, la statistique R/L, estimateur du maximum de vraisemblance de $1/\theta$, en constitue un estimateur optimal, en ce sens qu'elle est de variance minimale, dans la classe des estimateurs sans biais

$$E\ (R/L) = \frac{\lambda}{L} = \frac{1}{\theta} \tag{2.1}$$

$$V\ (R/L) = \frac{\lambda}{L^2} = \frac{1}{\theta L} \tag{2.2}$$

Ce résultat découle directement du fait que R est exhaustive et totale.

Montrons comment l'on peut trouver pour L grand un intervalle de confiance de niveau $1 - 2\alpha$ pour θ.

La variable R suivant une loi de Poisson de paramètre L/θ, on sait que $\frac{R - L/\theta}{\sqrt{L/\theta}}$ converge en loi vers la distribution normale centrée réduite $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Par ailleurs, R/L convergeant en probabilité vers $1/\theta$, on en déduit que $\frac{R - L/\theta}{\sqrt{L}.\sqrt{R/L}}$ c'est-à-dire, $\frac{R - L/\theta}{\sqrt{R}}$ converge en loi vers $\mathfrak{N}(0, 1)$.

Si $u_{1-\alpha}$ désigne la valeur ayant la probabilité α d'être dépassée par la variable $\mathfrak{N}(0, 1)$, on a :

$$\text{Prob}\left[\frac{R - L/\theta}{\sqrt{R}} \in [-u_{1-\alpha}, u_{1-\alpha}]\right] = 1 - 2\alpha \tag{2.3}$$

et l'intervalle de confiance pour θ de longueur minimale dans la classe des intervalles asymptotiques de niveau $1 - 2\alpha$ est donné par :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{R}\,(\sqrt{R} + u_{1-\alpha})} ; \frac{1}{\sqrt{R}\,(\sqrt{R} - u_{1-\alpha})}\right] \tag{2.4}$$

L'estimateur L/R ne permettant pas une estimation finie de θ quand R est nul, on étudie par la suite l'estimateur $L/(R + 1)$ couramment utilisé dans les problèmes de fiabilité [Réf. 2].

2.2 - Estimateur L/(R + 1)

Déterminons les caractéristiques de $L/(R + 1)$ qui selon la valeur de R, prend les valeurs L, $\frac{L}{2}$, $\frac{L}{3}$, etc...

$$E\left(\frac{L}{R + 1}\right) = L\, e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{(r + 1)!} = \theta\, e^{-\lambda} (e^{\lambda} - 1) \text{ soit}$$
$$E\left(\frac{L}{R + 1}\right) = \theta\,(1 - e^{-\lambda}) \tag{2.5}$$

Le moment de second ordre de cet estimateur s'écrit :

$$E\left(\frac{L^2}{(R + 1)^2}\right) = L\, e^{-\lambda} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{(r + 1)\,(r + 1)!} = \theta\, L\, e^{-\lambda}\, S(\lambda) \text{ avec } S(\lambda) \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r.r!}$$

Dans l'annexe 1, on démontre que si $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{e^x}{x} dx$ est l'intégrale exponentielle tabulée, on a :

$S(\lambda) = I(\lambda) - C - \text{Log}\,\lambda$ où C est la constante d'Euler égale à 0, 5772. (2.6)

On trouve par conséquent :

$$V\left(\frac{L}{R+1}\right) = \theta L e^{-\lambda} S(\lambda) - \theta^2 (1 - e^{-\lambda})^2$$
$$= \theta^2 e^{-\lambda} [\lambda(I(\lambda) - C - \text{Log}\lambda) - 2 (\text{ch}\, \lambda - 1)] \qquad (2.7)$$

où ch λ est le cosinus hyperbolique de λ, égal à $(e^{\lambda} + e^{-\lambda})/2$.

Notons enfin que le biais relatif de $\frac{L}{R+1}$, que nous définirons par

$\frac{E(L/(R+1)) - \theta}{\theta}$, s'écrit :

$$\text{B.R.}\ (L/(R+1)) = -e^{-\lambda} \qquad (2.8)$$

et que c'est une fonction de λ négative et croissante, variant de -1 à 0 (cf. plus bas § 2.3).

Pour les mêmes raisons que précédemment, $L/(R+1)$ est l'estimateur optimal de la fonction $\theta\,(1 - e^{-L/\theta})$ du paramètre θ (sans biais et de variance minimale).

Montrons comment l'on peut trouver pour θ un intervalle de confiance de niveau au moins égal à $1 - 2\alpha$.

Cette procédure est basée sur le fait que si $\mathcal{P}(\lambda)$ est une variable de Poisson de paramètre λ et χ^2_n une variable distribuée comme un χ^2 à n degrés de liberté, on a :

$$\text{Prob}\ (\mathcal{P}(\lambda) < x) = \text{Prob}\ (\chi^2_{2x} > 2\lambda) \quad \forall\, x \text{ entier positif.} \qquad (2.9)$$

Soit $[\lambda_1, \lambda_2]$ l'intervalle de confiance pour λ ; on doit avoir si r est l'observation de R :

$$\text{Prob}\ (R \leqslant r/\lambda = \lambda_2) \leqslant \alpha \qquad (2.10)$$

$$\text{Prob}\ (R > r/\lambda = \lambda_1) \leqslant \alpha \qquad (2.10)$$

D'où d'après (2.9) l'intervalle de confiance pour λ de niveau au moins égal à $1 - 2\alpha$:

$$\left[\frac{1}{2}\chi^2_{2r,\alpha},\ \frac{1}{2}\chi^2_{2r+2,1-\alpha}\right]$$

où l'on désigne par $\chi^2_{n,1-\alpha}$ la valeur ayant la probabilité α d'être dépassée par une variable χ^2_n.

On a alors l'intervalle

$$\left[\frac{2L}{\chi^2_{2R+2,1-\alpha}}\ ;\ \frac{2L}{\chi^2_{2R,\alpha}}\right] \qquad (2.11)$$

recouvrant θ avec une probabilité $\geqslant 1 - 2\alpha$.

Dans le paragraphe 3, où R sera tronqué de la valeur zéro (R sera alors noté R^*) nous seront amenés à comparer L/R^* et $L/(R^* + 1)$ en tant qu'estimateurs de θ. Cela justifie que dans le cadre du § 2, nous étudiions la statistique $L/(R + 2)$ et tel est l'objet du sous-paragraphe 2.3 ci-dessous. On y verra cependant que $L/(R + 2)$ n'a pas d'intérêt propre en tant qu'estimateur de θ.

2.3 - Estimateur L/(R + 2)

Cet estimateur qui, selon la réalisation r de R, prend les valeurs L/2, L/3, etc... possède l'espérance mathématique suivante :

$$E(L/(R + 2)) = L e^{-\lambda} \sum_0^{\infty} \frac{(r + 1)\lambda^r}{(r + 2)!}$$

Posons :

$$A(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{(r + 1)\lambda^r}{(r + 2)!} = \frac{dB(\lambda)}{d\lambda}$$

avec

$$B(\lambda) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{(r + 2)!} = \frac{(e^{\lambda} - 1 - \lambda)}{\lambda}$$

On trouve :

$$A(\lambda) = \frac{\lambda e^{\lambda} - e^{\lambda} + 1}{\lambda^2} \text{ et par conséquent :}$$

$$E(L/(R + 2)) = \theta\left(1 - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}\right) \tag{2.12}$$

et

$$B.R.(L/(R + 2) = - \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \tag{2.13}$$

fonction de λ négative et croissante variant de -1 à 0.

On montre facilement que l'on a :

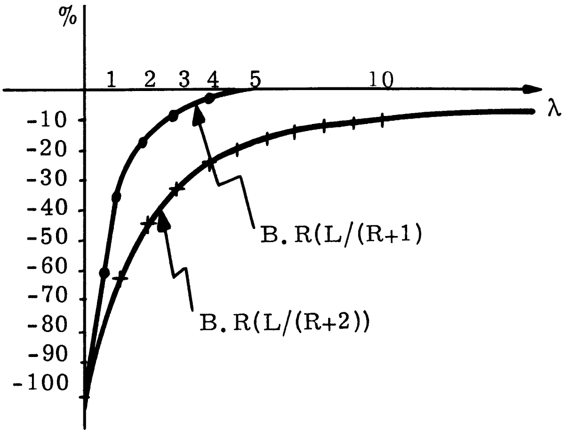
$$|B.R.(L/(R + 1)| < |B.R.(L/(R + 2)| \; \forall \lambda > 0 \tag{2.14}$$

et la configuration graphique est la suivante : (voir page...)

λ	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	10	20	∞
B.R. (L/(R + 1))	-60,7	-36,8	-13,5	- 5,0	- 1,8	- 0,7	0,0	0,0	0
B.R. (L/(R + 2))	-79,0	-63,0	-43,5	-31,6	-24,5	-19,8	-10	-5	0

Biais relatifs en % selon les valeurs de λ

Si l'on se limite à un critère "biais", l'estimateur $L/(R + 1)$ sera donc toujours préféré à l'estimateur $L/(R + 2)$.



La statistique R étant exhaustive et totale, $L/(R+2)$ est l'estimateur optimal de $\theta\left(1 - \frac{\theta\,(1 - e^{-L/\theta})}{L}\right)$ et sa variance se calcule comme suit :

$$E\left(L^2/(R+2)^2\right) = L^2 e^{-\lambda} \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!\,(r+2)^2} = L^2 e^{-\lambda} \frac{d}{d\lambda}\left[\sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+2)\,(r+2)!}\right]$$

On trouve facilement $E\left(L^2/(R+2)^2\right) = \theta^2 e^{-\lambda}(\lambda S'(\lambda) - S(\lambda))$ ou $S'(\lambda)$ est la dérivée de $S(\lambda)$ (cf. 2.6).

D'où :

$$E\left(L^2/(R+2)^2\right) = \theta^2 e^{-\lambda}\,(e^{\lambda} - 1 - I(\lambda) + C + \mathrm{Log}\,\lambda) \text{ et}$$
$$V\,(L/(R+2)) = \theta^2 e^{-\lambda}(e^{\lambda} - 1 - I(\lambda) + C + \mathrm{Log}\,\lambda) - \theta^2\,(e^{-\lambda}+\lambda-1)\,/\lambda^2$$

soit après quelques simplifications :

$$V\,(L/(R+2)) = \theta^2 e^{-\lambda}\left[\frac{2}{\lambda^2}(1-\mathrm{ch}\lambda) + \frac{2}{\lambda}\,(e^{\lambda} - 1) - I(\lambda) + \mathrm{Log}\,\lambda + (C - 1)\right] \tag{2.15}$$

On peut couramment admettre en pratique que L est choisi, de façon qu'il se passe au moins un évènement ; cela correspond à tronquer R de la valeur zéro, cas dont l'analyse est faite ci-dessous.

3 - CAS OU R EST TRONQUEE DE LA VALEUR ZERO

On suppose dans la suite que le nombre d'observations sur $[0, L]$ ne peut être nul ; cette variable sera notée R^* et possède la distribution

$$P(R^* = r) = \frac{\lambda^r}{r!\,(e^\lambda - 1)},\quad r = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.1}$$

(loi de Poisson de paramètre λ tronquée de la valeur 0)

dont les caractéristiques peuvent être facilement trouvées

$$E(R^*) = \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}} \text{ et} \tag{3.2}$$

$$V(R^*) = \frac{\lambda\,(1 - e^{-\lambda}\,(1 + \lambda)}{(1 - e^{-\lambda})^2} \tag{3.2}$$

Cela revient à prendre pour densité du premier intervalle de temps T_1 ; non plus $\frac{1}{\theta}\, e^{-t/\theta}$(pour $t > 0$) mais

$$\frac{1}{\theta\,(1 - e^{-\theta})}\, e^{-t/\theta} \text{ (pour } 0 < t \leqslant L), \tag{3.3}$$

la distribution des T_i ($i = 2, 3, \ldots, R$) restant inchangée.

On remarquera que les propriétés d'exhaustivité et de totalité pour R^* sont conservées ; de même qu'en (1.1) en effet :

$$\begin{aligned} \text{Prob}\,[T_i \in [t_i, t_i + dt_i],\ i = 1, 2, \ldots R/R = r] &= \frac{\dfrac{e^{-\lambda}\theta^{-r}\prod_{i=1}^{r} dt_i}{(1 - e^{-\lambda})}}{\lambda^r / r!\,(e^\lambda - 1)} \\ &= r!\, L^{-r} \prod_{i=1}^{r} dt_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

indépendante de θ.

Conformément à la relation (1.3) on montre de même que

$$\forall\, f \text{ telle que } E\,[f(R^*)] = \frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r \geqslant 1} \frac{f(r)\,\lambda^r}{r!} = 0\ \forall\, \lambda > 0, \text{ alors } f = 0 \tag{3.5}$$

3.1 - Estimateur L/R^*

La statistique L/R^* est maintenant l'estimateur du maximum de vraisemblance de la fonction $\theta\,(1 - e^{-L/\theta})$. Pour l'observation r de R^* ($r \geqslant 1$), la vraisemblance de θ s'écrit en effet $\mathcal{L}(\theta) = \lambda^r/r!\,(e^\lambda - 1)$ et l'on a

$$\frac{\delta \operatorname{Log} \mathcal{L}(\theta)}{\delta\theta} = \frac{d\lambda}{d\theta}\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}\right) \tag{3.6}$$

R^* est donc l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\lambda/(1 - e^{-\lambda})$ et L/R^* celui de $\theta\,(1 - e^{-L/\theta})$.

Quant à l'estimation θ_r du maximum de vraisemblance de θ, elle s'obtient par résolution de l'équation (3.7) [Réf. 3]

$$\theta_r\,(1 - e^{-L/\theta_r}) = L/r \text{ (r observé, supérieur ou égal à 1)} \tag{3.7}$$

Compte tenu des propriétés d'exhaustivité et de totalité de la statistique R^* rappelée ci-dessus, on trouve facilement que R^*/L et L/R^* sont les estimateurs optimaux (sans biais et de variance minimale) des fonctions

$$\frac{1}{\theta(1 - e^{-L/\theta})} \text{ et } \frac{L\,S(L/\theta)}{(e^{L/\theta} - 1)}$$

respectivement.

On a en effet ;

$$E\ (R^*/L) = \frac{1}{L} \sum_{1}^{\infty} \frac{r\,\lambda^r}{r!\ (e^{\lambda} - 1)} = \frac{1}{\theta\ (1 - e^{-L/\theta})} \tag{3.8}$$

$$E\ (L/R^*) = \frac{L}{(e^{\lambda} - 1)} \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r\ r!} = \frac{L\,S(L/\theta)}{(e^{L/\theta} - 1)} \quad \text{(cf. 2.6)} \tag{3.9}$$

et le biais relatif de L/R^* considéré comme estimateur de θ s'écrit

$$\text{B.R.}\ (L/R^*) = \frac{\lambda S(\lambda)}{e^{\lambda} - 1)} - 1 \tag{3.10}$$

Quant aux variances des 2 estimateurs ci-dessus, elles s'expriment après calcul des moments du 2ème ordre ; on trouve :

$$E\ (R^{*2}/L^2) = \frac{\lambda\ (1 + \lambda)}{L^2\ (1 - e^{-\lambda})} \tag{3.11}$$

et

$$V\ (R^*/L) = \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda}\ (1 + \lambda))}{L^2\ (1 - e^{-\lambda})^2}\ , \tag{3.12}$$

$$E\ (L^2/R^{*2}) = \frac{L^2}{(e^{\lambda} - 1)}\ \Sigma\ (\lambda) \tag{3.13}$$

et

$$V\ (L/R^*) = \frac{L^2}{(e^{\lambda} - 1)^2} \left[e^{\lambda} - 1)\ \Sigma\ (\lambda) - S^2(\lambda)\right] \tag{3.14}$$

avec

$$\Sigma\ (\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r^2\,r!} = \int_0^{\lambda} \frac{S(x)}{x}\,dx = \int_0^{\lambda} \frac{dx}{x} \left[\int_{-\infty}^{x} e^y \frac{dy}{y} - C - \operatorname{Log} x\right] \tag{3.15}$$

L'optimalité des estimateurs ci-dessus peut d'ailleurs être vérifiée en montrant que leur variance atteint la borne inférieure de Cramer-Rao. Ainsi pour l'estimateur R^*/L, par exemple, il faudrait montrer que $V(R^*/L)$ donnée par (3.12) est égale à $[g'(\lambda)]^2/\mathcal{I}\ (\lambda)$ où $\mathcal{I}\ (\lambda)$ est la quantité d'information en λ et $g'(\lambda)$ la dérivée par rapport à λ de $E(R^*/L) = g(\lambda)$.

On trouvera facilement :

$$[g'(\lambda)]^2 = \frac{[1 - e^{-\lambda}\ (1 + \lambda)]^2}{L^2\ (1 - e^{-\lambda})^4} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{I}(\lambda) = - E \left(\frac{\delta^2}{\delta\lambda^2}(R^* \operatorname{Log}\lambda - \operatorname{Log}(e^\lambda - 1))\right) = E\left(\frac{R^*}{\lambda^2}\right) - \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda(1 - e^{-\lambda})} - \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2} = \frac{e^\lambda - \lambda - 1}{\lambda(1 - e^{-\lambda})(e^\lambda - 1)} \tag{3.17}$$

et

$$\frac{g'(\lambda)^2}{\mathcal{I}(\lambda)} = \frac{\lambda(1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda))}{L^2 (1 - e^{-\lambda})^2} \tag{3.18}$$

même expression que la variance de R^*/L dans (3.12).

De même que dans le paragraphe 2.1, montrons comment l'on peut trouver un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - 2\alpha$, non plus pour mais pour $\theta(1 - e^{-L/\theta})$.

La fonction caractéristique $\varphi_{R^*}(t)$ s'écrit :

$$\varphi_{R^*}(t) = \frac{1}{e^\lambda - 1}\sum_{r\geqslant 1}\frac{(\lambda e^{it})^r}{r!} = \frac{e^{\lambda e^{it}} - 1}{e^\lambda - 1} \tag{3.19}$$

et permet d'aboutir à la fonction caractéristique de la variable centrée réduite

$$R_c^* = \frac{R^* \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}}{\sqrt{\frac{\lambda(1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda))}{(1 - e^{-\lambda})^2}}}$$

$$\varphi_{R_c^*}(t) = \frac{e^{\frac{it\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1-e^{-\lambda}(1+\lambda)}}}}{(e - 1)} \left[e^{\lambda e^{\frac{it(1-e^{-\lambda})}{\sqrt{\lambda(1-e^{-\lambda}(1+\lambda))}}}} - 1 \right] \tag{3.20}$$

qui pour λ grand tend vers $e^{-t^2/2}$, fonction caractéristique de la variable $\mathcal{N}(0,1)$ (passer à la deuxième fonction caractéristique, isoler parties réelle et imaginaire et effectuer les développements limités appropriés).

La variable R_c^* convergeant en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ et L/R^* estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta(1 - e^{L/\theta})$ convergeant vers cette fonction du paramètre, on en déduit que :

$$\frac{R^* - \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}}{\sqrt{R^*\left(1 - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}\right)}}$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$ (écrire R_c^* sous la forme

$$\frac{R^* - \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}}{\sqrt{\frac{L\left(1 - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}\right)}{\theta (1 - e^{-\lambda})}}}$$

et substituer L/R^* à $\theta (1 - e^{-\lambda})$ au dénominateur).

L'expression $\mathscr{E}\tau (\lambda) = \lambda e^{-\lambda}/ (1 - e^{-\lambda})$ tendant vers zéro pour λ infini, on en déduit alors que la variable aléatoire

$$\frac{R - \frac{\lambda}{1 - e^{-\lambda}}}{\sqrt{R^*}}$$

converge aussi en loi vers $\mathscr{N} (0,1)$.

Par rapport au § 2.1, tout se passe donc comme si $\theta (1 - e^{-L/\theta})$ se substituait à θ et l'intervalle

$$\left[\frac{L}{\sqrt{R^*} \left(\sqrt{R^*} + u_{1-\alpha}\right)} \quad ; \quad \frac{L}{\sqrt{R^*} \left(\sqrt{R^*} - u_{1-\alpha}\right)} \right] \tag{3.21}$$

est l'intervalle de confiance pour $\theta (1 - e^{-L/\theta})$ de longueur minimale dans la classe des intervalles asymptotiques de niveau $1 - 2\alpha$.

Comparativement au § 2.1 (Cf. relations (2.1) et (2.2), on peut se poser le problème de trouver un estimateur optimal pour $1/\theta$. Tel est l'objet du paragraphe suivant.

3.2 - Estimateur optimal de $1/\theta$

La relation (3.8) permet de trouver rapidement cet estimateur que nous noterons U/L. En posant :

$$E (U/L) = \frac{1}{\theta} \tag{3.22}$$

on voit que $E\left(\frac{U}{L}\right) = E\left(\frac{R^*}{L}\right) - \frac{\lambda e^{-\lambda}}{L (1 - e^{-\lambda})}$ et comme $\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$ n'est autre que la masse de R^* au point 1, il suffira d'ôter du champ possible le cas $R^* = 1$.

L'estimateur sans biais de variance minimale de $1/\theta$ sera donc :

$$\frac{U}{L} = \begin{cases} 0 \text{ si } R^* = 1 \\ \frac{R^*}{L} \text{ si } R^* \geqslant 2 \end{cases} \tag{3.23}$$

et sa variance se détermine comme suit :

$$\begin{aligned} E (U^2/L^2) &= \frac{1}{L^2 (e^{\lambda} - 1)} \sum_{r \geqslant 2} \frac{r^2 \lambda^r}{r!} = \frac{\lambda}{L^2 (e^{\lambda} - 1)} \sum_1^{\infty} \frac{(s + 1) \lambda^s}{s!} \\ &= \frac{\lambda}{L^2 (e^{\lambda} - 1)} (e^{\lambda} - 1 + \lambda e^{\lambda}) \end{aligned} \tag{3.24}$$

et par conséquent

$$V(U/L) = \frac{\lambda}{L^2}\left(1 + \frac{\lambda}{e^{\lambda} - 1}\right) \qquad (3.25)$$

3.3 Estimateur optimal de $1 - e^{-L/\theta}$

Les estimateurs optimaux de $1/\theta$ et de $1/\theta\,(1 - e^{-L/\theta})$ étant connus, on peut chercher à exprimer l'estimateur optimal W de $1 - e^{-L/\theta}$. En écrivant que W est sans biais, on a :

$$E(W) = \frac{1}{(e^{\lambda} - 1)} \sum_{r \geqslant 1} W(r) \frac{\lambda^r}{r!} = 1 - e^{-\lambda} \qquad (3.26)$$

D'où

$$\sum_{r \geqslant 1} W(r) \frac{\lambda^r}{r!} = 2\,(\mathrm{ch}\,\lambda - 1) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}$$

et l'égalité de ces 2 séries entières convergentes fournit la solution

$$W = \begin{cases} 0 \text{ si } R^* \text{ est impair} \\ 2 \text{ si } R^* \text{ est pair} \end{cases} \qquad (3.27)$$

Absurde d'un point de vue pratique, cet estimateur basé sur R^* est cependant l'estimateur optimal de $1 - e^{-L/\theta}$ et sa variance s'exprime en remarquant que l'on a $E(W^2) = 2E(W)$:

$$V(W) = E(W)\,(2 - E(W)) = (1 - e^{-\lambda})\,(1 + e^{-\lambda}) = 1 - e^{-2\lambda} = 2\,\mathrm{sh}\,(\lambda)/e^{\lambda}. \qquad (3.28)$$

Cette recherche de l'optimalité conduit de même à estimer optimalement $e^{-\lambda}$ et $1 - \frac{\lambda}{(e^{\lambda} - 1)}$ par les estimateurs absurdes

$$Y = 1 - W = \begin{cases} 1 \text{ si } R^* \text{ est impair} \\ -1 \text{ si } R^* \text{ est pair} \end{cases} \quad \text{et } Z = \frac{U}{R^*} = \begin{cases} 0 \text{ si } R^* = 1 \\ 1 \text{ si } R^* \geqslant 2 \end{cases}$$

Dans le § 3.4, nous abandonnerons donc en partie cette notion d'optimalité afin d'analyser l'estimateur "temps moyen" T dont l'intérêt dans les problèmes de fiabilité en particulier est certain.

3.4 - Estimateur temps moyen $\overline{T}$

Rappelons que $\overline{T}$ s'écrit $\overline{T} = \frac{T_1 + T_2 + \ldots + T_{R^*}}{R^*}$ où R^* suit la distribution de Poisson de paramètre λ tronquée de la valeur 0 et proposons-nous dans la suite de déterminer la densité de T, ses caractéristiques et un intervalle de confiance de niveau $1 - 2\alpha$ basé sur T. Afin d'exprimer la densité de T, on utilisera souvent dans la suite les notations de fonction indicatrice

$$1_A(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in A. \\ 0 \text{ si } t \notin A. \end{cases} \qquad (3.29)$$

Soit T_r la variable aléatoire "temps moyen" pour r fixé strictement positif et soit $f_r(t)\ 1_{]0,\frac{L}{r}]}(t)$ sa densité qui n'est non-nulle que dans $]0, \frac{L}{r}]$ (puisque si t_i, i = 1, 2, ..., r sont les intervalles successifs, on a $\sum_1^r t_i \leqslant L$).

Si q(t) est la densité de $\overline{T}$, on a :

$$q(t) = \frac{1}{(e^{\lambda} - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_r(t)\ \lambda^r}{r!}\ 1_{]0,\frac{L}{r}]}(t) \tag{3.30}$$

On peut aussi écrire par ailleurs :

$$q(t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t)\ 1_{]\frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]}(t) \tag{3.31}$$

c'est-à-dire encore

$$q(t) = \begin{cases} p_1(t) \text{ si } (t) \in \left]\frac{L}{2}, L\right] \\ p_2(t) \text{ si } t \in \left]\frac{L}{3}, \frac{L}{2}\right] \\ \cdot \\ \cdot \\ p_i(t) \text{ si } t \in \left]\frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}\right] \end{cases} \tag{3.31)'$$

puisque la fonction q (t) présente des discontinuités aux points $\frac{L}{2}, \frac{L}{3}, \frac{L}{4}$, etc... (En effet, il n'existe qu'une seule façon d'observer un temps moyen t dans $\left]\frac{L}{2}, L\right]$, c'est d'avoir $R^* = 1$ et $T_1 \in \left]\frac{L}{2}, L\right]$; par contre on peut observer $t = \frac{L}{2}$ soit avec $R^* = 1$ et $T_1 = \frac{L}{2}$, soit avec $R^* = 2$ et $T_1 + T_2 = L$, d'où la discontinuité en $\frac{L}{2}$ et de même en $\frac{L}{3}, \frac{L}{4}$, etc...).

En remarquant l'identité évidente :

$$1_{]0,\frac{L}{r}]}(t) = \sum_{i=r}^{\infty} 1_{]\frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]}(t) \tag{3.32}$$

la mise en regard de (3.30) et (3.31) conduit à :

$$\frac{1}{(e^{\lambda} - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f_r(t)\ \lambda^r}{r!} \sum_{i=r}^{\infty} 1_{]\frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]} = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t)\ 1_{]\frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]}(t)$$

On voit facilement que le premier membre de cette dernière relation s'écrit encore

$$\frac{1}{(e^{\lambda} - 1)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{i} \frac{f_r(t)\ \lambda^r}{r!}\ 1_{]\frac{L}{i+1}, \frac{L}{i}]}(t)$$

et l'on en déduit $p_i(t)$ sous la forme

$$p_i(t) = \frac{1}{(e\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{i} \frac{f_r(t)\,\lambda^r}{r!}$$

La détermination de q (t) revient donc à celle de $f_r(t)$ densité de $\overline{T}$ dans $\left]0, \frac{L}{r}\right]$ conditionnée par $R^* = r$.

Pour t dans]0, L/r] on a :

$$f_r(t)\,dt = \frac{\text{Prob}\left(\sum_1^r T_i = rt\right) . \text{Prob}\left(T_{r+1} > L - rt\right)}{\frac{\lambda^r}{r!\,(e^\lambda - 1)}} \tag{3.35}$$

où T_i (i = 2, 3, ..., r + 1) est distribuée selon la loi exponentielle rappelée en introduction alors que T_1 possède la densité (3.3).

On trouve facilement

$$f_r(t) = \frac{\frac{r.e^{-rt/\theta}(rt/\theta)^{r-1}}{\theta\,(1 - e^{-\lambda})\,(r-1)!} . e^{-\lambda + rt/\theta}}{\lambda^r/[r!\,(e^\lambda - 1)]}$$

et par conséquent

$$f_r(t) = r.\left(\frac{r}{L}\right)^r t^{r-1} \tag{3.36}$$

densité de $\overline{T}_r$, dont les caractéristiques s'écrivent :

$$E(\overline{T}_r) = r.\left(\frac{r}{L}\right)^r \int_0^{L/r} t^r\,dt = \frac{L}{(r+1)} \tag{3.37}$$

$$V(T_r) = E(T_r^2) - \frac{L^2}{(r+1)^2} = \frac{L^2}{r\,(r+1)^2\,(r+2)} \tag{3.38}$$

D'où p_i (t) à l'aide de (3.34)

$$p_i(t) = \frac{1}{(e^\lambda - 1)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(r/\theta)^r\,t^{r-1}}{(r-1)!} \tag{3.39}$$

et par conséquent la densité discontinue de $\overline{T}$ de (3.31)'

$$q(t) = \begin{cases} \theta\dfrac{1}{(e^\lambda - 1)} & \text{si } t \in \left]\dfrac{L}{2}, L\right] \\ \theta\dfrac{1}{(e^\lambda - 1)}\,(1 + 2^2 t/\theta) & \text{si } t \in \left]\dfrac{L}{3}, \dfrac{L}{2}\right] \\ \theta\dfrac{1}{(e^\lambda - 1)}\,(1 + 2^2 t/\theta + \dfrac{3^3}{2!}\,(t/\theta)^2) & \text{si } t \in \left]\dfrac{L}{4}, \dfrac{L}{3}\right] \\ \text{etc...} & \end{cases} \tag{3.40}$$

De façon générale, le moment non centré m_s de $\overline{T}$ s'écrit :

$$m_s = \frac{\theta^{s-1}}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{L/(i+1)}^{L/i} \sum_{r=1}^{i} \frac{r^r}{(r-1)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{r+s-1} \tag{3.41}$$

soit après intégration

$$m_s = \frac{\theta^s}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{i} \frac{e^r \lambda^{r+s}}{(r-1)!\,(r+s)} \left(\frac{1}{i^{r+s}} - \frac{1}{(i+1)^{r+s}}\right) \tag{3.41)'$$

et ainsi qu'il est démontré dans l'annexe 2 :

$$m_s = \frac{\theta^s}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s+1}}{n!\,(n+1)^s\,(n+s+1)} \tag{3.42}$$

Cette expression générale permet de déduire les caractéristiques de $\overline{T}$

$$E(\overline{T}) = m_1 \frac{\theta}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2}}{(n+2)!} = \theta\left(1 - \frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}\right) \tag{3.43}$$

$$E(T^2) = m_2 \frac{\theta^2}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+3}}{n!\,(n+1)^2\,(n+3)} = \frac{\theta^2}{(e^{\lambda}-1)} \cdot \Sigma(\lambda) \tag{3.44}$$

avec

$$\Sigma'(\lambda) = \frac{d\,\Sigma(\lambda)}{d} = \lambda\, S(\lambda) = \lambda\,(I(\lambda) - C \text{ Log } \lambda) \quad (\text{cf. } 2.6)$$

$\Sigma(0)$ étant nulle, on en déduit

$$\Sigma(\lambda) = \int_0^{\lambda} x\,(I(x) - C - \text{Log } x)\, dx$$

et après intégration :

$$\int_0^{\lambda} x \text{ Log } x\, dx = \frac{\lambda^2}{2}\left(\text{Log } \lambda - \frac{1}{2}\right) \text{ et } \int_0^{\lambda} x I(x)\, dx = \frac{1}{2}(\lambda^2 I(\lambda) - \lambda e^{\lambda} + (e^{\lambda} 1))$$

$$E(T^2) = \frac{\theta^2}{2(e^{\lambda}-1)} \left[\lambda^2 (I(\lambda) - \text{Log } \lambda - C + \frac{1}{2} + e^{\lambda} - 1 - \lambda e^{\lambda}\right] \tag{3.44)'$$

et par conséquent

$$V(T) = \frac{\theta^2}{2(e^{\lambda}-1)} \left[\lambda^2\left(I(\lambda) - \text{Log } \lambda - C + \frac{1}{2}\right) - e^{\lambda}(1+\lambda) + 4\lambda + 1 - \frac{2\lambda^2}{e^{\lambda}-1}\right] \tag{3.45}$$

L'annexe 3 montre d'ailleurs comment l'on peut retrouver l'espérance et la variance de T à l'aide des caractéristiques liées données par les relations (3.37) et (3.38).

Quant à l'intervalle de confiance $[\theta_{\alpha}, \theta_{1-\alpha}]$ θ de niveau $1 - 2\alpha$, on montre dans l'annexe 4, après un calcul simple mais fastidieux, que sa borne inférieure, par exemple, soit θ_{α}, est solution de :

$$\frac{1}{(e^{L/\theta_{\alpha}} - 1)} \sum_{i=1}^{r} \frac{(L/\theta_{\alpha})^i}{i!} \left(1 - \left(\frac{i\overline{t}}{L}\right)^i\right) = \alpha \tag{3.46}$$

où r est l'observation de R^* et $\overline{t}$ celle de $\overline{T}_r$.

Notons enfin le biais relatif de $\overline{T}$.

$$\text{B.R. } (\overline{T}) = \frac{-\lambda}{(e^{\lambda} - 1)}$$

qui est toujours négatif et varie de -1 à 0 (cf. configuration ci-bas et réf. 4).

Bien qu'estimant sans distorsion la fonction $\theta \left(1 - \frac{L/\theta}{e^{L/\theta} - 1}\right)$ du paramètre θ (cf. (3.43 ci dessus), l'estimateur $\overline{T}$ n'en est pas l'estimateur optimal.

La statistique R^* étant exhaustive et totale, l'application du théorème de Rao-Blackwell donne pour estimateur optimal de $\theta \left(1 - \frac{L/\theta}{e^{L/\theta} - 1}\right)$ la statistique $E(T/R^*)$; espérance de T conditionnée par R^*. D'après la relation (3.37) l'estimateur sans biais de $\theta \left(1 - \frac{L/\theta}{e^{L/\theta} - 1}\right)$ de variance minimale est donc $L/(R^* + 1)$, dont le moment du 2ème ordre s'écrit :

$$E\left(\left(\frac{L}{R^* + 1}\right)^2\right) = \frac{L^2}{\lambda(e^{\lambda} - 1)} \sum_{r \geqslant 1} \frac{\lambda^{r+1}}{r!\,(r+1)^2} = \frac{\lambda\theta^2}{(e^{\lambda} - 1)} \sum_{r \geqslant 1} \frac{\lambda^{r+1}}{(r+1)\,(r+1)!} =$$

$$= \frac{\lambda\theta^2}{(e^{\lambda} - 1)} (S(\lambda) - \lambda) \qquad (3.48)$$

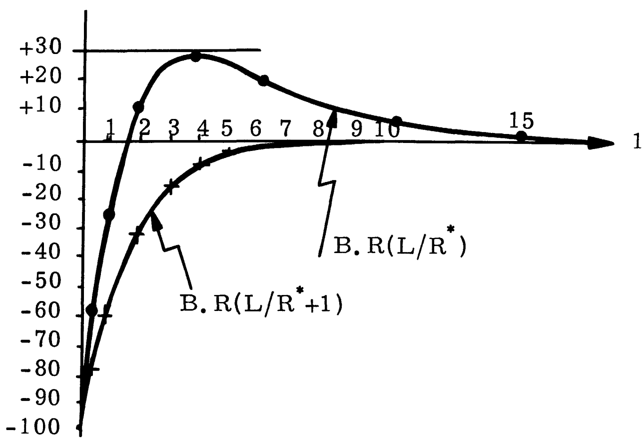
On retiendra donc pour l'estimateur $L/(R^* + 1)$:

$$E(L/(R^* + 1)) = \theta \left(1 - \frac{\lambda}{e^{\lambda} - 1}\right) \qquad (3.49)$$

$$V(L/(R^* + 1)) = \frac{\theta^2}{(e^{\lambda} - 1)} \left[\lambda(S(\lambda) - \lambda) - \frac{(e^{\lambda} - \lambda - 1)^2}{(e^{\lambda} - 1)}\right] = \qquad (3.50)$$

$$= \frac{\theta^2}{(e^{\lambda} - 1)} \left[\lambda(S(\lambda) - \lambda) - (e^{\lambda} - 1) + 2\lambda - \frac{\lambda^2}{(e^{\lambda} - 1)}\right]$$

De même que dans le § (2.3), la comparaison des biais relatifs de L/R et de $L/(R^* + 1)$ en tant qu'estimateurs de θ (cf. relations (3.10) et (3.47) conduit à la configuration graphique suivante (ces relations permettent d'ailleurs de démontrer mathématiquement que le biais relatif de $L/(R^* + 1)$ est inférieur à celui de L/R^*) :



λ	1/2	1	2	3	4	5	10	20	∞
B.R. (L/R^*)	-57	-25	13,5	27,5	29,2	26,0	10,8	0,0	0
B.R. $(L/R^* + 1)$	-77,1	-58,2	-31,3	-15,7	-7,5	-3,4	-0,04	0,00	0

Biais relatifs en % selon les valeurs de λ

En se limitant toujours au critère "biais relatif" et contrairement à ce qui se passait dans le § 2.3 où $L/(R + 1)$ était préférable à $L/(R + 2)$ (cf. relation (2.14)), on n'aura ici tendance à préférer L/R^* à $L/(R^* + 1)$ que si λ est inférieur au chiffre approximatif de 2,5 ; on a en effet

$$|\text{B.R. } (L/R^*)| < |\text{B.R. } (L/(R^* + 1))| \quad \forall\ \lambda < 2{,}5 \tag{3.51}$$

On notera qu'il est assez remarquable et plutôt inattendu que le simple fait de tronquer la variable R de la valeur zéro conduise à des résultats aussi fondamentalement différents.

ANNEXE 1

Calcul de $S(\lambda) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r.r!}$

On a :

$$S(\lambda) = \frac{\lambda}{1.1!} + \frac{\lambda^2}{2.2!} + \frac{\lambda^3}{3.3!} + \ldots \text{ et} \tag{A.1.1}$$

$$\frac{\lambda\, d\, S(\lambda)}{d\lambda} = \lambda\, S'(\lambda) = \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots = e^{\lambda} - 1$$

d'où

$$S(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{e^x - 1}{x}\, dx + K \tag{A.1.2}$$

avec :

$$K = \int_{-\infty}^{0} \frac{1 - e^x}{x}\, dx \text{ puisque } S(0) = 0$$

La constante K peut aussi décrire après quelques transformations :

$$K = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x} - \left(\int_{0}^{1} \frac{1 - e^{-x}}{x}\, dx - \int_{1}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \right)$$

soit

$$K = \int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x} - C \text{ où C est la constante d'Euler [Réf. 5]} \tag{A.1.3}$$

Cela donne :

$$S(\lambda) = -C + \int_{-\infty}^{\lambda} e^x \frac{dx}{x} - \int_{1}^{\lambda} \frac{dx}{x} = I(\lambda) - C - \text{Log } \lambda \qquad \text{(A.1.4)}$$

où

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} e^x \frac{dx}{x} \text{ est l'intégrale exponentielle tabulée.}$$

ANNEXE 2

Calcul du moment non centré m_s de $\overline{T}$

On avait déjà trouvé (relation (3.41)'

$$m_s = \frac{\theta^s}{e^{\lambda}\ 1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{i} \frac{n^n \lambda^{n+s}}{(n-1)!\ (n+s)} \left(\frac{1}{i^{n+s}} - \frac{1}{(i+1)^{n+s}} \right) \qquad \text{(A.2.1)}$$

Pour $i = j$ et $j + 1$, les deux sommes consécutives s'écrivent :

$$\sum_{n=1}^{j} \frac{n^n \lambda^{n+s}}{(n-1)!\ (n+s)} \left(- \cancel{\frac{1}{(j+1)^{n+s}}} + \frac{1}{j^{n+s}} \right) + \sum_{n=1}^{j+1} \frac{n^n \lambda^{n+s}}{(n-1)!\ (n+s)}$$

$$\left(\frac{1}{(j+1)^{n+s}} - \frac{1}{(j+2)^{n+s}} \right)$$

et la deuxième de ces sommes se décompose comme suit :

$$\sum_{n=1}^{j} \frac{n^n \lambda^{n+s}}{(n-1)!\ (n+s)} \left(\cancel{\frac{1}{(j+1)^{n+s}}} - \frac{1}{(j+2)^{n+s}} \right) + \frac{(j+1)^{j+1} \lambda^{j+s+1}}{j!\ (j+s+1)}$$

$$\left(\frac{1}{(j+1)^{j+s+1}} - \frac{1}{(j+2)^{j+s+1}} \right)$$

Ceci entraîne des compensations de termes entre les 2 sommes (termes barrés) et l'ensemble de ces simplifications étendues aux sommes successives ne laisse subsister que les termes où $n = i$ soit :

$$\frac{\lambda^{s+1}}{s+1} + \frac{\lambda^{s+2}}{(s+2)\, 2^s} + \frac{\lambda^{s+3}}{2\, (s+3)\, 3^s} + \text{etc...}$$

D'où finalement m_s :

$$m_s = \frac{\theta^s}{e^{\lambda} - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+s+1}}{n!\ (n+1)\ (n+s+1)} \qquad \text{(A.2.2)}$$

(relation (3.42) du § 3.4)

ANNEXE 3

Espérance et variance de la variable aléatoire $\bar{T}$

Nous nous proposons de montrer dans cette annexe comment l'on peut retrouver les caractéristiques de la variable $\bar{T}$ à l'aide de l'espérance et la variance conditionnelles de $\bar{T}$ données par (3.37) et (3.38)

$$E\ (\bar{T}/R^* = r) = L/(r+1) \qquad \text{(A.3.1)}$$

$$V\ (\bar{T}/R^* = r) = L^2/[r\ (r+1)^2\ (r+2)] \qquad r = 1,\ 2,\ 3,\ \text{etc}\ldots \qquad \text{(A.3.2)}$$

Rappelons pour cela les relations entre les caractéristiques marginales et conditionnelles de $\bar{T}$:

$$E\ (\bar{T}) = E_{R^*} E\ (T/R^*) \qquad \text{(A.3.3)}$$

$$V\ (T) = E_{R^*} V\ (\bar{T}/R^*) + V\ E_{R^*}(\bar{T}/R^*)$$

On trouve alors facilement d'après (A.3.3) :

$$E\ (\bar{T}) = L\ E\ (1/(R^*+1)) = \frac{L}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{(r+1)!} = \frac{\theta\ (e^{\lambda}-1-\lambda)}{(e^{\lambda}-1)},$$

soit

$$E\ (\bar{T}) = \theta\ \left(1 - \frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}\right) \qquad \text{(A.3.5)}$$

déjà donnée dans le § 3.4, relation (3.43).

Quant à la relation (A.3.4), elle donne

$$V\ (\bar{T}) = L^2\ \left\{ E\left(\frac{1}{R^*\ (R^*+1)^2\ (R^*+2)}\right) + V\ \left(\frac{1}{R^*+1}\right) \right\}$$

En écrivant $\frac{1}{R^*\ (R^*+1)^2\ (R^*+2)}$ sous la forme $\frac{1}{2R^*} - \frac{1}{2\ (R^*+2)} - \frac{1}{(R^*+1)^2}$,

on a aussi :

$$V\ (\bar{T}) = L^2 \left\{ E\ \left(\frac{1}{2R^*}\right) - E\ \left(\frac{1}{2\ (R^*+2)}\right) - E^2\ \left(\frac{1}{R^*+1}\right) \right\} \qquad \text{(A.3.6)}$$

soit d'après l'espresssion de $E\ (1/(R^*+1))$ donnée en (A.3.5)

$$V\ (\bar{T}) = L^2 \left\{ E\left(\frac{1}{2R^*}\right) - E\ \left(\frac{1}{2\ (R^*+2)}\right) - \frac{1}{\lambda^2}\ \left(1 - \frac{\lambda}{e^{\lambda}-1}\right)^2 \right\} \qquad \text{(A.3.6)'}$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les espérances mathématiques de $1/2R^*$ et de $1/2\ (R^*+2)$

$$E\,(1/2R^*) = \frac{1}{2\,(e^{\lambda} - 1)} \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r.r!} = \frac{S\,(\lambda)}{2\,(e^{\lambda} - 1)} \qquad (A.3.7)$$

$$S\,(\lambda) = I\,(\lambda) - C - \mathrm{Log}\,\lambda = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{e^x}{x}\,dx - C\ \mathrm{Log}\,\lambda \ \text{(cf. A.1.4)} \qquad (A.3.8)$$

Quant à la variable $1/2\,(R^* + 2)$, son espérance s'écrit :

$$E\,(1/2\,(R^* + 2) = \frac{1}{2\lambda^2\,(e^{\lambda} - 1)} \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^{r+2}}{(r + 2).\ r!}$$

Pour calculer $A\,(\lambda) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^{r+2}}{r!\ (r + 2)}$, on remarque que l'on a :

$$\frac{dA\ (\lambda)}{d\lambda} = A'\,(\lambda) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda^{r+1}}{r!} = \lambda\,(e^{\lambda} - 1).$$

D'où, puisque $A\,(0) = 0$, $\quad A\,(\lambda) = \int_0^1 x\,(e^x - 1)\,dx$

On trouve facilement $A\,(\lambda) = 1 - \lambda^2/2 + e^{\lambda}\,(\lambda - 1)$ ce qui donne

$$E\left(\frac{1}{2\ (R^* + 2)}\right) = \frac{1 - \lambda^2/2 + e^{\lambda}\,(\lambda - 1)}{2\,\lambda^2(e^{\lambda} - 1)} \qquad (A.3.9)$$

et en tenant compte de (A.3.7) et (A.3.9) dans (A.3.6)' :

$$V\,(\overline{T}) = L^2 \left\{ \frac{S\ (\lambda)}{2\ (e^{\lambda} - 1)} - \frac{1 - \lambda^2/2 + e^{\lambda}(\lambda - 1)}{2\lambda^2(e^{\lambda} - 1)} - \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \frac{\lambda}{e^{\lambda} - 1}\right)^2 \right\} \qquad (A.3.10)$$

On voit que $V\,(\overline{T})$ peut aussi décrire

$$V\,(T) = \frac{\theta^2}{2\ (e^{\lambda} - 1)} \left\{ \lambda^2\,(S\ (\lambda) + 1/2) - e^{\lambda}\,(\lambda + 1) + 4\lambda + 1 - \frac{2\,\lambda^2}{e^{\lambda} - 1} \right\}$$

(A.3.10)'

expression déjà donnée dans le paragraphe 3.4 (cf. relation 3.47).

ANNEXE 4

Intervalle de confiance pour θ basé sur $\overline{T}$

Rappelons qu'en notant Prob $(\theta < \theta_{\alpha}) = \alpha$, le problème revient à trouver θ_{α} et $\theta_{1-\alpha}$ tels que :

$$\text{Prob}\ (\theta_{\alpha} < \theta < \theta_{1-\alpha}) = 1 - 2\,\alpha \qquad (A.4.1)$$

où α est un seuil de probabilité fixé à l'avance.

On peut aussi écrire la relation de détermination de θ_α sous la forme évidente :

$$\int_{\bar{t}}^{L} q(t)\, dt = \alpha \qquad (A.4.2)$$

où q (t) est la densité de probabilité de $\overline{T}$ prenant les différentes formes

$$\begin{cases} p_i(t) = \text{densité de T si } L/(i+1) < t \leqslant L/i, \; i = 1, 2, \ldots (r-1) \\ p_r(t) = \quad '' \qquad '' \qquad \bar{t} < t \leqslant L/r \end{cases} \qquad (A.4.3)$$

(r nombre d'évènements observés et $\bar{t}$ temps moyen).

En décomposant l'intervalle

$]\bar{t}, L]$ en $\{]\bar{t}, L/r], \;]L/r, L/(r-1)], \text{ etc.. }]L/3, L/2], \;]L/2, L] \}$

où r est le nombre d'évènements observés,(A.4.2) s'écrit encore

$$\sum_{i=1}^{r-1} \int_{L/(i+1)}^{L/i} p_i(t)\, dt + \int_{t}^{L/r} p_r(t)\, dt = \alpha \qquad (A.4.4)$$

D'où d'après (3.4.1)

$$\frac{1}{\theta\,(e^{\lambda}-1)} \left[\sum_{i=1}^{r-1} \int_{L/(i+1)}^{L/i} \left[\sum_{n=1}^{i} \frac{n^n}{(n-1)!} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \right] dt + \int_{\bar{t}}^{L/r} \left[\sum_{n=1}^{r} \frac{n^n}{(n-1)!} \frac{(t)^{n-1}}{\theta} dt \right] \right]$$

$$= \alpha \qquad (A.4.4)'$$

Intégrons et remplaçons L par $\lambda\,\theta$

$$\frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \left[\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{n=1}^{i} \frac{(n\lambda)^n}{n!} \left(\frac{1}{i^n} - \frac{1}{(i+1)^n} \right) + \sum_{n=1}^{r} \frac{(n\lambda)^n}{n!} \left(\frac{1}{r^n} - \left(\frac{\bar{t}}{L}\right)^n \right) \right] = \alpha \qquad (A.4.5)$$

Plusieurs simplifications résultent du développement de la première somme entre crochets et il ne reste que

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\lambda^i}{i!} - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(i\,\lambda)^i}{i!\,r^i}$$

c'est-à-dire encore

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda^i}{i!} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(i\lambda)^i}{i!\,r^i} .$$

La seconde somme quant à elle s'écrit

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{(i\,\lambda)^i}{i!\,r^i} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(i\,\lambda)^i}{i!} \left(\frac{\bar{t}}{L}\right)^i .$$

D'où la relation donnant λ_α et par conséquent $\theta_\alpha = L/\lambda_\alpha$:

$$\frac{1}{(e^{\lambda}-1)} \sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_\alpha^i}{i!} \left(1 - \left(\frac{i\bar{t}}{L}\right)^i \right) = \alpha \qquad (A.4.6)$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KENDALL M.G. - The advanced theory of statistics, Vol. 2 (Charles Griffin, édition 1961, page 34)

[2] SICHEL H.S. - Estimation of individual accident liability (Contribution libre, 37° session de l'Institut International de Statistique, Londres, Septembre 1969).

[3] HAIGHT F.A. - Handbook of the Poisson distribution

[4] SICHEL H.S. - The statistical estimation of individual accident liability (Traffic Safety Research Review, March 1965)

[5] WHITTAKER et WATSON - A course of modern analysis (Cambridge University Press, 1902).