REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. M. FOURCADE

Note sur le calcul de la consommation moyenne de pièces de rechange

Revue de statistique appliquée, tome 20, nº 4 (1972), p. 47-62
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1972__20_4_47_0>

NOTE SUR LE CALCUL DE LA CONSOMMATION MOYENNE DE PIÈCES DE RECHANGE

G. M. FOURCADE

Régie Autonome des Transports Parisiens

INTRODUCTION

Depuis une vingtaine d'années, les grandes entreprises industrielles ont porté un intérêt croissant aux études de la vie des équipements matériels. Les développements les plus récents du calcul des probabilités - en particulier la théorie du renouvellement - ont permis d'accomplir de grands progrès dans les études de fiabilité (voir, par ex. [1]).

Il y a quelques années, Mme Zaludova a publié un article [7] où, parmi d'autres problèmes, elle calculait le nombre moyen de pièces mécaniques de taxis avariées au cours d'une unité de temps à partir de leurs caractéristiques de fiabilité (probabilité qu'une telle pièce soit en état de bon fonctionnement après avoir parcouru un certain nombre de kilomètres) et des données d'utilisation des taxis (loi statistique du nombre de kilomètres parcourus par unité de temps). L'utilisation d'un théorème limite de la théorie du renouvellement lui a permis d'affirmer - et de vérifier sur des problèmes concrets - que le nombre moyen de pièces avariées par unité de temps converge vers une valeur limite, inversement proportionnelle à la durée de vie temporelle moyenne.

Le but essentiel de la présente note est de donner une nouvelle méthode (reposant sur des hypothèses assez voisines comme on le verra, de celles adoptées par Mme Zaludova) pour le calcul du nombre moyen de pièces avariées au cours d'une période de temps donnée ; le principal avantage de la nouvelle méthode est que la valeur limite de la consommation de pièces est maintenant proportionnelle au quotient du parcours moyen des autobus (en une unité de temps) par la durée de vie moyenne de ces pièces (exprimée en kilomètres) et son calcul ne nécessite donc pas l'utilisation d'un ordinateur.

La présente note sera divisée en quatre parties :

- dans la première partie, on rappellera de façon très brève les principales propriétés des processus de renouvellement ;

- un résumé du modèle de Mme Zaludova sera donné dans la seconde partie ;

- dans la troisième partie, on développera la nouvelle méthode ; on donnera en particulier la formule limite à laquelle elle conduit ;

- enfin, la comparaison des résultats numériques auxquels conduisent ces deux méthodes sera effectuée sur divers exemples dans la quatrième partie.

I - LES PRINCIPALES PROPRIETES DES PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT

Depuis les premières années du XXe siècle, la théorie du renouvellement a retenu l'attention des statisticiens et des démographes (Risser, Lotka), mais les résultats essentiels ont été démontrés par Feller et Smith entre 1940 et 1955.

Un compte-rendu élémentaire de la théorie du renouvellement figure dans [1] ; on trouve des exposés plus complets et plus académiques dans [5] et surtout dans [2] et [4] ; il convient également de mentionner les travaux de Khintchine qui a étudié dans [3] les processus simples et uniformes de renouvellement (1) par des méthodes très différentes de celles qu'utilisèrent Feller et Smith. Le résumé des travaux de Feller qui va suivre doit beaucoup à [5].

I - 1 - Définition des processus de renouvellement

On considère une suite de v.a. $\{\theta_n \ ; \ n = 1,2,\dots\}$ positives et indépendantes en probabilité. On pose :

$$\tau_n = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$$

et on considère le point d'abscisse τ_n d'un axe donné comme la représentation de la réalisation d'un évènement.

On suppose de plus que pour $n \geqslant 2$, les v.a. θ_n sont identiquement distribuées et on désigne par $\xi(t)$ le nombre d'évènements survenus entre l'origine et le point d'abscisse t.

On conviendra de désigner par F(t) la f.r. commune aux v.a. θ_n pour $n \geqslant 2$ et par G(t) la f.r. de la v.a. θ_1, c'est-à-dire :

$$F(t) = P\{\theta_n < t\} \quad \text{avec } n \geqslant 2$$

$$G(t) = P\{\theta_1 < t\}$$

---

(1) Sa terminologie diffère de celle des mathématiciens occidentaux : les processus de renouvellement sont appelés processus à répercussion limitée et les processus uniformes (ou à accroissements stationnaires), processus stationnaires.

Dans ces conditions, la suite des v.a. $\xi(t)$ constitue un processus de renouvellement (2) généralisé.

Dans le cas particulier où toutes les variables θ_i sont identiquement distribuées ($F(t) = G(t)$), le processus de renouvellement $\{\xi(t),\ t \in \mathbf{R}^+\}$ est dit simple; parmi ces derniers, figure le processus simple de Poisson, pour lequel :

$$F(t) = G(t) = 1 - e^{-t/\mu}$$

Enfin, si :

$$G(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(u))\, du$$

où :

$$\mu = \int_0^\infty u\, dF(u)$$

les v.a. $\xi(t)$ appartiennent à un processus de renouvellement uniforme (le processus simple de Poisson fait également partie de cette famille).

Exemple :

On considère un système mécanique fonctionnant continuellement ; dès qu'une pièce est avariée, elle est immédiatement remplacée par une neuve. Les v.a. θ_i représentent les durées de vie de ces pièces supposées identiques, $\xi(t)$ le nombre de pièces tombées en panne entre les instants o et t, et $1-F(t)$ la fonction de fiabilité commune. Si l'origine des temps est prise à un instant où une pièce est mise en service, les pannes de la machine forment un processus de renouvellement simple ; dans le cas contraire, elles constituent un processus de renouvellement généralisé. Enfin, si l'origine des temps est prise à un instant infiniment éloigné de la date de mise en service du système, on peut démontrer que les défaillances de la machine forment un processus de renouvellement uniforme.

I - 2 - Fonction de répartition de $\xi(t)$

Puisque la v.a. $\xi(t)$ est au plus égale à l'entier n si et seulement si τ_{n+1} est supérieur à t, la v.a. $\xi(t)$ a pour f.r. :

$$\begin{aligned} P\{\xi(t) \leqslant n\} &= P\{\tau_{n+1} > t\} \\ &= 1 - G(t) * F_n(t) \end{aligned}$$

car τ_{n+1}, somme de n+1 v.a. indépendantes en probabilité a pour f.r. $G(t) * F_n(t)$ avec (3) :

----

(2) Les processus de renouvellement sont encore appelés processus récurrents, de régénération ou pseudo-markoviens, et les τ_n, points de régénération ou de Markov. Dans un processus de Markov, chaque instant est un point de régénération puisque :

$$P\{X(t) \in D | X(t_1), \ldots, X(t_n)\} = P\{X(t) \in D | X(t_n)\}$$

avec :

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n < t$$

(3) Lorsque les fonctions de répartition $G(t)$ et $F_n(t)$ sont absolument continues, ce que l'on supposera dans la suite de cet exposé, la densité de τ_{n+1} est égale au produit de convolution de leurs dérivées respectives.

4

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-u)\, dF(u)$$

$$F_o(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

($F_o(t)$ est la fonction unité de Heaviside), et :

$$G(t) * F(t) = \int_0^t F(t-u)\, dG(u)$$

I - 3 - Fonction de renouvellement

Il est maintenant facile de calculer l'espérance mathématique m(t) de $\xi(t)$, appelée fonction de renouvellement :

$$\begin{aligned} m(t) = E\{\xi(t)\} &= \sum_{n=o}^{\infty} nP\{\xi(t) = n\} \\ &= \sum_{n=o}^{\infty} P\{\xi(t) > n\} \\ &= \sum_{n=o}^{\infty} G(t) * F_n(t) \end{aligned}$$

Tandis que m(t) se met sous la forme d'une série uniformément convergente, l'expression de sa transformée de Laplace - Stieltjes $\mu(s)$ est beaucoup plus simple.

En posant :

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t)$$

$$\gamma(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dG(t)$$

$$\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dm(t)$$

avec $s > 0$

et en utilisant la propriété bien connue de la transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions d'être égale au produit des transformées de chacune de ces fonctions, on démontre que :

$$\begin{aligned} \mu(s) &= \sum_{n=o}^{\infty} \gamma(s)\, (\varphi(s))^n \\ &= \gamma(s)/(1-\varphi(s)) \end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un processus uniforme, on vérifie à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\gamma(s) = \frac{1}{\mu s}(1-\varphi(s))$$

D'où :

$$\mu(s) = \frac{1}{\mu s}$$

et par inversion :

$$m(t) = \frac{t}{\mu}$$

I - 4 - Théorèmes limites fondamentaux

L'expression analytique de la transformée de Laplace - Stieltjes $\mu(s)$ de la fonction de renouvellement m(t) étant très simple, il est naturel d'essayer de déduire le comportement de la fonction originale m(t) à partir de celui de son image $\mu(s)$ (4) ; pour cela, on utilise le théorème taubérien suivant : m(t) étant une fonction monotone non décroissante et non négative, si :

$$\lim_{s \to o} s\,\mu(s) = \lambda$$

il s'ensuit que :

$$\lim_{t \to \infty} m(t)/t = \lambda$$

On sait, en développant $\varphi(s)$ en série de Taylor, que :

$$\varphi(s) = 1 - \mu s + o(s)$$

avec

$$\lim_{s \to o} o(s)/s = o$$

Par conséquent :

$$\lim_{t \to \infty} m(t)/t = 1/\mu$$

Ce résultat limite a été établi par Feller en 1941. Une formule plus générale a été démontrée par Blackwell en 1948 :

$$\lim_{t \to \infty} (m(t) - m(t-h)) = h/\mu$$

D'où l'on tire :

$$\lim_{t \to \infty} m'(t) = 1/\mu$$

Ce résultat est également dû à Feller, qui l'a établi en 1941.

II - LE MODELE DE MME ZALUDOVA

La théorie du renouvellement, et en particulier, les théorèmes limites de Feller, ne peuvent être directement utilisés pour le calcul de la prévision de la consommation moyenne des pièces de rechange que si leur âge s'exprime en unités de temps. Malheureusement, il n'en est pas toujours ainsi, en particulier dans l'industrie automobile, où l'âge d'une pièce est mesuré par le nombre de kilomètres qu'elle a parcouru depuis sa mise en service et où le kilométrage effectué par unité de temps est aléatoire. C'est pour résoudre un tel problème que Mme Zaludova a établi le modèle publié dans [7] (pp. 81 à 89) ; l'essentiel de cette seconde partie - exception faite du dernier paragraphe - est constitué par une analyse sommaire - sous une forme parfois différente - de l'article de Mme Zaludova.

----

(4) Une relation permettant de déduire le comportement d'une fonction de celui de sa transformée de Laplace - Stieltjes constitue un théorème taubérien.

II - 1 - Notations

On désigne par :

- $F(x)$ la fonction de décès (défiabilité) d'une pièce, c'est-à-dire la probabilité que l'âge de réforme d'une pièce soit inférieur à x kilomètres (on suppose que toutes les pièces ont même fonction de défiabilité, en d'autres termes que les pannes forment un processus de renouvellement simple).

- p_i la probabilité qu'une pièce soit avariée au cours de la i ème unité de temps (le trimestre par exemple) après sa mise en service.

- p_i^* la probabilité qu'une pièce soit avariée au cours du i ème trimestre après la date prise pour origine des temps.

- m_i^* le nombre moyen de pièces avariées au cours du i ème trimestre.

- Q_{i-j} le nombre de pièces (neuves) mises en service à la date i-j.

D'où m_i^* :

$$m_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} Q_{i-j}\, p_j^*$$

Pour simplifier l'exposé, on supposera qu'une seule pièce est mise en service à l'instant origine, et remplacée au fur et à mesure de ses défaillances (voir ci-dessus l'exemple du § I - 1) :

$$m_i^* = p_i^*$$

On se propose de calculer m_i^* et de déterminer son comportement asymptotique.

II - 2 - Hypothèses et résultats

On admet les hypothèses suivantes :

- il ne peut se produire plus d'une panne au cours d'un trimestre : en d'autres termes, le nombre de pièces avariées au cours de i trimestres est au plus égal à i (hypothèse H_1) ;

- les durées de vie temporelles de deux pièces sont indépendantes en probabilité (hypothèse H_2) ;

- les v.a. $S(t)$ ($S(t)$ désigne le nombre aléatoire dekilomètres parcourus par le véhicule entre l'instant origine et t) forment un processus de Markov (pas nécessairement homogène) à accroissements indépendants (hypothèse H_3).

Il résulte des hypothèses H_1 et H_2 que :

$$p_i^* = p_i + \sum_{j=1}^{i-1} p_j\, p_{i-j} + \sum_{k=2}^{i-1} \left(\sum_{j=1}^{k-1} p_j\, p_{k-j}\right) p_{i-k} + \ldots + p_1^i$$

Si on désigne par $p_{2,i}$ le produit de convolution de la probabilité p_i par elle-même, soit :

$$p_{2,i} = \sum_{j=1}^{i-1} p_j\, p_{i-j}$$

$p_{3,i}$, le produit de convolution de $p_{2,i}$ par p_i, et ainsi de suite, il vient :

$$p_i^* = p_i + p_{2,i} + \dots + p_{i,i}$$

Soit $\gamma(s)$ la fonction génératrice des durées de vie temporelles :

$$\gamma(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i s^i$$

et $\gamma^*(s)$ la fonction génératrice des probabilités p_i^* :

$$\gamma^*(s) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i^* s^i$$

Il résulte de l'hypothèse H_2 que quel que soit l'entier k :

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{k,i} s^i = (\gamma(s))^k$$

D'où $\gamma^*(s)$:

$$\gamma^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma(s))^k$$
$$= \gamma(s)/(1-\gamma(s))$$

Si $\bar{\theta}$ désigne la durée moyenne de vie temporelle d'une pièce, la relation:

$$\gamma(s) = 1 + (s-1)\bar{\theta} + o(s-1)$$

et le théorème de Tauber permettent de vérifier que :

$$\lim_{i\to\infty} p_i^* = 1/\bar{\theta}$$

On sait en effet (5) que si la fonction génératrice g(s) d'une suite $\{\pi_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ converge pour $|s|<1$, que si

$$\lim_{s\to 1-o} (1-s)\ g(s) = \lambda$$

avec

$$\lim_{i\to\infty} i\ (\pi_i - \pi_{i-1}) = o$$

on a :

$$\lim_{i\to\infty} \pi_i = \lambda$$

(voir [6] pp. 203 et 204).

Il reste maintenant à déterminer les probabilités des durées de vie temporelles p_i.

Il résulte de l'hypothèse H_3 que la densité de probabilité de S(t) est la solution d'une équation différentielle de Kolmogorov (appelée équation de diffusion ; voir [2]) que, par un changement de variables, on ramène à une équation aux dérivées partielles, l'équation de conduction de la chaleur (voir [5], chap. 2, pbs 28 et 29) ; si le kilométrage effectué pendant le i ème trimestre est un aléa gaussien dont la moyenne a et la variance b^2 sont indépendantes de i, on peut démontrer que p_i a pour expression :

$$p_i = \int_0^{+\infty} \left(\Pi\left(\frac{ia - x}{b\sqrt{i}}\right) - \Pi\left(\frac{(i-1)\,a - x}{b\sqrt{i-1}}\right) \right) dF(x)$$

----

(5) Ce résultat constitue le théorème original de Tauber pour les fonctions génératrices de suites infinies.

où $\Pi(u)$ désigne l'intégrale de la loi normale centrée réduite.

Cette formule se généralise facilement lorsque a et b sont des fonctions de i.

On verra dans le paragraphe suivant que l'hypothèse H_3 peut être abandonnée : si les trajets parcourus par un véhicule sont des v.a. indépendantes et admettant une f.r. commune $A(x)$, on pourra écrire :

$$p_i = \int_0^{\infty} (A_{i-1}(x) - A_i(x))\, dF(x)$$

avec les notations du § I - 2.

On est donc maintenant en mesure de calculer les convolutions $p_{k,i}$, les probabilités p_i^* et aussi $\bar{\theta}$ par la formule :

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} i\, p_i$$

D'où la limite de m_i^*. Le calcul des valeurs numériques de p_i est - sauf dans un cas particulier qui va être examiné maintenant - assez lourd et nécessite l'utilisation d'un ordinateur.

II - 3 - Cas particulier

On suppose dans ce paragraphe que l'âge de décès d'une pièce (toujours exprimé en kilomètres) est une variable exponentielle :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

avec

$$\mu = E\{x\} = \frac{1}{\lambda}$$

D'après la formule donnée au § II - 2, la probabilité qu'une pièce fonctionne pendant i trimestres vaut :

$$p_i = \lambda \int_0^{\infty} (A_{i-1}(x) - A_i(x))\, e^{-\lambda x}\, dx$$

Si on désigne par $\alpha(\lambda)$ la transformée de Laplace - Stieltjes de la fonction $A(x)$:

$$\alpha(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dA(x) \quad \text{avec } \lambda \geqslant 0$$

on sait, d'après le théorème de Borel de la transformée de Laplace d'un produit de convolution, que pour toute valeur entière et positive de i :

$$(\alpha(\lambda))^i = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dA_i(x)$$

et on peut vérifier au moyen d'une intégration par parties que :

$$\frac{1}{\lambda}(\alpha(\lambda))^i = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}(1 - A_i(x))\, dx$$

Par conséquent :

$$p_i = (\alpha(\lambda))^{i-1}(1 - \alpha(\lambda))$$

Dans ce paragraphe, $\alpha(\lambda)$ représente la probabilité que l'âge de décès d'une pièce soit supérieur à un trimestre, et l'âge de décès est distribué suivant une loi de Pascal. La k ème convolution $p_{k,i}$ de p_i avec elle-même (voir § II - 2) - probabilité que la somme de k durées de vie temporelles indépendantes soit égale à i - est donc la densité d'une loi binomiale négative et a pour expression :

$$p_{k,i} = \binom{i-1}{k-1} (\alpha(\lambda))^{i-k} (1-\alpha(\lambda))^k$$

Comme on l'a vu plus haut (§ II - 2) :

$$\begin{aligned} p_i^* &= p_i + p_{2,i} + \ldots + p_{i,i} \\ &= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} (\alpha(\lambda))^{i-k} (1-\alpha(\lambda))^k \\ &= 1 - \alpha(\lambda) \end{aligned}$$

La probabilité p_i^* est bien indépendante de i ; l'espérance $\bar{\theta}$ de la loi de Pascal vaut :

$$\bar{\theta} = 1/(1-\alpha(\lambda))$$

et par conséquent :

$$p_i^* = 1/\bar{\theta}$$

III - LE NOUVEAU MODELE

Le problème à résoudre est celui du paragraphe précédent : déterminer le nombre moyen de pièces m_i avariées au cours du i ème trimestre et son comportement asymptotique ; si les hypothèses de base des deux modèles sont assez proches, la conduite des calculs diffère notablement.

III - 1 - Notations et hypothèses

On conserve, dans la mesure du possible, les notations de la seconde partie, exception faite pour le nombre moyen de pièces défectueuses qui sera noté ici m_i.

On désigne en outre par :

- M_i le nombre total de pièces défectueuses, entre l'origine et la fin du i ème trimestre :

$$M_i = \sum_{j=1}^{i} m_j$$

- q_n (i) la probabilité d'observer au moins n pannes au cours des i premiers trimestres ;

- p_n (i) la probabilité d'observer exactement n pannes au cours des i premiers trimestres ;

$$p_n(i) = q_n(i) - q_{n+1}(i)$$

- $\bar{\theta}$ la durée de vie temporelle moyenne :

$$\bar{\theta} = \sum_{i=1}^{\infty} i\, p_i$$

On calcule M_i à l'aide de la formule :

$$M_i = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n \ (i)$$

On suppose que les âges (exprimés en kilomètres) auxquels le véhicule tombe en panne définissent un processus de renouvellement (généralisé, simple ou uniforme) ; plus précisément, on désigne par :

- m(x) la fonction de renouvellement du processus (nombre moyen de pièces avariées lorsque le véhicule parcourt x kilomètres) ; d'après § I-3 :

$$m(x) = \sum_{n=o}^{\infty} G(x) * F_n(x)$$

- μ une durée de vie moyenne :

$$\mu = \int_o^{\infty} x \ dF(x)$$

- w_n (x) la probabilité qu'il se produise au moins n renouvellements lorsque le véhicule a parcouru x kilomètres :

$$w_n(x) = p\{\xi(x) \geqslant n\}$$

$$= G(x) * F_{n-1}(x)$$

Enfin, en ce qui concerne les conditions d'utilisation du véhicule, on suppose que le trajet parcouru au cours du i ème trimestre est une v. a. admettant une f.r. A(x), indépendante de i, et pour moyenne a :

$$a = \int_o^{\infty} x \ dA(x)$$

Avec les notations du § I - 2, A_i (x) désigne la probabilité que la longueur du trajet parcouru en i trimestres ne dépasse pas x.

On définit ainsi un processus de renouvellement simple, dont la fonction de renouvellement (nombre moyen de trimestres écoulés lorsque le véhicule parcourt x kilomètres) sera désignée par n(x) :

$$n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(x)$$

III - 2 - Résultats

On obtient, au moyen de l'axiome des probabilités totales :

$$q_n(i) = \int_o^{\infty} w_n(x) \ dA_i(x)$$

ou, au moyen d'une intégration par parties :

$$q_n(i) = \int_o^{\infty} (1 - A_i(x)) \, dw_n(x)$$

En particulier :

$$p_i = \int_o^{\infty} (A_{i-1}(x) - A_i(x)) \, dw_1(x)$$

puisque

$$p_i = q_1(i) - q_1(i-1)$$

Dans le cas d'un processus de renouvellement simple :

$$w_1(x) = F(x)$$

et $$p_i = \int_0^\infty (A_{i-1}(x) - A_i(x))\, dF(x)$$

Pour les valeurs élevées de i, cette formule est équivalente à celle que donne Mme Zaludova (§ II - 2) puisque, en vertu du théorème central limite, la distribution du kilométrage parcouru en i trimestres tend vers la distribution normale de moyenne ia et de variance ib^2.

La moyenne $\bar{\theta}$ des durées de vie temporelles vaut :

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \sum_{i=1}^{\infty} i p_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (1 - q(i)) \\ &= \int_0^\infty \Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i(x)\Big)\, dw_1(x) \\ &= \int_0^\infty n(x)\, dw_1(x)\end{aligned}$$

On calcule M_i de la même façon :

$$\begin{aligned}M_i &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q_n(i)) \\ &= \int_0^\infty \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (1 - w_n(x))\Big)\, dA_i(x) \\ &= \int_0^\infty m(x)\, dA_i(x)\end{aligned}$$

ces résultats pouvant être également établis directement par le théorème de l'espérance totale.

On a encore :

$$M_i = \int_0^\infty (1 - A_i(x))\, dm(x)$$

D'où m_i :

$$m_i = \int_0^\infty (A_{i-1}(x) - A_i(x))\, dm(x)$$

III - 3 - Comportement asymptotique

On suppose remplies les conditions permettant de dériver terme à terme la série $m(x)$; si on suppose de plus que les dérivées de $F(x)$ et de $G(x)$ sont continues, la série $m'(x)$ sera continue, donc bornée sur tout intervalle fermé. On peut en outre démontrer (voir [2] ou [4])que :

$$\lim_{x \to \infty} m'(x) = \frac{1}{\mu}$$

Dans ces conditions, la fonction $m'(x)$ est bornée.

On sait que, en vertu de la loi faible des grands nombres, la suite des fonctions $A_i(iy)$ converge vers la fonction unité $A_0(y-a)$; on suppose ici en outre que $A_i(x) - A_0\left(\frac{x}{i} - a\right)$ converge uniformément vers zéro ; alors :

$$\lim_{i \to \infty} \left| \int_0^\infty \left(A_0\left(\frac{x}{i-1} - a\right) - A_0\left(\frac{x}{i} - a\right)\right) dm(x) - m_i \right| = 0$$

Comme :

$$\int_o^{\infty} \left(A_o\left(\frac{x}{i-1} - a\right) - A_o\left(\frac{x}{i} - a\right)\right) dm(x)$$

$$= \int_{(i-1)a}^{ia} dm(x) = m(ia) - m((i-1)a)$$

D'après le théorème de Blackwell :

$$\lim_{i \to \infty} (m(ia) - m((i-1)a)) = \frac{a}{\mu}$$

Par conséquent

$$\lim_{i \to \infty} \left| m_i - \frac{a}{\mu} \right| = o$$

On a donc le résultat limite suivant, qui généralise un théorème de Feller ($\lim_{t \to \infty} m'(t) = 1/\mu$) :

$$\lim_{i \to \infty} m_i = \frac{a}{\mu}$$

Il en résulte (procédé de sommation de Cesaro) que M_i/i converge également vers a/μ :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{i} M_i = \frac{a}{\mu}$$

Ce dernier résultat généralise l'autre formule limite de Feller :

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} m(t) = \frac{1}{\mu}$$

Ici, encore, il est intéressant de remarquer que ces relations sont valables, quelle que soit la valeur prise par i, lorsque les âges d'avarie forment un processus de renouvellement uniforme ; en effet, dans ce cas :

$$m(x) = \frac{x}{\mu}$$

et par conséquent :

$$M_i = \frac{1}{\mu} \int_o^{\infty} (1 - A_i(x))\, dx$$

et puisque la variable dont la f.r. est $A_i(x)$ admet ia pour moyenne :

$$M_i = \frac{ia}{\mu}$$

d'où

$$m_i = \frac{a}{\mu}$$

IV - COMPARAISON DES DEUX METHODES

On rappelle d'abord en quoi les deux méthodes diffèrent sur le plan théorique ; on illustre ensuite cette quatrième partie par quelques exemples numériques.

IV - 1 - Différences conceptuelles

Tout d'abord, les hypothèses de base des deux modèles sont assez voisines : les hypothèses H_1 et H_2 du modèle de Mme Zaludova reviennent à admettre que les durées de vie temporelles des pièces définissent un processus de renouvellement, tandis que dans le modèle proposé dans la troisième partie, on suppose que ce sont les âges de décès (mesurés en kilomètres) qui sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées ; ces deux points de vue sont d'ailleurs équivalents si l'unité de temps choisie est très petite devant la durée de vie temporelle moyenne $\bar{\theta}$. L'hypothèse apparemment la plus discriminante est la supposition faite par Mme Zaludova que les parcours S(t) forment un processus de Markov - Laplace à accroissements indépendants (hypothèse H_3) : cette hypothèse est cependant moins restrictive qu'on serait tenté de le croire : d'une part, on a déjà signalé (§III-2) que d'après le théorème central limite, le kilométrage effectué en i trimestres convergeait en loi vers une variable normale ; d'autre part, on sait qu'un processus normal à accroissements indépendants est markovien (voir [2], p. 95) ; ici encore, le choix d'une unité de temps relativement petite atténue la différence entre l'hypothèse H_3 et l'hypothèse de renouvellement simple faite à la fin du § III - 1.

En revanche, la conduite des calculs diffère notablement d'un modèle à l'autre, en particulier par l'utilisation que fait Mme Zaludova de la théorie de la diffusion.

Les valeurs limites de m_1^* et de m_1 doivent donc être peu différentes ; on peut s'en assurer sur un exemple particulier, celui où l'âge de décès est une variable exponentielle.

En effet, dans ce cas :

$$m_1^* = 1/\bar{\theta}$$

$$m_1 = a/\mu$$

On a démontré à la fin du § II - 3 que :

$$\bar{\theta} = 1 - \alpha(\lambda)$$

où, pour les petites valeurs de λ.

$$\bar{\theta} = a\lambda + o(\lambda)$$

Comme

$$\mu = \int_0^\infty x \, dF(x) = 1/\lambda$$

on a donc :

$$\bar{\theta} = \frac{a}{\mu} + o\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

IV - 2 - Exemple d'application

Les deux modèles ont été appliqués au calcul de la consommation moyenne des valves de nivellement avant-droites, avant-gauches, et arrières équipant les deux types d'autobus standard de la R.A.T.P.

Pour faciliter le calcul de m(x), on a ajusté les courbes de survie empirique des valves à des lois gamma [6] (et non à des lois de Weibull, qui représentent pourtant plus fidèlement la fiabilité des pièces mécaniques).

Les intégrales ont été calculées par une variante de la méthode des trapèzes (la méthode de Weddle).

Tous les calculs ont été faits sur l'ordinateur 360-40 du groupe de Calcul Scientifique de la R.A.T.P.

Les résultats numériques ainsi obtenus figurent dans les tableaux ci-après.

i) Pour les autobus standard du premier type.

L'analyse des statistiques du Réseau Routier de la R.A.T.P. a permis d'estimer la longueur moyenne a parcourue par un véhicule en un trimestre et son écart-type b :

$$a = 9\ 285 \text{ km/trimestre}$$

$$b = 1\ 195 \text{ km/trimestre}$$

d'où le tableau :

i	Valves AVD			Valves AVG			Valves AR		
	m_i^*	m_i	$\frac{1}{i} M_i$	m_i^*	m_i	$\frac{1}{i} M_i$	m_i^*	m_i	$\frac{1}{i} M_i$
1	0,019	0,019	0,019	0,013	0,013	0,013	0,036	0,036	0,036
2	0,054	0,054	0,037	0,051	0,051	0,032	0,044	0,045	0,040
3	0,078	0,079	0,051	0,085	0,086	0,050	0,047	0,048	0,043
4	0,092	0,095	0,062	0,107	0,110	0,065	0,049	0,050	0,045
5	0,101	0,105	0,071	0,120	0,124	0,077	0,050	0,051	0,046
6	0,107	0,111	0,077	0,126	0,133	0,086	0,051	0,053	0,047
7	0,110	0,115	0,083	0,129	0,136	0,093	0,052	0,053	0,048
8	0,112	0,117	0,087	0,130	0,138	0,099	0,052	0,054	0,049
9	0,113	0,119	0,091	0,130	0,138	0,103	0,053	0,055	0,049
10	0,113	0,120	0,094	0,130	0,139	0,107	0,053	0,055	0,050
11	0,113	0,120	0,096	0,130	0,139	0,110	0,054	0,055	0,051
12	0,114	0,121	0,098	0,130	0,139	0,112	0,054	0,055	0,051
13	0,114	0,121	0,100	0,130	0,139	0,114	0,054	0,055	0,051
14	0,114	0,121	0,101	0,130	0,139	0,116	0,054	0,055	0,052
15	0,114	0,121	0,103	0,130	0,139	0,117	0,054	0,055	0,052
16	0,114	0,121	0,104	0,130	0,139	0,119	0,054	0,055	0,052
17	0,114	0,121	0,105	0,130	0,139	0,121	0,054	0,056	0,052
18	0,114	0,121	0,106	0,130	0,139	0,121	0,055	0,056	0,052
19	0,114	0,121	0,106	0,130	0,139	0,122	0,055	0,056	0,053
20	0,114	0,121	0,107	0,130	0,139	0,123	0,055	0,056	0,053
∞	0,114	0,121	0,121	0,130	0,139	0,139	0,055	0,057	0,057

----

(6) Contrairement aux lois de Weibull, la famille des lois gamma est fermée pour le produit de convolution.

ii) Pour les autobus standard du second type

On a cette fois :

$$a = 8\ 055 \text{ km/trimestre}$$

$$b = 859 \text{ km/trimestre}$$

d'où le tableau :

i	Valves AVD			Valves AVG			Valves AR		
	m_i^*	m_i	$\frac{1}{i} M_i$	m_i^*	m_i	$\frac{1}{i} M_i$	m_i^*	m_i	$\frac{1}{i} M_i$
1	0,006	0,006	0,006	0,027	0,028	0,028	0,004	0,004	0,004
2	0,012	0,013	0,009	0,027	0,028	0,028	0,008	0,008	0,006
3	0,017	0,017	0,012	0,027	0,028	0,028	0,011	0,011	0,008
4	0,020	0,020	0,014	0,027	0,028	0,028	0,013	0,013	0,009
5	0,022	0,022	0,016	0,027	0,028	0,028	0,015	0,015	0,010
6	0,024	0,025	0,017	0,027	0,028	0,028	0,017	0,016	0,011
7	0,026	0,026	0,018	0,027	0,028	0,028	0,018	0,018	0,012
8	0,027	0,028	0,020	0,027	0,028	0,028	0,019	0,019	0,013
9	0,029	0,029	0,021	0,027	0,028	0,028	0,020	0,020	0,014
10	0,030	0,030	0,022	0,027	0,028	0,028	0,021	0,021	0,015
11	0,030	0,030	0,022	0,027	0,028	0,028	0,021	0,021	0,015
12	0,031	0,032	0,023	0,027	0,028	0,028	0,022	0,022	0,016
13	0,032	0,032	0,024	0,027	0,028	0,028	0,023	0,022	0,016
14	0,032	0,032	0,024	0,027	0,028	0,028	0,023	0,023	0,017
15	0,033	0,033	0,025	0,027	0,028	0,028	0,023	0,024	0,017
16	0,033	0,033	0,026	0,027	0,028	0,028	0,024	0,024	0,018
17	0,034	0,034	0,026	0,027	0,028	0,028	0,024	0,025	0,018
18	0,034	0,035	0,027	0,027	0,028	0,028	0,025	0,025	0,019
19	0,034	0,035	0,027	0,027	0,028	0,028	0,025	0,025	0,019
20	0,034	0,035	0,027	0,027	0,028	0,028	0,025	0,025	0,019
∞	0,035	0,036	0,037	0,027	0,028	0,028	0,027	0,028	0,028

L'examen de ces deux tableaux confirme les remarques du § IV - 1.

CONCLUSION

On a comparé dans la présente note le modèle de Mme Zaludova à un nouveau modèle ; si la conduite des calculs diffère notablement d'un modèle à l'autre, les hypothèses de base sont, en revanche, assez voisines et conduisent à des résultats assez proches.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie toutes les personnes qui, à titres divers, lui ont apporté leur concours pour l'élaboration de la présente note. Il tient à assurer tout particulièrement de sa reconnaissance M. MORLAT qui l'a aidé de ses conseils, et M. WATTEAU pour son enseignement et l'aide qu'il lui a apportée. Qu'il lui soit également permis d'exprimer toute sa gratitude à M. BOURGOIN, Chef du Groupe Prévisions et Etudes de la R.A.T.P., auquel il doit d'avoir écrit cette note.

REFERENCES

[1] D.R. COX, Renewal theory, Methuen, London, 1962.
(trad. française : Théorie du renouvellement, Dunod, Paris, 1966).

[2] W. FELLER, An introduction to probability theory and its applications, vol. II, John Wiley and Sons, New York, 1966.

[3] A. Ia. KHINTCHINE, Mathematical methods in the theory of queueing (trad. du russe), Griffin, London, 1960.

[4] W.L. SMITH, Renewal theory and its ramifications, J. Roy. Statis. Soc. B, 20 (1958), pp. 284-302.

[5] L. TAKACS, Stochastic processes, Methuen, London, 1960.
(trad. française : Processus stochastiques, Dunod, Paris, 1964).

[6] L. TAKACS, Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, John Wiley and Sons, New York, 1967.

[7] A.H. ZALUDOVA, Problèmes de durée de vie. Applications à l'industrie automobile, Rev. Stat. Appl., XIII, n° 4 (1965), pp. 75-98.