REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

F. BONNIEUX

Modèle de conduite d'un élevage de veaux de boucherie

Revue de statistique appliquée, tome 20, nº 3 (1972), p. 71-84
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1972__20_3_71_0>

MODÈLE DE CONDUITE D'UN ÉLEVAGE DE VEAUX DE BOUCHERIE

F. BONNIEUX

Institut National de la Recherche Agronomique
Station d'Economie Rurale de Rennes

Cet article aborde le problème de la programmation d'un élevage de veaux de boucherie de façon à maximiser le revenu procuré par l'engraissement d'un lot. Après avoir décrit le cadre technique et économique de l'étude nous consacrons une première partie à un modèle formalisant l'évolution d'un lot de veaux. Ce modèle est une chaîne de Markov finie non-homogène, aussi en développons nous l'étude statistique : estimation des probabilités de transition, distribution asymptotique des estimés, tests d'hypothèses... La deuxième partie traite de la programmation des décisions intervenant en cours d'élevage selon différents critères. Elle utilise les méthodes de la programmation dynamique.

CADRE DE L'ETUDE -

L'agriculture se transforme sous la pression de forces dont certaines trouvent leur origine à l'intérieur des exploitations mais dont beaucoup traduisent des pressions extérieures. La dissociation entre production agricole et fabrication des produits destinés à la consommation se traduit par un déplacement des centres de décision, des exploitations agricoles vers les industries alimentaires et les centrales d'achats. Ce phénomène général se manifeste, en particulier dans l'Ouest de la France, où la production agricole a tendance à s'organiser autour de pôles industriels (laiteries, abattoirs, salaisonneries, ...).

La dernière décennie a vu s'établir en agriculture une spécialisation accrue et la mise en place de nombreuses productions hors système, liées a un processus d'industrialisation. Ces spéculations indépendantes de la surface de l'exploitation, ne dépendent que faiblement des autres productions et les facteurs qui leur sont nécessaires proviennent en général de l'extérieur de l'exploitation d'où une certaine homogénéité des coefficients techniques. Tel est le cas de la production avicole, des veaux de boucherie et de l'engraissement des porcs qui s'effectuent dans des ateliers. Ces ateliers sont intégrés dans des chaînes de production-transformation de la viande qui mettent en présence un grand nombre d'unités de production réunies en un ou plusieurs groupements de producteurs et un pôle industriel. Ainsi, aux interdépendances horizontales qui existaient dans l'exploitation se sont plus ou moins substituées les liaisons verticales qui caractérisent la chaine de production-transformation.

L'élaboration de notre modèle a été effectuée à partir de résultats sur la production de veaux de boucherie, collectés dans deux organismes de production - transformation et commercialisation. Dans la suite nous considérons un atelier intégré produisant des veaux de boucherie. Le groupement de producteurs approvisionne l'atelier en animaux maigres, assure l'enlèvement des animaux gras et fournit à l'éleveur un encadrement technique. Si l'éleveur décide de la succession des périodes d'élevage, de la taille des lots, du choix du plan d'alimentation dans une gamme qui lui est proposée, il n'intervient pas dans la fixation de la date d'enlèvement des veaux gras. Elle est déterminée par le groupement de producteurs qui exécute les directives des services commerciaux de l'ensemble industriel d'aval.

Il résulte de cette situation que les veaux sont vendus à une date, qui le plus souvent, n'est pas "optimale" pour l'éleveur, compte tenu de leur état d'engraissement. En effet l'éleveur supporte les coûts entraînés par un stockage sur pied dû à une durée d'élevage trop élevée. Ces faits nous ont conduit à étudier la progammation d'un élevage de veaux de boucherie de façon à maximiser pour l'agriculteur le revenu tiré de l'engraissement d'un lot de veaux. Un des résultats de cette recherche est bien sûr, la mise en évidence des coûts supportés par l'éleveur compte tenu de la politique des services commerciaux. Elle permet aussi au groupement de producteurs de disposer des informations nécessaires pour que les plans d'enlèvement des animaux tiennent compte des intérêts des agriculteurs.

Considérons les décisions prises pendant l'engraissement d'un lot de veaux, ce sont des décisions d'ensemble en ce sens que les actes qu'elles impliquent concernent tous les veaux du lot. A chaque instant, de chaque période d'élevage, après examen du lot de veaux, on décide soit de continuer l'engraissement avec le même plan d'alimentation, soit de continuer l'engraissement en changeant de plan, soit de vendre le lot. La méthode de conduite d'un élevage que nous proposons permet de programmer ces décisions en maximisant l'espérance du revenu correspondant. Elle repose sur une formalisation de l'évolution d'un lot, les décisions étant ensuite déterminées en utilisant la progammation dynamique.

La première partie est consacrée à un modèle représentatif de l'évolution d'un lot de veaux. Dans la deuxième nous donnons quelques indications sur la progammation des décisions.

I FORMALISATION DE L'EVOLUTION D'UN LOT DE VEAUX

Après avoir défini l'état d'un lot de veaux et construit un modèle formalisant l'évolution d'un lot à l'aide d'une chaine de Markov non-homogène, nous démontrons un certain nombre de résultats sur ces chaînes. Un court paragraphe est consacré à la validation du modèle.

1 - Etat d'un lot de veaux

Un veau de boucherie est défini par p paramètres (en pratique on retient le poids, la conformation, l'engraissement et la couleur de la viande) à valeurs réelles qui forment son vecteur d'état. Les barêmes de notation utilisés ne permettent pas de distinguer deux animaux d'états voisins. Aussi munissons nous l'ensemble des veaux de boucherie du même âge d'une relation d'équivalence qui détermine une partition de R^p en s classes. Si le vecteur d'état d'un veau donné prend sa valeur dans la classe i nous dirons alors que le veau est dans l'état i. Si deux veaux ne sont pas équivalents, il y en a un de meilleur que l'autre ce qui permet de définir une relation d'ordre strict. Numérotons les états de telle sorte que si $j > i$, les veaux d'état j sont meilleurs que les veaux d'état i.

Nous repèrons l'état d'un lot de veaux de même âge, par une mesure de la distribution des veaux entre les différents états, ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 1 :

Soit L un lot de n veaux de même âge, son état est défini à l'instant t par le vecteur :

$$X(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_i(t), \dots n_s(t)]$$

où $n_i(t)$ est égal au nombre de veaux qui sont dans l'état i à l'instant t.

On a bien sûr : $\sum_{i=1}^{s} n_i(t) = n$

2 - Description de l'évolution d'un lot

Nous visons à prendre des décisions séquentielles aussi supposerons nous que le temps est une variable à valeurs entières. L'évolution d'un veau, c'est-à-dire la succession de ses états ne peut pas être décrite par un modèle déterministe. D'une part nous ignorons l'influence de nombreux facteurs, il est exclu d'autre part de tenir compte de certains phénomènes (milieu ambiant, ...) du fait de la complexité qui en résulterait.

Le hasard intervenant sous la forme d'un espace probabilisé, l'évolution d'un veau est décrite par un processus stochastique à valeurs entières qui à tout veau associe à chaque instant son état. La loi conditionnelle d'évolution d'un veau après un instant t ne dépend en fait que de son état à cet instant, aussi admettrons nous que cette évolution peut être décrite par une chaine de Markov finie. Rien ne permet de supposer qu'elle soit homogène dans le temps.

Nous notons $p_{ij}(u, v)$ ($u < v$ et $i, j = 1, 2, \dots s$) la probabilité de la transition de l'état i à l'état j depuis l'instant u jusqu'à l'instant v. $P(u, v)$ désigne la matrice correspondante :

$$P(u, v) = [p_{ij}(u, v)]_{(i,j = 1,2,\dots, s)}$$

Si $u = t - 1$ et $v = t$ nous posons plus simplement :

$$p_{ij}(t - 1, t) = p_{ij}(t) \text{ et } P(t - 1, t) = P(t).$$

Considérons désormais le lot L, si nous suivons l'évolution de chacun des n veaux qui le constituent nous disposons de n réalisations du même processus. Connaissant l'état de L, à l'instant t on peut calculer l'espérance de son état à tout instant ultérieur t :

$$E[X(t)] = X(u) P(t, u)$$

Nous connaissons X (0), état initial de L nous pouvons donc calculer l'état X (t) pour tout t.

L'engraissement d'un lot a une durée finie T, nous considérons donc une chaîne de Markov, non homogène, de longueur T. Elle est définie par la suite des matrices de transition : P (1), P (2), ..., P (T). A chaque plan d'alimentation correspond une telle suite.

3 - Estimation des paramètres

Pour un plan d'alimentation donné nous allons estimer les matrices P (t) (t = 1, 2, ... T) par la méthode du maximum de vraisemblance. Soit un échantillon S de n réalisations indépendantes du processus de longueur T :

$$S = \{ S_1, S_2, \ldots S_i, \ldots S_n \}$$

S_i désigne la réalisation correspondant au ième veau, donc :

$$S_i = [i\ (0),\ i\ (1),\ \ldots,\ i\ (t),\ \ldots\ i\ (T)]$$

où i (t) est l'état de ce veau à l'instant t.

Désignons par n_{ij} (t) le nombre de veaux qui effectuent la transition de i à j de l'instant t - 1 à l'instant t ; rappelons que n_i (t) représente le nombre de veaux qui sont dans l'état i à l'instant t. Généralisant la définition de Billingsley* , nous appelons compte des transitions de l'instant t - 1 à l'instant t, la matrice :

$$N\ (t) = [n_{ij}\ (t)]\ (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$$

Nous sommes alors conduit à étudier la statistique formée par les comptes de transition et l'état initial de S ; c'est-à-dire par :

$$\{ N\ (t)\ ;\ t = 1,\ 2 \ldots T\}\ \text{et}\ \{ i\ (0)\ ;\ i = 1,\ 2 \ldots,\ n\}\ .$$

On montre simplement que l'on a :

$$\text{Prob}\ (S) = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,j=1}^{s} p_i^{n_i (0)}\ p_{ij}^{n_{ij} (t)}\ (t)$$

$\{ p_1, p_2, \ldots p_s \}$ désignant le système de probabilités associées à $\{ n_1, (0), n_2 (0), \ldots n_s (0) \}$. Cette relation entraîne que les comptes de transition et l'état initial constituent une statistique exhaustive minimale.

Les estimés du maximum de vraisemblance s'obtiennent en maximisant Prob (S) sous les s T + 1 contraintes suivantes :

$$\sum_{i=1}^{s} p_i - 1 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}\ (t) - 1 = 0 \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s\ ;\ t = 1,\ 2,\ \ldots\ T.$$

----

* Billingsley P., 1961. Statistical methods in markov chains. AMS, 32, p.14.

Nous sommes conduit à introduire une hypothèse sur la distribution n_i (0). Si, étant donné un lot de veaux on désire caractériser le plan d'alimentation qui leur est appliqué il est assez naturel de supposer que les n_i (0) sont donnés. Nous admettrons cette hyppthèse, cependant nous examinerons dans la suite le cas où ils obéissent à une loi multinomiale. Les comptes de transition forment alors une statistique exhaustive minimale. Lorsqu'on considère une chaîne de Markov homogène de longueur infinie, il est inutile de spécifier la distribution initiale car l'état initial apporte une information négligeable par rapport à la quantité d'information totale*.

Cette hypothèse supplémentaire entraîne que les estimés du maximum de vraisemblance maximisent :

$$\text{Prob (S)} = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i,j=1}^{s} p_{ij}(t)^{n_{ij}(t)}$$

sous les s T contraintes :

$$\sum_{j=1}^{s} p_{ij}(t) - 1 = 0 \quad j = 1, 2 \ldots s \; ; \quad t = 1, 2 \ldots T$$

La maximisation de Prob (S) sous contraintes se fait en introduisant s T multiplicateurs de Lagrange. On obtient la proposition suivante :

Proposition 1 -

Les estimés du maximum de vraisemblance des p_{ij} (t) (i, j = 1, 2 ... s ; t = 1, 2 ... T) sont uniques, ils sont égaux à :

$$\widehat{p_{ij}}(t) = \frac{n_{ij}(t)}{n_i(t-1)}$$

On vérifiera que $\widehat{p_{ij}}$ (t) est un estimé sans biais de p_{ij} (t). Nous pouvons remarquer que l'expression de ces estimés est la même que celle que nous aurions obtenu en considérant n_i (t - 1) observations d'une distribution multinomiale à s issues de probabilités respectives p_{ij} (t) (j = 1, 2, ...s), le nombre de cas observés étant respectivement n_{ij} (t) (j = 1, 2, ... s).

4 - Etude asymptotique des estimés

Soit à étudier la distribution conjointe des variables aléatoires $\sqrt{n}\,[\widehat{p_{ij}}(t) - p_{ij}(t)]$ (i, j = 1, 2, ... s ; t = 1, 2, ..., T) lorsque n tend vers l'infini. Notre démonstration est basée sur un théorème dû a Aitchison et Sylvey** qui généralise les résultats classiques de Cramer. Il en résulte que la distribution asymptotique des variables $\sqrt{n}\,[\widehat{p_{ij}}(t) - p_{ij}(t)]$ est normale, centrée. L'étude asymptotique se réduit donc à la détermination de leur matrice des variances-covariances.

---

* Bartlett M. - S., 1961. The frequency goodness of fit test for probability chains. Proceed. Cambridge philo. Soc. 47, p. 86-95. - Billingsley., opus cité.

** Aitchison J., Silvey S. - D., 1958 - Maximum likelihood estimation of parameters subject to restraints. AMS, 29, p. 824.

On pose :

$$\sqrt{n}\,[\widehat{p_{ij}}\,(t) - p_{ij}\,(t)] = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\,[n_{ij}\,(t) - n_i\,(t-1)\,p_{ij}\,(t)]}{\frac{1}{n}\,n_i\,(t-1)}$$

Nous calculerons d'une part les variances-covariances du numérateur et leurs limites, d'autre part la limite stochastique du dénominateur.

Etude du numérateur

Si $n_{k;i}\,(t-1)$ désigne le nombre de suites S_i d'état initial k et d'état i à t - 1, si $n_{k;ij}\,(t)$ désigne le nombre de suites d'état initial k, d'état i à t - 1 et d'état j à t, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,[n_{ij}\,(t) - n_i\,(t-1)\,p_{ij}\,(t)] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{s}[n_{k;ij}\,(t) - n_{k;i}\,(t-1)\,p_{ij}\,(t)]$$

avec :

$$n_{k;i}\,(t-1) = \sum_{j=1}^{s} n_{k;ij}\,(t)$$

Les $n_k\,(0)$ sont fixés donc $n_{k;ij}\,(t)$ et $n_{l;ij}\,(t)$ sont indépendantes si k est différent de l, il suffit de considérer le cas où k et l sont égaux. La distribution des $n_{k;ij}\,(t)$ (j = 1, 2 ... s) sachant $n_{k;i}\,(t-1)$ est multinomiale, le système des probabilités associées étant $p_{ij}\,(t)$ (j = 1, 2, ... s). En utilisant la fonction caractéristique, on obtient :

$$\mathrm{Var}\ \{\ n_{k;ij}\,(t) - n_{k;i}\,(t-1)\,p_{ij}\,(t)\ \} = n_k\,(0)\,p_{ki}^{[t-1]}\,p_{ij}\,(t)\,[1 - p_{ij}\,(t)]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\ \{\ n_{k;ij}\,(t) - n_{k;i}\,(t-1)\,p_{ij}\,(t),\ n_{k;ih}(t-n)_{k;i}\,(t-1)\,p_{ih}\,(t)\\ = - n_k\,(0)\,p_{ki}^{[t-1]}\,p_{ij}\,(t)\,p_{ih}\,(t)\end{aligned}$$

où $p_{ki}^{[t-1]}$ désigne la probabilité de la transition de k à i depuis l'instant initial jusqu'à t - 1.

On montre, en outre que $n_{k;ij}\,(t) - n_{k;i}\,(t-1)\,p_{ij}\,(t)$ et $n_{k;gh}\,(u) - n_{k;g}\,(u-1)\,p_{gh}\,(u)$ ne sont pas corrélés si i est différent de g ou si t est différent de u.

On obtient finalement les résultats suivants :

$$\mathrm{Var}\ \{\ \frac{1}{\sqrt{n}}\,n_{ij}\,(t) - n_i\,(t-1)\,p_{ij}\,(t)\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{s} n_k\,(0)\,p_{ki}^{[t-1]}\,p_{ij}\,(t)\,[1 - p_{ij}\,(t)]$$

$$\mathrm{Cov}\ \{\ \frac{1}{\sqrt{n}}\,[n_{ij}\,(t) - n_i\,(t-1)\,p_{ij}\,(t)]\ ,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\,[n_{gh}\,(u) - n_g\,(u-1)\,p_{gh}\,(u)]\}$$

$$= \frac{\delta_{ig}\,(t,\ u)}{n}\sum_{k=1}^{s} n_k\,(0)\,p_{ki}^{[t-1]}\,p_{ij}\,(t)\,p_{gh}\,(u)$$

avec :

$$\delta_{ii}\,(t,\ t) = 1 \text{ et } \delta_{ij}\,(t,\ u) \neq 0 \text{ si } i = g \text{ ou } t \neq u.$$

On en déduit les limites des variances et des covariances en posant :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_k\,(0)}{n} = \eta_k$$

$$\eta_k > 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{s} \eta_k = 1$$

la limite de la variance est égale à :

$$\varphi_i \ (t - 1) \ p_{ij} \ (t) \ [1 - p_{ij} \ (t)]$$

et celle de la covariance à :

$$- \delta_{ig} \ (t, u) \ \varphi_i \ (t - 1) \ p_{ij} \ (t) \ p_{gh} \ (u)$$

avec :

$$\varphi_i \ (t - 1) = \sum_{k=1}^{s} \eta_k \ p_{ki}^{[t-1]}$$

φ_i (t - 1) mesure donc la limite, lorsque n tend vers l'infini, du nombre moyen de veaux qui sont dans l'état i à l'instant t - 1.

Etude du dénominateur

Les variables aléatoires $n_{k;ij}$ (t) sont multinomiales, l'échantillon étant de taille n_k (0) et les probabilités associées étant :

$p_{ki}^{[t-1]} \ p_{ij}$ (t). On montre que :

$$\underset{n \to \infty}{\text{st lim}} \ \frac{n_{k;ij} \ (t)}{n} = \eta_k \ p_{ki}^{[t-1]} p_{ij} \ (t)$$

Or :

$$n_i \ (t - 1) = \sum_{k,j=1}^{s} n_{k;ij} \ (t)$$

donc :

$$\underset{n \to \infty}{\text{st lim}} \ \frac{n_i \ (t - 1)}{n} = \varphi_i \ (t - 1)$$

La proposition suivante résume ce qui précède :

<u>Proposition 2</u> -

La distribution conjointe des variables aléatoires
$\sqrt{n} \ [\widehat{p_{ij}} \ (t) - p_{ij} \ (t)]$ (i, j = 1, 2 ..., s ; t = 1, 2 ... ; T)
est asymptotiquement normale centrée. Ces variables sont asymptotiquement indépendantes pour deux valeurs différentes du couple (t, i)

Les variances de la distribution asymptotique de $\sqrt{n} \ [p_{ij} \ (t) - p_{ij} \ (t)]$ (j = 1, 2 ... s) sont égales à :

$$\frac{1}{\varphi_i \ (t)} \ p_{ij} \ (t) \ [1 - p_{ij} \ (t)]$$

et les covariances à $\dfrac{1}{\varphi_i \ (t - 1)} p_{ij} \ (t) \ p_{ik} \ (t)$

On peut énoncer le corollaire :

Corollaire :

Les variables $\sqrt{n\,\varphi_i\,(t-1)}\,[\widehat{p_{ij}}\,(t) - p_{ij}\,(t)]$ $(j = 1, 2 \ldots s)$ et les variables aléatoires $\sqrt{n_i\,(t-1)}\,[\widehat{p}_{ij}\,(t) - p_{ij}\,(t)]$ $(j = 1, 2 .. s)$ sont asymptotiquement équidistribuées. La distribution limite est normale centrée, de variances $p_{ij}\,(t)\,[1 - p_{ij}\,(t)]$ $(j = 1, 2 .., s)$ et de covariances $p_{ij}\,(t)\,p_{ih}\,(t)$ $(j, h = 1, 2 \ldots, s)$.

On pourra donc étudier pour une valeur donnée du couple (t, i), les variables $\widehat{p_{ij}}\,(t)$ $(j = 1, 2, \ldots s)$ comme les estimés des probabilités d'une loi multinomiale, la taille de l'échantillon étant $n_i\,(t - 1)$. S se décompose en s T échantillons asymptotiquement indépendants de tailles :

$$n_i\,(t - 1)\ (i = 1, 2, \ldots, s\ ;\ t = 1, 2, \ldots, T).$$

5 - Généralisation du modèle

Si l'on suppose maintenant que la distribution des variables aléatoires $n_i\,(0)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ est multinomiale, les probabilités associées étant p_i $(i = 1, 2, \ldots s)$, on obtient les estimés $\widehat{p_i}$ du maximum de vraisemblance des p_i en maximisant la distribution marginale des $n_i\,(0)$ sous une contrainte.

On trouve :

$$\widehat{p_i} = \frac{n_i\,(0)}{n}$$

Les variables aléatoires $n_{ij}\,(t) - n_i\,(t - 1)\,p_{ij}\,(t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots s\ ;\ t = 1, 2, \ldots, T)$ et $n_i\,(0)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ ne sont pas corrélées.

Comme $n_k\,(0)$ est un estimé correct de η_k les conclusions du paragraphe précédentes ne sont pas modifiées.

6 - Tests d'hypothèses

A partir des résultats du paragraphe 4, il est possible de construire de nombreux tests, utiles en pratique, qui sont basés sur la distribution du χ^2 donc facile à mettre en oeuvre. Sans en faire un inventaire, on peut malgré tout les regrouper en trois classes :

- tests d'hypothèses fixant quelques probabilités de transition ou éventuellement toutes les probabilités,
- tests d'hypothèses sur l'homogénéité de la chaîne,
- test de l'hypothèse que plusieurs lots ont été tirés de la même population.

A titre d'exemple supposons que l'on veuille tester l'hypothèse :

$$H_o\ p_{ij}\,(t) = p_{ij}\ (i, j = 1, 2, \ldots s\ ;\ t = 1, 2, \ldots T)$$

contre l'hypothèse :

$$H_1\ p_{ij}\,(t)\ \text{quelconques}$$

On forme :

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{i,j=1}^{s} n_i\,(t-1)\,\frac{\widehat{p_{ij}}\,(t) - \widehat{p_{ij}}}{p_{ij}} \left(\widehat{p_{ij}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{T} n_{ij}\,(t)\right)$$

qui suit asymptotiquement la distribution du χ^2 à s (s - 1) (T - 1) degrés de liberté.

7 - Vérification du modèle

Les matrices P (t) (t = 1, 2, ... T) qui caractérisent un plan d'alimentation étant estimées par $\widehat{P}$ (t) on peut vérifier le modèle, pour un lot de veau dont l'état initial est connu, en confrontant à la réalité les résultats auxquels il conduit.

On observe la suite des états X (t) (t = 1, 2 ... T) du lot et on utilise comme prédicteur de X (t) un estimé $\widehat{X}$ (t) de son espérance :

$$\widehat{X} (t) = X (0) \widehat{P} (1) \widehat{P} (2) \ldots \widehat{P} (t)$$

Posons :

$$\widehat{X}(t) = [\widehat{n}_1 (t), \ldots \widehat{n}_i (t), \ldots, \widehat{n}_s (t)].$$

On compare alors X (t) et $\widehat{X}$ (t) en formant la quantité :

$$\chi^2(t) = \sum_{i=1}^{s} \frac{[\widehat{n}_i (t) - n_i (t)]^2}{n_i (t)}$$

qui suit la loi du χ^2 à s - 1 degrés de liberté, si tous les n_i (t) sont non-nuls. Ce test répété par les différentes valeurs de t, fournit un bon moyen de vérifier le modèle.

La mise en oeuvre de cette méthode est coûteuse, car elle suppose que chaque lot de veaux considéré soit suivi pendant tout son engraissement avec beaucoup de précision. Les calculs faits à partir de lots de 112 animaux et partant sur cinq plans d'alimentation ont été positifs et conduisent à accepter le modèle.

* **

II NOTIONS SUR LA PROGRAMMATION DES DECISIONS

Revenons tout d'abord sur la distinction entre la décision d'arrêt de l'engraissement et les décisions qui portent sur le choix du plan d'alimentation. Si la première a pour résultat d'arrêter le processus qui nous intéresse, la seconde en modifie uniquement la loi aléatoire. Au début de l'étape t (qui va de t - 1 à t) on choisit le plan d'alimentation parmi r plans possibles. Nous définissons la variable de décision y (t - 1) égale à k si le plan k est adopté pour l'étape t.

L'évolution du lot L est alors régie par l'équation de récurrence stochastique :

$$X (t) = F [X (t - 1), y (t - 1), t - 1]$$

Remarquons qu'en pratique on doit introduire des contraintes et limiter le domaine des décisions possibles, nous ne le faisons pas ici par souci de simplification. Une suite y (0), y (1), ... y (T - 1) est une stratégie.

Le problème consiste à rechercher pour un état initial donné une stratégie optimale en un certain sens. A chaque triplet X (t - 1), y (t - 1), X (t) on peut associer une valeur qui est une variable aléatoire lorsque X (t) est inconnu. Chaque stratégie possible est alors caractérisée par la valeur d'un critère de la forme :

$$\sum_{t=1}^{T} v_{t-1} \, [X (t - 1), y (t - 1)] + V_T \, [X (T)]$$

Nous parlerons de critère final si :

$$v_{t-1} \, [X (t - 1), y (t - 1)] = 0, \quad t = 1, 2, \dots T$$

et de critère à composantes partielles si :

$$V_T \, [X (t)] = 0$$

L'utilisation d'un critère final permet de choisir une durée d'engraissement optimale et de comparer plusieurs stratégies données. L'introduction d'un critère à composantes partielles permet elle la détermination conjointe d'une durée et d'une stratégie optimales. L'emploi du deuxième type de critère est malheureusement beaucoup plus compliqué et réclame de nombreux renseignements statistiques supplémentaires. Nous présentons brièvement l'un et l'autre cas.

1 - Critère final

Nous caractérisons chaque état i à l'instant t par le revenu (pratiquement il s'agit d'une marge brute) que procurerait un veau vendu à l'instant t et qui serait dans cet état. Désignons ce revenu par V_i (t). On définit le vecteur des revenus ;

$$V (t) = [V_1 (t), V_i (t), \dots V_s (t)]$$

La détermination de ces revenus est aisée. En effet, en régime la prix garantis la recette est connue, il en est de même pour les deux postes les plus importants des charges ; le prix du veau de huit jours et l'alimentation.

L'espérance du revenu que procurerait la vente de L à la date T est donnée par :

$$V (L, T) = E [X (T)] \, V' (T)$$

La durée T de l'engraissement peut varier entre les valeurs T_1 et T_2, on obtient donc la valeur optimale par :

$$V (L) = \max_{T_1 \leqslant T \leqslant T_2} V (L, T).$$

La comparaison entre plans d'alimentation se fait en comparant les valeurs optimales de l'espérance du revenu pour chaque plan.

2 - Critère à composantes partielles

Le revenu que procure l'engraissement d'un lot de veaux peut se décomposer en la somme des revenus que procure chaque veau. Ce dernier est lui-même la somme des revenus procurés par chaque étape de l'engraissement. On associe alors à la transition de l'étape t, qui conduit de l'état i à l'état j lorsque y (t - 1) est égal à k le revenu partiel r_{ij} (t, k). Désignons par p_{ij} (t, k) la probabilité de transition correspondante.

Considérons tout d'abord un seul veau, d'état i à t - 1. L'espérance du revenu qu'il procure pendant l'étape t est :

$$q_i (t, k) = \sum_{j=1}^{s} r_{ij} (t, k) p_{ij} (t, k)$$

Quant au maximum de l'espérance du revenu qu'il procure de t - 1 à T il est donné par :

$$v_i (t-1, T) = \max_{k=1,2,\ldots,r} \left[\sum_{j=1}^{s} v_j (t, T) p_{ij} (t, k) + q_i (t, k) \right]$$

avec :

$$v_i (T, T) = 0$$

Relations qui permettent de calculer v_i (t, T) pour tout t et tout i. En utilisant le principe d'optimalité de Bellman on peut ainsi construire pour tout T une stratégie optimale. Le choix de la valeur optimale de T s'effectue en comparant les maximums de l'espérance du revenu pour les différentes valeurs possibles de T.

Cette méthode se généralise au cas d'un lot mais conduit à des calculs volumineux car on doit considérer à chaque instant tous les vecteurs d'état possibles. L'espérance du revenu partiel perçu dans la transition de l'étape t qui conduit le lot de l'état X (t - 1) à l'état X (t), lorsque y (t - 1) est égal à k, est donnée par :

$$Q [X (t-1), t, k] = \sum_{i,j=1}^{s} n_i (t-1) r_{ij} (t, k) p_{ij} (t, k)$$

Le maximum de l'espérance du revenu qu'il procure de t - 1 à T, est égal à :

$$V [X (t-1), t-1,] = \max_{k=1,2,\ldots r} \left\{ \sum_{X(t)} V [X (t), t,] \; P [X (t)/X (t-1), k] \right.$$
$$\left. + \; Q [X (t-1), t, k] \right.$$

où $$P [X (t)/X(t-1), k] = \frac{\prod_{i=1}^{s} n_i (t-1) !}{\prod_{i,j=1} n_{ij} (t) !} \prod_{i,j=1}^{s} p_{ij} \; t, k)^{n_{ij}(t)}$$

désigne la probabilité de la transition de l'état X (t - 1) à l'état X (t) lorsque y (t - 1) est égal à k. Compte tenu de la relation :

$$V [X (T), T, T] = 0$$

On peut calculer V [X (T - 1), t - 1, T] et déterminer la valeur optimale de y (t - 1). Comme dans le cas d'un seul veau on détermine alors la stratégie et la durée d'engraissement optimales.

*
* *

Les premières applications opérationnelles que nous avons faites de ces méthodes ont utilisé un critère final. Nous avons en particulier résolu a posteriori le problème du choix du plan d'alimentation et de la date de fin d'engraissement. Le plan effectivement appliqué a été le meilleur en général, mais il n'en va pas de même pour la durée d'engraissement. Considérons une série de six lots ayant été engraissé pendant 84 jours mais pour lesquelles nous avons calculé une durée optimale de 80 jours, nous indiquons ci-dessous la marge brute moyenne obtenue par veau et la marge brute moyenne qui aurait été obtenue si le lot avait été vendu au bout de 80 jours.

Comparaison des marges brutes (exprimées en francs)

lots	80 jours d'en graissement	84 jours d'engraissement
1	50,25	46,95
2	105,25	93,25
3	77,60	60,00
4	92,15	83,75
5	145,00	120,90
6	172,55	158,95

On observe de très fortes variations du revenu pour des variations de la durée d'engraissement inférieures à une semaine. Leur amplitude est souvent plus élevée que celle que l'on observe dans le tableau. Ces premières applications remontent à 1967-1968. Elles ont montré aux dirigeants des groupements de producteurs, avec lesquels nous avons travaillé, l'importance de la décision d'arrêt de l'engraissement. Un meilleur encadrement, une meilleure surveillance ont conduit à une gestion plus rationnelle.

Ce modèle a permis d'établir des tables de durées d'engraissement en fonction de la composition initiale du lot. En outre appliqué à chaque lot de veaux il fournit trois mois à l'avance (durée moyenne d'une période d'élevage) au groupement de producteurs un calendrier des dates optimales d'enlèvement des animaux en essayant de concilier les exigences des services commerciaux et les intérêts des agriculteurs.

ANNEXE

QUELQUES DONNEES SOMMAIRES SUR LA VERIFICATION DU MODELE

Dans ce qui suit l'état est uniquement repéré par le poids vif. Nous devons tout d'abord définir une relation d'équivalence sur les veaux. Il suffit de déterminer les états à chaque instant. Leur nombre est fonction de l'aptitude que nous avons à séparer deux veaux. A chaque instant il n'est pas nécessaire de distinguer deux veaux dont la différence des poids est supérieure à a (t), sur la base de considération techniques et économiques nous avons retenu les valeurs suivantes :

t en jours	0	14	28	42	56	70	84	98
a (t) en kg	3	4	4	4	4	5	5	5

Les différents états pour un plan d'alimentation donné, se déterminent à partir des résultats d'un échantillon aléatoire. A chaque instant, nous définissons un poids critique inférieur et un poids critique supérieur tels que:

- si un veau a un poids inférieur ou égale au poids critique il est dans l'état 2,

- si un veau a un poids supérieur au poids critique supérieur il est dans l'état s.

Les valeurs des poids critiques ont été choisies de telle sorte qu'il y ait environ 3 % des veaux dans l'état 2 et 3 % dans l'état s. Le quotient de la différence entre poids critiques par la valeur a (t) donne la valeur de s. Nous obtenons de la sorte le nombre d'états correspondant à notre aptitude à séparer deux veaux et leurs définitions. L'examen de six échantillons de 112 veaux a conduit pour un plan donné à dix états, définis comme suit :

Définition des états

t en jours états	0	14	28	42	56	70	84
1	0	0	0	0	0	0	0
2	] 0,43]	] 0,40]	] 0,50]	] 0,70]	] 0,90]	] 0,100]	] 0,110]
3	] 43,46]	] 40,44]	] 50,54]	] 70,74]	] 100,105]	] 100,105]	] 110,115]
4	] 46,49]	] 44,48]	] 54,58]	] 74,78]	] 105,110]	] 105,110]	] 115,120]
5	] 49,52]	] 48,52]	] 58,62]	] 78,82]	] 110,115]	] 110,115]	] 120,125]
6	] 52,55]	] 52,56]	] 62,66]	] 82,86]	] 102,106]	] 115,120]	] 125,130]
7	] 55,58]	] 56,60]	] 66,70]	] 86,90]	] 106,110]	] 120,125]	] 130,135]
8	] 58,61]	] 60,64]	] 70,74]	] 90,94]	] 110,114]	] 125,130]	] 135,140]
9	] 61,64]	] 64,68]	] 74,78]	] 94,98]	] 114,118]	] 130,135]	] 140,145]
10	> 64	> 68	> 78	> 98	> 118	> 135	> 145

Nous établissons ensuite les matrices des comptes de transition, à partir desquelles on déduit les matrices des probabilités de transition. A titre d'illustration, l'estimé de la matrice des transitions de 0 à 84 jours est égal à :

$\hat{P}$ (0,84) =

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}0275 & 0{,}0157 & 0{,}1224 & 0{,}2254 & 0{,}3044 & 0{,}1778 & 0{,}0893 & 0{,}0346 & 0{,}0029 \\
0 & 0{,}0132 & 0{,}0130 & 0{,}0587 & 0{,}1728 & 0{,}2849 & 0{,}2137 & 0{,}1563 & 0{,}0780 & 0{,}0094 \\
0{,}0370 & 0{,}0108 & 0{,}0106 & 0{,}0513 & 0{,}1459 & 0{,}2455 & 0{,}2082 & 0{,}1855 & 0{,}0916 & 0{,}0136 \\
0{,}0900 & 0{,}0060 & 0{,}0075 & 0{,}0323 & 0{,}1051 & 0{,}1894 & 0{,}2022 & 0{,}2378 & 0{,}1094 & 0{,}0203 \\
0{,}0244 & 0{,}0041 & 0{,}0060 & 0{,}0264 & 0{,}0872 & 0{,}1660 & 0{,}2129 & 0{,}2950 & 0{,}1516 & 0{,}0264 \\
0{,}0119 & 0{,}0021 & 0{,}0036 & 0{,}0155 & 0{,}0563 & 0{,}1028 & 0{,}2116 & 0{,}4178 & 0{,}1391 & 0{,}0393 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}0173 & 0{,}0173 & 0{,}0948 & 0{,}0862 & 0{,}0344 & 0{,}7500 & 0 \\
0 & 0{,}0004 & 0{,}0008 & 0{,}0149 & 0{,}0248 & 0{,}0864 & 0{,}1417 & 0{,}2413 & 0{,}4703 & 0{,}0194 \\
0{,}0179 & 0{,}0019 & 0{,}0031 & 0{,}0216 & 0{,}0531 & 0{,}1322 & 0{,}1959 & 0{,}3370 & 0{,}2116 & 0{,}0257
\end{bmatrix}
$$

Cette méthode permet ainsi d'estimer les matrices qui caractérisent le plan d'alimentation considéré. Soit maintenant un deuxième lot de veaux indépendant du premier, dont on a observé les états. Par exemple pour un lot de 28 veaux nous avons obtenu :

$$
\begin{aligned}
X(0) &= [0\ 2\ 4\ 8\ 6\ \ 5\ 2\ 0\ 1\ 0] \\
X(14) &= [1\ 0\ 1\ 7\ 8\ \ 7\ 3\ 1\ 0\ 0] \\
X(28) &= [1\ 0\ 1\ 7\ 9\ \ 6\ 3\ 0\ 0\ 1] \\
X(42) &= [1\ 0\ 2\ 6\ 10\ 5\ 2\ 1\ 0\ 1] \\
X(56) &= [1\ 1\ 2\ 6\ 8\ \ 4\ 3\ 2\ 1\ 0] \\
X(70) &= [1\ 0\ 0\ 2\ 6\ \ 7\ 6\ 2\ 3\ 1] \\
X(84) &= [1\ 0\ 0\ 1\ 4\ \ 6\ 6\ 6\ 3\ 1]
\end{aligned}
$$

A partir de l'état initial on obtient les prédicteurs suivants des états :

$$\hat{X}(14) = [0{,}7304 \quad 0{,}2500 \quad 1{,}0004 \quad 7{,}5484 \quad 7{,}8507 \quad 7{,}0172 \quad 2{,}6732 \quad 0{,}5963 \quad 0{,}3334 \quad 0]$$

$$\hat{X}(28) = [0{,}9810 \quad 0{,}2500 \quad 1{,}5674 \quad 6{,}7332 \quad 8{,}6881 \quad 5{,}7228 \quad 2{,}5800 \quad 0{,}5477 \quad 0{,}2982 \quad 0{,}6316]$$

$$\hat{X}(42) = [0{,}9810 \quad 0{,}2500 \quad 2{,}1107 \quad 6{,}3592 \quad 10{,}0817 \quad 4{,}5925 \quad 2{,}1346 \quad 0{,}5605 \quad 0{,}2982 \quad 0{,}6316]$$

$$\hat{X}(56) = [0{,}9810 \quad 0{,}7781 \quad 1{,}8188 \quad 5{,}7690 \quad 8{,}2913 \quad 4{,}4417 \quad 2{,}8012 \quad 2{,}3106 \quad 0{,}4649 \quad 0{,}3155]$$

$$\hat{X}(70) = [0{,}9810 \quad 0{,}2596 \quad 0{,}5040 \quad 1{,}7864 \quad 6{,}2774 \quad 7{,}1231 \quad 5{,}6886 \quad 2{,}2715 \quad 2{,}5607 \quad 0{,}5477]$$

$$\hat{X}(84) = [0{,}9818 \quad 0{,}2553 \quad 0{,}2512 \quad 1{,}2617 \quad 3{,}5132 \quad 5{,}9708 \quad 5{,}786 \quad 6{,}2665 \quad 3{,}2769 \quad 0{,}5040]$$

L'application du test du paragraphe 7 de la première partie conduit aux valeurs suivantes :

$$\chi^2(14) = 1{,}0388 \quad \chi^2(28) = 1{,}6201 \quad \chi^2(42) = 1{,}1794$$
$$\chi^2(56) = 1{,}1302 \quad \chi^2(70) = 1{,}3022 \quad \chi^2(84) = 1{,}1568$$

ce qui nous conduit à accepter l'hypothèse selon laquelle le modèle qui correspond aux matrices tabulées est vérifiée avec un degré de confiance supérieur à 99 %.