REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

PHAM-DINH-TUAN

Problème de test d'hypothèses linéaires multiples en analyse de la variance

Revue de statistique appliquée, tome 19, nº 1 (1971), p. 77-85
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_1_77_0>

PROBLÈME DE TEST D'HYPOTHÈSES LINÉAIRES MULTIPLES EN ANALYSE DE LA VARIANCE

PHAM-DINH-TUAN

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Grenoble

1 - INTRODUCTION

Dans le modèle I d'Analyse de la Variance, les hypothèses (que ce soit une hypothèse à priori ou celles que l'on veut tester) sont toujours des hypothèses linéaires. Dans ce modèle, les observations sont des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ normales, indépendantes, de moyennes $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et de même variance σ^2. Le vecteur $\xi \in R^n$, de composantes $\xi_1, \ldots, \xi_n$ est supposé appartenir à un sous-espace vectoriel V de R^n (dim $V < n$). C'est l'hypothèse à priori. On s'intéresse à savoir si ξ appartient à un ou plusieurs sous-espaces vectoriels donnés $V_1, \ldots, V_k$ de V. Par exemple, considérons le cas d'un plan factoriel à deux facteurs. Si l'on fait l'hypothèse à priori qu'il n'y a pas d'intéraction entre les facteurs, les observations sont de la forme :

$$X_{ij} = \mu + \varepsilon_i^A + \varepsilon_j^B + e_{ij} \qquad i = 1, \ldots, I ; j = 1, \ldots, J$$

où μ et ε_i^A, $i = 1, \ldots, I$; ε_i^B, $j = 1, \ldots, J$ sont des constantes avec :

$$(1) \sum_{i=1}^{I} \varepsilon_i^A = 0 \qquad ; \qquad (2) \sum_{j=1}^{J} \varepsilon_i^B = 0$$

et e_{ij}, $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$ sont des variables aléatoires normales, indépendantes, centrées de variance commune σ^2.

Le terme μ représente la moyenne générale des observations, les termes ε_i^A, $i = 1, \ldots, I$ représentent l'effet du facteur A, les termes ε_i^B, $i = 1, \ldots, J$ celui du facteur B et les termes e_{ij}, $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$ tiennent compte des effets du hasard.

Ici le nombre des observations est $n = I.J$, et le vecteur $\xi \in R^n$, de composantes $\xi_{ij} = E\, X_{ij}$, $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$ appartient au sous-espace vectoriel

$$V = \left\{ \xi = (\xi_{ij}) : \xi_{ij} = \mu + \varepsilon_i^A + \varepsilon_j^B \;/\; \sum_{i=1}^{I} \varepsilon_i^A = 0,\ \sum_{j=1}^{J} \varepsilon_j^B = 0 \right\}$$

On pourra s'intéresser à déterminer si le facteur A n'a pas d'influence sur les observations, ce qui se traduit par $\varepsilon_i^A = 0$, $i = 1, \ldots, I$; c'est-à-dire que ξ appartient au sous-espace vectoriel :

$$V_1 = \left\{ \xi = (\xi_{ij}) \quad \xi_{ij} = \mu + \varepsilon_j^B / \sum_{j=1}^{J} \quad \varepsilon_j^B = 0 \right\}$$

De façon analogue, on pourra se demander si le facteur B n'a pas d'influence sur les observations, ce qui veut dire que ξ appartient au sous-espace vectoriel :

$$V_2 = \left\{ \xi = (\xi_{ij}) \quad \xi_{ij} = \mu + \varepsilon_i^A / \sum_{i=1}^{I} \quad \varepsilon_i^A = 0 \right\}$$

Les hypothèses que l'on pourra formuler sont :

H1 : $\xi \in V_1$, $\xi \in V_2$	pas d'influence de A et B
H2 : $\xi \in V_1$, $\xi \notin V_2$	Influence de B seul
H3 : $\xi \notin V_1$, $\xi \in V_2$	Influence de A seul
H4 : $\xi \notin V_1$, $\xi \notin V_2$	Influence de A et B

On a donc un problème de test d'hypothèses multiples. Il en est de même pour les plans factoriels à plusieurs facteurs, avec intéraction ou non entre les facteurs, à ceci près que l'on a un plus grand nombre de sous-espaces vectoriels $V_1, \ldots, V_k$ et plus d'hypothèses à tester.

Une manière naturelle de résoudre ce problème est d'effectuer séparément les tests de l'hypothèse $\xi \in V_i$ contre $\xi \in V_i$ pour chaque $i = 1, \ldots, k$ et de conclure suivant les résultats de ces tests. Dans l'exemple précédent, si par le premier test on est amener à accepter l'hypothèse $\xi \in V_1$ et par le second, on est amener à rejeter l'hypothèse $\xi \in V_2$, alors on choisira l'hypothèse H2. La suite de cet article est consacré à l'étude d'un tel procédé.

2 - DEFINITION DU PROBLEME ET LE TEST CORRESPONDANT

Soit n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, normales de moyennes respectives $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et de variance commune σ^2 ; le vecteur des moyennes $\xi \in \mathcal{R}^n$ est supposé appartenir à un sous-espace V de R^n.

Soient alors $V_1, \ldots, V_k$, k sous-espaces vectoriel de V (dim $V_i <$ dim V , $i = 1, \ldots, k$), on se propose, au vu d'une observation x de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ de choisir une des 2^k hypothèses :

$$H_J : \begin{array}{ll} \xi \in V_i & i \in J \\ \xi \in V_i & i \notin J \end{array}$$

où j est une partie de $\{1, \ldots, k\}$.

Désignons par W_i, l'orthogonal de V_i dans V et supposons que : *(C) Les sous-espaces vectoriels W_i, $i=1,\ldots,k$ sont orthogonaux deux à deux.*

La condition C est très importante, elle permet de réduire le problème de test par la considération de l'invariance.

Notons ξ_{W_i} la projection de ξ sur W_i . Les hypothèses à tester peuvent s'écrire d'une autre manière :

$$H_J \ : \ \xi_{W_i} = 0 \qquad i \in J$$

$$\xi_{W_i} \neq 0 \qquad i \in J$$

Le test que nous proposons est le suivant :

Désignons x_{W_i}, $i = 1, \ldots, k$, x_{V^*} les projections de l'observation x de $X \in R^n$ sur W_i , $i = 1, \ldots, k$ et sur V^* (V^* étant l'orthogonal de V dans R^n), on choisi l'hypothèse H_J si et seulement si

(2.1) $$\frac{||x_{W_i}||}{||x_{V^*}||} < \rho_i \qquad \forall i \in J$$

$$\frac{||x_{V_i}||}{||x_{V^*}||} > \rho_i \qquad \forall i \notin J$$

où ρ_i , $i = 1, \ldots, k$ sont des constantes données à l'avance.

On remarque qu'effectuer ce test équivaut à tester simultanément l'hypothèse $\xi_{W_i} = 0$ contre $\xi_{W_i} \neq 0$ pour chaque $i = 1, \ldots, k$, par la méthode de test d'hypothèses linéaire (le F-test).

3 - ETUDE DU TEST PRECEDENT

3.1. Test d'hypothèse multiple et fonction puissance

Soit X un élément aléatoire de loi de probabilité P_θ où θ est un paramètre inconnu, appartenant à un ensemble abstrait Θ. Soient $\Theta_1, \ldots, \Theta_k$ une partition de Θ en r parties, le problème de test d'hypothèses multiples est de décider au vu de l'observation x de X, l'une de k hypothèses :

$$H_i : \theta \in \Theta_i \qquad i = 1, \ldots, k$$

Un test est alors une fonction φ, mesurable de X dans R

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)).$$

telle que :

$$\varphi_i(x) \geq 0, \ i = 1, \ldots, k \ ; \ \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) = 1$$

où $\varphi_i(x)$ représente la probabilité que l'on accepte l'hypothèse H_i quand x est observé.

La performance d'un test φ s'exprime à l'aide de la fonction puissance $\beta(. \ ; \varphi)$ définie sur Θ et à valeurs dans R^k :

$$\beta(\theta \ ; \Theta) = E_{p_\theta}(\varphi) \qquad \theta \in \Theta$$

La composante $\beta_i(\theta \ ; \varphi) = E_{p_\theta}(\varphi_i)$ de $\beta(\theta \ ; \varphi)$ représente la probabilité que l'on accepte l'hypothèse H en utilisant le test φ et quand P_θ est la vraie ici. Un test est d'autant meilleur que si β_i (θ ; φ) est d'autant petit quand $\theta \notin \Theta_i$

3.2. Propriétés optimales du test précédent :

On trouvera quelques propriétés optimales et une étude plus complète du test précédent dans PHAM-DINH [3]. On remarque que l'on a affaire à un problème de décision et que l'optimalité d'une procédure de décision s'étudie ici au niveau de la fonction du risque correspondant à une fonction de coût très simple.

4 - FONCTION PUISSANCE DU TEST (2.1) . RESULTAT NUMERIQUE DANS LE CAS DE DEUX HYPOTHESES LINEAIRES

La fonction puissance du test (2.1) définie dans § 2 est une fonction à valeurs dans R^{2k} , soit β (θ) dont les composantes sont

$$\beta_J(\theta) = P_\theta \, \{\text{accepter hypothèse } H_J\} \qquad \theta = \xi \;, \sigma^2)$$

$$= P_\theta \left\{ \frac{||X_{W_i}||^2}{||X_{V*}||^2} < \rho_i \qquad i \in J \; ; \frac{||X_{W_i}||^2}{||X_{V*}||^2} > \rho_i \;\; \forall i \in J \right\}$$

Introduisons les variables aléatoires :

$$U_i = \frac{||X_{W_i}||^2}{\sigma^2} \qquad i = 1, \ldots, k$$

$$U_o = \frac{||X_{V*}||^2}{\sigma^2}$$

Les variables aléatoires U_i, $i = 1, \ldots, k$ suivent des lois du χ^2 décentrées à $n_i = \dim W_i = \dim V - \dim V_i$ degrés de liberté et de paramètre de décentrage $p_i = ||\xi_{W_i}||^2/\sigma^2$ et la variable aléatoire U_o suit une loi du χ^2 centrée à $n_o = n - \dim V$ degrés de liberté.

La fonction puissance du test se déduit donc de la loi de probabilité du k-tuples $(U_1/U_o, \ldots, U_k/U_o)$, elle est une fonction de $(p_1, \ldots, p_k)$ et dépend des degrés de liberté n_o, $n_1, \ldots, n_k$ ainsi que les séparatrices paratrices $\rho_1 \ldots, \rho_k$ qui définissent le test

Dans le cas où $k = 2$, la fonction puissance a quatre composantes

$$\beta_{\{1,2\}} = P \left\{ \frac{U_1}{U_o} < \rho_1 \;,\; \frac{U_2}{U_o} < \rho_2 \right\}$$

$$\beta_{\{1\}} = P \left\{ \frac{U_1}{U_o} < \rho_1 \;,\; \frac{U_2}{U_o} > \rho_2 \right\}$$

$$\beta_{\{2\}} = P \left\{ \frac{U_1}{U_o} < \rho_1 \;,\; \frac{U_2}{U_o} > \rho_2 \right\}$$

$$\beta_{\Phi} = P \left\{ \frac{U_1}{U_o} > \rho_1 \;,\; \frac{U_2}{U_o} > \rho_2 \right\}$$

Table 1

FONCTION DE PUISSANCE

$\alpha = 0.05$, $n_o = 12$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$

Probabilités de décider

$p_1 = p_2 = 0$	$p_1 > 0$ $p_2 = 0$
$p_1 = 0$ $p_2 > 0$	$p_1 > 0$ $p_2 > 0$

p_2 \ p_1	0.0	5.0	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
0.0	0.090 0.041 0.041 0.009	0.699 0.251 0.021 0.029	0.460 0.490 0.009 0.041	0.271 0.679 0.004 0.046	0.146 0.804 0.001 0.049	0.074 0.876 0.000 0.050	0.036 0.914 0.000 0.050
5.0	0.052 0.019 0.298 0.031	0.528 0.142 0.193 0.137	0.366 0.305 0.104 0.226	0.225 0.446 0.049 0.280	0.126 0.545 0.022 0.308	0.066 0.605 0.008 0.321	0.032 0.638 0.003 0.326
10.0	0.387 0.007 0.563 0.043	0.329 0.066 0.392 0.214	0.241 0.154 0.229 0.376	0.156 0.239 0.118 0.487	0.092 0.303 0.056 0.550	0.050 0.344 0.025 0.581	0.026 0.368 0.010 0.595
15.0	0.203 0.002 0.747 0.048	0.178 0.026 0.542 0.253	0.137 0.068 0.333 0.463	0.094 0.111 0.181 0.614	0.058 0.147 0.090 0.705	0.033 0.172 0.041 0.754	0.018 0.187 0.018 0.777
20.0	0.097 0.001 0.853 0.049	0.088 0.009 0.633 0.270	0.070 0.027 0.400 0.503	0.050 0.047 0.224 0.679	0.033 0.065 0.115 0.788	0.019 0.078 0.055 0.848	0.011 0.086 0.025 0.878
25.0	0.043 0.000 0.907 0.050	0.040 0.003 0.681 0.276	0.033 0.010 0.437 0.520	0.025 0.018 0.249 0.707	0.017 0.026 0.131 0.826	0.011 0.033 0.064 0.893	0.006 0.037 0.030 0.927

Une procédure Algol permet de calculer les quatre composantes de la fonction puissance pour chaque valeur de n_o, n_1, n_2, p_1, p_2, et ρ_1, ρ_2.

Comme exemple, reprenons le plan factoriel à deux facteurs sans interaction. On prend I = 5, J = 4. Il est facile de voir que :

$$\dim V = I + J - 1 = 8$$

$$\dim V_1 = J \qquad = 4$$

$$\dim V_2 = I \qquad = 5$$

D'où $n_o = 12$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$.

D'autre part, on choisira les séparatrices ρ_1, ρ_2 de façon que

$$P \left\{ \frac{U_i}{U_o} \quad \rho_i \right\} = 1 - \alpha \qquad \text{quand } p_i = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

où α est un nombre compris entre 0, et 1. Pour $\alpha = 5\,\%$, on a :

$$\rho_1 = 1.08637, \quad \rho_2 = 0.87259.$$

Dans la table 1, on a listé, pour chaque couple p_1, p_2 les quatre probabilités de décider les quatre hypothèse :

$H_1 : p_1 = p_2 = 0$ (en haut à gauche), $H_2 : p_1 > 0$, $p_2 = 0$ (en haut, à droite), H3 : $p_1 = 0$, $p_2 > 0$ (en bas à gauche), H4 : $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ (en bas à droite). On voit que l'erreur de décision (par exemple, décider H_j, $j \neq i$ quand H_i, $i = 1, \ldots, 4$ s'est réalisée) est moins que 5 % si p_1 n'est pas comprise entre 0 et 30.0 et p_2 n'est pas compris entre 0 et 25.0. Plus précisément, soit p_i^*, $i = 1, 2$, définis par

$$P \left\{ \frac{U_i}{U_o} < \rho_i / p_i = p_i^* \right\} = \alpha \qquad i = 1, 2.$$

où ρ_i, $i = 1, 2$ sont les séparatrices du test, alors le test est valable pour tester les hypothèses :

$$H_1' : p_1 = p_2 = 0$$

$$H_2' : p_1 > p_1^* \text{ , } p_2 = 0$$

$$H_3' : p_1 = 0 \text{ ; } p_2 > p_2^*$$

$$H_4' : p_1 > p_1 \text{ , } p_2 > p_2 .$$

Les probabilités pour chaque types d'erreur de décision seront inférieures à α.

La valeur de p_i^* ne dépend que de n_i, n_o et α : $p_i^* \doteq p^*(n_i, n_o, \alpha)$ où $p^*(n_i, n_o, \alpha)$ est donné par

$$\int_0^{\rho} f_{n_1, n_0}(0, x)\, dx = 1 - \alpha$$

$$\int_0^{\rho} f_{n_1, n_0}(p^*, x)\, dx = \alpha$$

$f_{n_1,n_0}(p,x)$ étant la densité de la loi β décentrée de paramètre $n_1/2$, $n_0/2$ et de paramètre de décentrage $p/2$, soit :

$$f_{n_1,n_0}(p,x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-p/2} \frac{(p/2)^j}{j!} \frac{\Gamma((n_0+n_1)/2+j)}{\Gamma(n_0/2)\,\Gamma(n_1/2+j)} \frac{x^{n_1/2-1+j}}{(1+x)\; n_1+n_2)/2+j}$$

On a tabulé les valeurs de $p^*(n_1, n_0 ; \alpha)$ pour $= 0.05$ (table 2) et pour $\alpha = 0.10$ (table 3) et pour $n_0 = 1$ (1) 20, $n_1 = 1$ (1) (1) 20.

Dans l'exemple précédent, $n_0 = 12$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$; on trouve pour $\alpha = 0.05$ $p^*_1 = 27.74$ $p^*_2 = 24.12$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HISLEUR G. -Exemple d'utilisation d'un calculateur en Statistique (Chapitre 3). Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Grenoble (1969).

[2] FERGUSON, TH. S. -Mathematical Statistics. A decision theoretic approach (Chapitre 6). Academic press, New York (1967).

[3] PHAM-DINH T. - Contributions à l'Analyse de la Variance et aux plans d'expérience (chapitre 1). Thèse présentée à la faculté des Sciences de Grenoble (1970).

Table 2

PARAMETRE DE DECENTRAGE A PARTIR DUQUEL LE TEST DISTINGUE LES HYPOTHESES

$\alpha = .05$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	624.2	1544	2490	3490	4486	5455	6423	7370	8334	9383	11410	12597								
2	60.40	117.8	175.1	232.6	290.1	347.6	404.8	442.0	520.0	577.6	636.8	692.8	749.4	807.4	865.6	923.6	978.9	1038	1097	1152
3	31.97	54.39	76.12	97.63	119.0	140.4	161.7	183.0	204.3	225.6	246.7	268.0	289.2	310.6	331.7	353.1	374.2	395.5	416.7	438.1
4	24.29	38.03	51.03	63.75	76.34	88.37	101.4	113.8	126.2	138.7	151.0	163.4	175.8	188.2	200.6	213.0	225.4	237.8	250.1	262.5
5	20.92	31.06	40.43	49.51	58.46	67.32	76.14	84.93	93.69	102.4	111.2	119.9	128.6	137.3	146.0	154.7	163.4	172.1	180.8	189.5
6	19.07	27.28	34.73	41.89	48.89	55.82	62.70	69.54	76.36	83.13	89.91	96.70	103.4	110.2	116.9	123.7	130.4	137.1	143.9	150.6
7	17.90	24.95	31.22	37.20	43.04	48.78	54.46	60.10	65.71	71.32	76.89	82.45	88.01	93.55	99.10	104.6	110.2	115.7	121.2	126.7
8	17.11	23.37	28.56	34.05	39.09	44.04	48.92	53.76	58.57	63.36	68.14	72.89	76.64	82.38	87.11	91.84	96.57	101.3	106.0	110.7
9	16.54	22.23	27.17	31.80	36.27	40.64	44.96	49.23	53.47	57.68	61.88	66.06	70.23	74.39	78.54	82.70	86.82	90.96	95.09	99.21
10	16.10	21.37	25.89	30.11	34.16	38.11	42.00	45.84	49.64	53.43	57.19	60.94	64.68	68.39	72.11	75.82	79.52	83.23	86.91	90.60
11	15.76	20.71	24.90	28.79	32.52	36.14	39.70	43.21	46.68	50.13	53.55	56.96	60.36	63.75	67.12	70.49	73.55	77.21	80.55	83.91
12	15.49	20.18	24.12	27.74	31.21	34.57	37.86	41.11	44.31	47.49	50.65	53.79	56.92	60.04	63.14	66.23	69.32	72.40	75.48	78.55
13	15.26	19.74	23.47	26.89	30.14	33.29	36.37	39.39	42.38	45.34	48.28	51.20	54.11	57.00	59.88	62.75	65.62	68.48	71.33	74.18
14	15.07	19.38	22.94	26.18	29.26	32.23	35.13	37.97	40.78	43.56	46.31	49.05	51.77	54.47	57.18	59.86	62.54	65.21	67.88	70.54
15	14.91	19.07	22.48	25.58	28.51	31.33	34.08	36.77	39.43	42.05	44.65	47.23	49.79	52.35	54.89	57.42	59.94	62.46	64.96	67.47
16	14.78	18.81	22.10	25.07	27.87	30.56	21.18	35.74	38.27	40.76	43.23	45.68	48.11	50.52	52.93	55.33	57.71	60.10	62.47	64.84
17	14.66	18.58	21.76	24.63	27.32	29.90	32.40	34.86	37.27	39.64	42.00	44.33	46.64	48.95	51.24	53.52	55.79	58.05	60.31	62.56
18	14.56	18.39	21.47	24.24	26.83	29.32	31.73	34.08	36.40	38.67	40.93	43.16	45.37	47.57	49.76	51.93	54.11	56.27	58.42	60.57
19	14.46	18.21	21.21	23.90	26.41	28.81	31.13	33.40	35.62	37.81	39.98	41.12	44.25	46.36	48.46	50 54	52.62	54.69	56.75	58.81
20	14.38	18.06	20.98	23.60	26.03	28.36	30.60	32.79	34.94	37.06	39.14	41.21	43.25	45.29	47.30	49.31	51.30	53.29	55.28	57.25

Table 3

PARAMETRE DE DECENTRAGE A PARTIR DUQUEL LE TEST DISTINGUE LES HYPOTHESES

$\alpha = 0.10$

n_0 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	106.6	209.5	435.3	603.5	772.8	942.2	1115	1285	1455	1630	1797	1978	2147	2314	2477	2664	2836	2981	3197	3313
2	23.13	43.94	64.79	85.62	106.5	127.4	148.4	169.1	189.9	210.8	231.6	252.5	273.4	294.0	315.0	335.9	356.7	377.8	398.7	419.6
3	15.43	25.71	35.67	45.50	55.29	65.06	74.79	84.54	94.27	104.0	113.7	123.4	133.1	142.8	152.5	162.2	172.0	181.6	191.3	201.1
4	13.00	20.05	26.73	33.25	39.71	46.11	52.50	58.87	65.24	71.58	77.93	84.27	90.60	96.93	103.3	109.6	115,9	122.3	128.6	134.9
5	11.78	17.40	22.56	27.55	32.46	37.32	42.14	46.96	51.75	56.54	61.31	66.08	70.84	75.61	80.37	85.13	89.88	94.63	93.37	104.1
6	11.09	15.88	20.19	24.31	28.33	32.31	36.25	40.17	44.07	47.96	51.84	55.71	59.57	63.43	67.29	71.14	75.00	78.85	82.70	86.54
7	10.64	14.90	18.66	22.22	25.69	29.09	32.46	35.80	39.13	42.44	45.74	49.03	52.31	55.60	58.86	61.14	65.40	68.68	71.94	75.20
8	10.33	14.22	17.59	20.77	23.85	26.86	29.83	32.77	35.70	38.60	41.50	44.39	47.26	50.13	53.00	55.87	58.73	61.58	64.43	67.29
9	10.10	13.71	16.82	19.71	22.50	25.22	27.90	30.54	33.17	35.78	38.38	40.96	43.54	46.11	48.68	51.25	53.80	56.36	58.90	61.46
10	9.92	13.33	15.22	18.90	21.47	23.97	26.42	28.84	31.24	33.62	35.99	38.35	40.69	43.04	45.36	47.70	50.03	52.34	54.66	56.98
11	9.78	13.02	15.75	18.26	20.65	22.97	25.26	27.50	29.72	31.92	34.10	36.28	38.44	40.60	42.75	44.89	47.04	49.17	51.30	53.43
12	9.66	12.78	15.37	17.74	19.99	22.18	24.31	26.41	28.48	30.54	32.57	34.60	36.61	38.62	40.62	42.62	44.61	46.59	48.57	50.55
13	9.57	12.58	15.05	17.31	19.45	21.52	23.53	25.51	27.46	29.40	31.31	32.21	35.10	36.99	38.87	40.73	42.60	44.46	46.32	48.17
14	9.49	12.40	14.79	16.95	19.00	20.96	22.88	24.76	26.61	28.44	30.25	32.04	33.83	35.61	37.38	39.14	40.91	42.66	44.41	46.16
15	9.42	12.26	14.57	16.65	18.61	20.49	22.32	24.12	25.88	27.62	29.35	31.05	32.75	34.44	36.12	37.79	39.46	41.13	42.79	44.44
16	9.36	12.13	14.37	16.39	18.28	20.09	21.84	23.56	25.25	26.92	28.56	30.20	31.82	33.43	35.03	36.63	38.22	39.80	41.38	42.96
17	9.31	12.03	14.21	16.16	17.99	19.73	21.42	23.08	24.70	26.30	27.88	29.45	31.00	32.54	34.08	35.61	37.13	38.65	40.15	41.66
18	9.27	11.93	14.06	15.96	17.73	19.42	21.06	22.65	24.22	25.76	27.28	28.79	30.29	31.77	33.24	34.71	36.17	37.62	39.07	40.52
19	9.23	11.85	13.93	15.78	17.50	19.15	20.73	22.28	23.79	25.28	26.76	28.21	29.65	31.08	32.50	33.92	35.32	36.72	35.12	39.51
20	9.19	11.77	13.81	15.62	17.31	18.90	20.45	21.95	23.42	24.86	26.28	27.69	29.08	30.47	31.84	33.21	34.57	35.92	37.26	38.61