Revue de statistique appliquée

Pierre Dagnelie

L'ordinateur et l'enseignement de la statistique

Revue de statistique appliquée, tome 19, n° 1 (1971), p. 5-15

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_1_5_0>

L'ORDINATEUR ET L'ENSEIGNEMENT DE LA STATISTIQUE

Pierre DAGNELIE

Faculté des Sciences Agronomiques de l'Etat, Gembloux (Belgique)

1 - INTRODUCTION ET RÉSUMÉ

Cet article a pour objectif de montrer comment l'utilisation d'un petit ordinateur scientifique peut contribuer à rendre sensiblement plus efficace l'enseignement de la statistique appliquée.

Le paragraphe 2 nous permettra de définir tout d'abord le cadre général dans lequel le travail a été réalisé. Ensuite, différentes parties de l'enseignement de la statistique seront successivement prises en considération : l'enseignement de la statistique descriptive (paragraphe 3), l'enseignement des principes (paragraphe 4) et des méthodes (paragraphe 5) d'inférence statistique, et le contrôle des connaissances (paragraphe 6). L'ensemble sera suivi d'une discussion et de quelques conclusions (paragraphe 7).

2 - CADRE GÉNÉRAL

2.1. Les essais dont il est fait état ici ont été réalisés à partir de 1966 à la Faculté des sciences agronomiques de Gembloux (Belgique), qui délivre, normalement après cinq années d'études, les diplômes d'ingénieur agronome (y compris certaines orientations particulières telles que : eaux et forêts, génie rural, etc.) et d'ingénieur chimiste et des industries agricoles. L'enseignement de la statistique y est évidemment donné en tenant compte du fait qu'il s'adresse à de futurs utilisateurs de l'outil statistique, et non à de futurs théoriciens ou à de futurs "professionnels" de la statistique. Les bases théoriques ne sont cependant pas négligées pour autant, l'enseignement ne pouvant en aucune façon être constitué à ce niveau du simple énoncé d'un certain nombre de recettes.

2.2. D'une façon générale, les cours de statistique sont conçus de manière à passer progressivement du concret à l'abstrait. La première partie, la plus théorique, commence par l'étude de la statistique descriptive (distributions observées à une et à deux dimensions), comprend ensuite l'étude des distributions théoriques (à une et à deux dimensions également), et se termine par l'exposé des principes de base de l'inférence statistique (distributions d'échantillonnage, estimation et tests d'hypothèses) [DAGNELIE, 1969]. La deuxième partie, plus appliquée, a pour but de présenter les méthodes les plus courantes d'inférence statistique (méthodes relatives aux moyennes et aux variances, tests d'ajustement et d'indépendance, analyse de la variance à un et à deux critères de classification, comparaisons multiples de moyennes, méthodes relatives à la régression et à la corrélation, transformations de variables) [DAGNELIE, 1970].

L'ensemble se donne en 90 heures environ, dont approximativement un quart est consacré à des exposées *ex cathedra*, un quart à des séances de discussion et d'explications et la moitié à des séances d'exercices. L'auditoire réunit, selon les années, de cinquante à cent étudiants, répartis en groupes plus restreints pour les séances d'exercices. Dans ces conditions, l'enseignement de la statistique demande évidemment un effort important de la part des étudiants.

2.3. L'ordinateur utilisé est une unité IBM 1620 de petite dimension (capacité de mémoire de 20.000 chiffres décimaux, entrée et sortie par ruban perforé).

3 - L'ENSEIGNEMENT DE LA STATISTIQUE DESCRIPTIVE

Dans le domaine de la statistique descriptive, l'ordinateur permet essentiellement de préparer des séries d'exercices semblables, mais constitués de données numériques différentes. La résolution de ces exercices oblige les étudiants à travailler dans une large mesure indépendamment les uns des autres, sans qu'aucune surveillance directe ne soit nécessaire. De plus, l'ordinateur peut fournir une solution détaillée pour chacun de ces exercices.

Ces solutions facilitent grandement la correction des travaux et peuvent ensuite être remises aux étudiants, en même temps que leurs propres feuilles de réponse.

La figure 1 reproduit le premier d'une série d'exercices fournis par un programme permettant, d'une part, de constituer un nombre donné d'échan-

1

DONNEES

19.7
20.8
20.6
21.3
20.0
19.1
22.2
22.2

1

CALCUL DES PRINCIPAUX PARAMETRES

EFFECTIF	8.	MOYENNE	20.74
SOMME	165.9	VARIANCE	1.11
S.C.	3449.27	EC.T.	1.06
S.C.E.	8.92	C.V.	5.1

Figure 1 - Exemple d'exercice de statistique descriptive à une dimension : échantillon de huit observations extrait d'une population normale de moyenne 20 et d'écart-type 2, et calcul des principaux paramètres.

tillons, d'effectif fixé, extraits par simulation d'une population normale de moyenne et d'écart-type donnés, et d'autre part, de calculer les principaux paramètres caractérisant ces différents échantillons (moyenne, variance, écart-type et coefficient de variation). Normalement, la première partie (énoncé) est donnée à l'étudiant lors d'une première séance d'exercices et la seconde partie (solution) lui est remise ultérieurement, en même temps que sa réponse corrigée.

D'autres programmes semblables ont été conçus, ou pourraient l'être, pour traiter également des distributions de fréquences à une dimension ou certains problèmes de statistique descriptive à deux dimensions (corrélation et régression linéaire notamment).

4 - L'ENSEIGNEMENT DES PRINCIPES D'INFÉRENCE STATISTIQUE

4.1. Au début du cours, les programmes décrits ci-dessus sont utilisés sans aucune allusion aux notions théoriques sous-jacentes, telle que la notion de distribution normale. Ultérieurement, les mêmes programmes permettent non seulement d'introduire par analogie les notions de distributions théoriques, mais aussi de familiariser les étudiants avec les concepts d'échantillonnage et de distribution d'échantillonnage : les moyennes et les variances obtenues par les différents étudiants constituent en effet une illustration de deux distributions d'échantillonnage. Le programme en question donne d'ailleurs, en plus des exercices individuels, certains résultats récapitulatifs, dont la moyenne générale et l'écart-type des moyennes. On en déduit facilement la notion d'erreur-standard de la moyenne.

4.2. Une autre variante du même programme donne, pour chaque échantillon, les limites de confiance de la moyenne, calculées en supposant connu l'écart-type de la population. On peut ainsi introduire de façon relativement concrète la notion d'intervalle de confiance de la moyenne. En particulier, la connaissance des paramètres de la population permet d'illustrer *a posteriori* la notion de degré de confiance, en observant la proportion des étudiants qui ont effectivement obtenu des limites de confiance entourant la "vraie" moyenne et la proportion des étudiants dont l'intervalle de confiance ne contient pas cette "vraie valeur".

De tels exercices mettent en général bien en évidence l'importance des fluctuations aléatoires, que les étudiants (et souvent même les utilisateurs de l'outil statistique) n'ont que trop tendance à négliger, croyant toujours que "le hasard fait bien les choses".

4.3. Un programme analogue a été préparé pour aborder l'étude des tests d'hypothèses. Il fournit des séries de problèmes comportant chacun deux échantillons extraits de populations normales, de moyennes éventuellement différentes mais de même variance, ainsi que les solutions de ces problèmes, c'est-à-dire les principales étapes et le résultat des tests d'égalité des moyennes.

L'utilisation de ce programme permet en particulier d'introduire de façon concrète la notion de puissance du test. L'exemple suivant, qui s'est présenté récemment, en témoigne.

Au cours d'une première séance, vingt étudiants reçoivent des données provenant de populations normales de moyennes $m_1 = m_2 = 10$ et d'écart-type $\sigma = 3$ (seul l'écart-type est connu des étudiants et les données de départ sont fournies avec une décimale, pour des échantillons d'effectif 10) ; vingt autres étudiants reçoivent des données de paramètres $m_1 = 10$, $m_2 = 11$ et $\sigma = 3$; vingt autres encore des données de paramètres $m_1 = 10$, $m_2 = 12$ et $\sigma = 3$; etc. Chaque étudiant réalise immédiatement le test d'égalité des deux moyennes et remet sa solution.

Au début de la séance suivante, les exercices corrigés sont distribués, en même temps que les solutions fournies par l'ordinateur. Une discussion générale permet alors de constater que l'hypothèse d'égalité des moyennes a dû être rejetée une fois parmi les vingt premiers cas ($m_1 = m_2$), deux fois parmi les vingt cas suivants ($m_2 - m_1 = 1$), puis successivement six fois ($m_2 - m_1 = 2$), onze fois ($m_2 - m_1 = 3$) et quinze fois ($m_2 - m_1 = 4$). Ces constatations illustrent les notions d'erreurs de première et de deuxième espèces, en montrant notamment comment la fréquence de cette dernière peut varier en fonction du degré de fausseté de l'hypothèse nulle.

Enfin, après un exposé théorique de la notion de puissance, le calcul permet de constater, au cours d'une troisième séance, que la probabilité de rejet de l'hypothèse nulle est, selon les cas, de 5 %, 12 %, 32 %, 61 % et 85 %, alors que les fréquences observées étaient égales à 5 %, 10 %, 30 %, 55 % et 75 %. Il s'agit là évidemment d'une concordance particulièrement bonne entre la théorie et l'observation.

5 - L'ENSEIGNEMENT DES MÉTHODES D'INFÉRENCE STATISTIQUE

5.1. Les principes exposés ci-dessus peuvent être étendus à toutes les méthodes d'inférence statistique, et nous disposons effectivement d'une série de programmes permettant de traiter les problèmes suivants : intervalle de confiance d'une moyenne et test d'égalité de deux moyennes pour des échantillons indépendants ou associés par paires (la variance de la ou des populations étant inconnue), test d'égalité de deux variances, analyse de la variance à un critère de classification (avec effectifs égaux ou inégaux et, éventuellement, estimation des composantes de la variance), calcul et test de signification d'un coefficient de corrélation.

De plus, un énoncé concret est imprimé dans certains cas avant les données numériques obtenues par simulation ; la figure 2 en fournit un exemple.

V.3.3

LA HAUTEUR DE CINQ ARBRES CHOISIS AU HASARD EN FORÊT A ÉTÉ MESURÉE DEUX FOIS. A PARTIR DES RÉSULTATS SUIVANTS, EFFECTUEZ L'ANALYSE DE LA VARIANCE, ESTIMEZ LA VARIABILITÉ ENTRE ARBRES ET ENTRE MESURES (ÉCART-TYPE ENTRE ARBRES ET ENTRE MESURES), ET CALCULEZ LA HAUTEUR MOYENNE GÉNÉRALE ET SES LIMITES DE CONFIANCE.

ARBRES

1	2	3	4	5
29.2	27.4	29.2	28.5	29.9
28.5	29.2	28.4	27.5	28.1

Figure 2 - Exemple de problème concret d'inférence statistique.

5.2. L'examen d'une série de problèmes semblables, obtenus par simulation, s'avère particulièrement intéressant également en ce qui concerne les comparaisons multiples de moyennes. Chacun sait que l'on dispose dans ce domaine de nombreuses méthodes, mais peu de statisticiens réalisent vraisemblablement les mécomptes auxquels peut conduire l'emploi abusif de ces méthodes. L'exemple suivant en donne une assez bonne idée, bien qu'il ne prenne en considération que trois solutions du problème : la méthode de la plus petite différence significative, la méthode de NEWMAN et KEULS (ou STUDENT-NEWMAN-KEULS) et la méthode de DUNNETT [DAGNELIE, 1965 et 1970].

Des échantillons de huit individus ont été prélevés quarante fois, par simulation, dans cinq populations normales (A, B, C, D, E) de moyennes $m_A = m_B = 20$, $m_C = m_D = m_E = 22$, et d'écart-type $\sigma = 2$. Ces observations ont été soumises successivement à l'analyse de la variance à un critère de classification et aux trois méthodes qui viennent d'être citées. Le tableau 1 résume les différentes conclusions obtenues.

Les trois premières colonnes donnent l'essentiel des résultats des analyses de la variance, c'est-à-dire : les carrés moyens factoriels CM_a, les carrés moyens résiduels CM_r et les rapports F_{obs}. Les deux colonnes suivantes réunissent les différentes moyennes observées, classées d'une part selon la méthode de la plus petite différence significative et d'autre part selon la méthode de NEWMAN et KEULS. Enfin, la dernière colonne indique, au sens de DUNNETT, les "traitements" qui diffèrent significativement du "traitement A", considéré comme témoin.

En examinant ce tableau, on constate tout d'abord que l'analyse de la variance n'a pas révélé l'existence de différences significatives dans 9 cas sur 40 (22,5 %). Quant aux 31 autres cas, ils sont répartis en cinq catégories, d'après les résultats des tests de la plus petite différence significative et de NEWMAN et KEULS. Ces différentes catégories sont les suivantes :

- identification exacte des deux groupes de moyennes (A-B et C-D-E) par les deux méthodes : 6 cas (15 %) ;

- identification exacte des deux groupes de moyennes par la méthode de la plus petite différence significative et chevauchement des deux groupes (erreur de deuxième espèce) par la méthode de NEWMAN et KEULS : 1 cas (2,5 %) ;

- chevauchement des deux groupes ou apparition d'un groupe intermédiaire par la méthode de la plus petite différence significative et absence de toute différence significative par la méthode de NEWMAN et KEULS (erreurs de deuxième espèce, plus ou moins importantes, pour les deux méthodes) : 5 cas (12,5 %) ;

- chevauchement des deux groupes et/ou apparition d'un groupe intermédiaire par les deux méthodes (erreurs de deuxième espèce) : 10 cas (25 %) ;

- chevauchement des deux groupes et/ou apparition d'un ou plusieurs groupes intermédiaires par les deux méthodes, avec en outre une définition inexacte des groupes par la méthode de la plus petite différence significative (erreurs de première et de deuxième espèces par cette dernière méthode et erreurs de deuxième espèce uniquement par la méthode de NEWMAN et KEULS) : 4 cas (10 %) ;

- définition inexacte des groupes par les deux méthodes (erreurs de première et de deuxième espèces) : 5 cas (12,5 %).

Pour les données examinées ici, on constate donc que les deux méthodes conduisent le plus souvent à des conclusions erronées, dans un sens ou dans l'autre. Aucune des deux ne s'avère d'ailleurs nettement supérieure à l'autre, la seule distinction résidant, comme il fallait s'y attendre, en un équilibre différent des risques de première et de deuxième espèces.

La méthode de DUNNETT, qui s'applique au problème particulier de la comparaison avec un témoin, a l'avantage de réduire le nombre de tests effectués et, de ce fait même, de limiter dans une certaine mesure les risques d'erreur. Associée à l'analyse de la variance, cette méthode ne met aucune différence en évidence dans 13 cas sur 40 (32,5 %) ; elle conduit à la solution exacte du problème dans 8 cas sur 40 (20 %) ; et elle fournit une solution partielle dans 17 cas sur 40 (deux différences significatives au lieu de trois sont trouvées dans 11 cas sur 40, soit 27,5 %, et une dans 6 cas sur 40, soit 15 %). Enfin, la méthode de DUNNETT donne une réponse inexacte (erreur de première espèce) dans 2 cas sur 40 (5 %).

Cet exemple montre combien les fluctuations aléatoires peuvent être importantes en ce qui concerne les conclusions obtenues par ces méthodes. Il apporte également une justification supplémentaire à l'affirmation du fait qu'il y a lieu d'éviter autant que possible l'emploi de ces méthodes, notamment en définissant de façon précise le but de toute expérimentation [DAGNELIE, 1970].

6 - LE CONTROLE DES CONNAISSANCES

6.1. En ce qui concerne le contrôle des connaissances en cours d'année, l'ordinateur permet un usage facile de tests constitués de questions à choix multiple. La préparation et la réalisation de tels tests ne demandent en effet qu'un minimum de temps, et leur correction n'exige qu'une perforation des numéros des réponses choisies par les étudiants et un bref passage en ordinateur.

En outre, l'utilisation de l'ordinateur pour effectuer la correction de ces tests permet d'obtenir très facilement, non seulement des résultats moyens par étudiant, mais aussi des résultats moyens par question, tel que par exemple, pour les différentes questions, les proportions de réponses exactes. Ces derniers résultats sont particulièrement précieux pour les enseignants, car ils fournissent des indications précises sur le degré de difficulté des différentes questions et, éventuellement, sur les lacunes de l'enseignement.

Enfin, la réalisation de tests formés de questions à choix multiple est l'occasion d'une illustration de la notion d'espérance mathématique. Le problème suivant peut en effet être posé : étant donné une question pour laquelle k réponses sont proposées, étant donné qu'un point est attribué si la réponse exacte est indiquée, quelle pénalisation (note négative) faut-il attribuer aux k-1 autres réponses pour qu'en moyenne, un choix complètement aléatoire conduise à un résultat nul ?

6.2. Nous utilisons normalement, dans ce domaine, des séries de 20 questions, qui peuvent être résolues en une vingtaine de minutes. A titre d'exemples, les trois questions suivantes sont extraites d'un test réalisé à la fin de l'étude de la statistique descriptive à une et à deux dimensions :

Les fréquences relatives sont obtenues :

1/ en divisant les fréquences absolues par l'intervalle de classes.

2/ en divisant les fréquences absolues par le nombre de classes.

3/ en divisant les fréquences absolues par l'effectif.

Pour les distributions en j, le polygone de fréquences cumulées :

1/ possède une concavité tournée vers le bas.

2/ est pratiquement rectiligne.

3/ possède une concavité tournée vers le haut.

La variance résiduelle de y est :

1/ parfois inférieure à la variance marginale de y.

2/ toujours supérieure à la variance marginale de y.

3/ toujours inférieure à la variance marginale de y.

4/ parfois supérieure à la variance marginale de y.

La correction du test permet de chiffrer le niveau de difficulté de ces différentes questions : nous avons en effet observé récemment 97 % de réponses exactes pour la première, 76 % pour la deuxième et 44 % pour la troisième.

De même, les questions suivantes, posées à la fin de l'étude des distributions théoriques à une et à deux dimensions, correspondent à des niveaux de difficulté très différents (respectivement 89 %, 73 % et 23 % de réponses exactes, pour la même promotion d'étudiants) :

La somme de deux ou plusieurs variables normales réduites indépendantes est :

1/ une variable normale.

2/ une variable t de STUDENT.

3/ une variable χ^2 de PEARSON.

Est-il vrai que :

1/ l'indépendance stochastique de deux variables aléatoires entraîne toujours la nullité de leur coefficient de corrélation ?

2/ la nullité du coefficient de corrélation de deux variables aléatoires entraîne toujours leur indépendance stochastique ?

3/ l'indépendance stochastique de deux variables aléatoires entraîne parfois la nullité de leur coefficient de corrélation ?

Pour une distribution théorique à deux dimensions, les variances conditionnelles sont :

1/ toujours supérieures à la variance marginale correspondante.

2/ toujours inférieures à la variance marginale correspondante.

3/ parfois inférieures, parfois supérieures, parfois égales à la variance marginale correspondante.

4/ toujours inférieures ou égales à la variance marginale correspondante.

On notera particulièrement, dans le cas présent, le manque de compréhension par la majorité des étudiants, des notions de variances marginale, conditionnelle et résiduelle.

6.3. Quelle que soit leur valeur comme épreuves partielles, en cours d'année, de tels tests ne nous paraissent pas suffisants pour juger en fin d'année du degré d'assimilation de l'ensemble d'un cours. Les possibilités de calcul qu'offre l'ordinateur peuvent néanmoins être utilisées à ce stade, de deux manières au moins, dans un but critique.

D'une part, le recours à l'ordinateur permet de réaliser plus facilement des études de corrélation et de régression multiple, susceptibles d'orienter de façon objective le choix qui doit être fait entre différents types de question ou différentes modalités d'examen. Nous avons personnellement comparé ainsi les quatre possibilités suivantes :

- réponse orale à une question très générale, suivie de quelques sous-questions appartenant au même domaine (interrogation d'une durée de 15 à 20 minutes) ;

- réponse orale à quelques (trois ou quatre) questions particulières (interrogation d'une durée de 10 à 15 minutes) ;

- résolution écrite de deux ou trois problèmes concrets, nécessitant une part relativement importante de calcul (examen d'une durée d'une heure et demie à deux heures) ;

- résolution écrite de quatre problèmes concrets, relatifs essentiellement aux méthodes à utiliser dans telle ou telle situation, et ne nécessitant pratiquement pas de calcul (examen d'une durée d'une heure à une heure et demie).

Au cours de quatre années successives, nous avons déterminé les équations de régression multiple, exprimant la note globale de statistique (moyenne arithmétique simple des résultats des quatre épreuves partielles) et le résultat final (échec ou réussite de l'étudiant pour l'ensemble des matières figurant au programme) en fonction des quatre notes partielles. Nous en avons conclu principalement que la deuxième et la quatrième formes d'interrogation s'avéraient être les plus discriminantes et que la première forme d'interrogation n'apportait pratiquement aucune information supplémentaire par rapport aux trois dernières.

D'autre part, le recours à l'ordinateur permet aussi de calculer aisément pour chacun des étudiants, non seulement un résultat moyen, mais aussi des limites de confiance. Les résultats que nous avons obtenus nous semblent devoir inciter les examinateurs à plus de prudence dans les jugements qu'ils portent habituellement sur leurs étudiants.

7 - DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Quelques remarques méritent d'être formulées, au sujet des différentes possibilités d'utilisation de l'ordinateur qui ont été décrites ci-dessus.

Il faut reconnaître tout d'abord que ces différentes possibilités n'ont pas fait l'objet de notre part d'expériences strictement contrôlées, qui auraient seules permis d'en chiffrer la rentabilité. Mais, dans l'ensemble, ces essais ont néanmoins donné de façon indiscutable des résultats très favorables.

D'autre part, il est évident que toutes les possibilités décrites ci-dessus, et notamment l'utilisation de tests à choix multiple, ne sont pas liées strictement à l'emploi de l'ordinateur. Mais il est certain que l'ordinateur apporte dans tous les cas une aide particulièrement précieuse. La plupart des essais n'auraient d'ailleurs pas été réalisés, ou n'auraient pas été réalisés d'une manière aussi efficace, à l'aide des moyens de calcul traditionnels.

Les possibilités décrites ci-dessus ne constituent évidemment que des exemples, et de nombreuses améliorations pourraient y être apportées. On pourrait penser notamment à élargir l'éventail des problèmes qui peuvent être engendrés par simulation : une expérience analogue à la nôtre, mais comportant un choix plus important de programmes, a été présentée tout récemment par CARMER et CADY [1969].

Enfin, nous devons insister sur le fait que nous n'avons réalisé aucune tentative d'enseignement programmé et que nous n'envisageons pas ici les possibilités d'emploi direct de l'ordinateur par l'étudiant, notamment par "time-sharing". Des essais ont notamment été réalisés dans ce domaine par FOSTER et SMITH [1969], GRUBB et SELFRIDGE [1964] et SCHATZOFF [1968]. Nous ne souhaitons pas prendre position à leur sujet, notre but étant uniquement de rendre compte d'une expérience personnelle qui n'a demandé que des moyens de calcul relativement limités, et qui pourrait, de ce fait, être transposée aisément dans toute université ou grande école.

8 - REFERENCES

CARMER S.G. et CADY F.B. - Computerized data generation for teaching statistics. *Amer. Statist.* 23(5), 33-35, 1969.

DAGNELIE P. - A propos de quelques méthodes de comparaisons multiples de moyennes. *Biom. Praxim.* 6, 115-124, 1965.

DAGNELIE P. - *Théorie et méthodes statistiques : applications agronomiques* (vol. 1). Duculot, Gembloux, 378 p., 1969.

DAGNELIE P. - *Théorie et méthodes statistiques : applications agronomiques* (vol. 2). Duculot, Gembloux, 451 p., 1970.

FOSTER F.G. et SMITH T.M.F. - The computer as an aid in teaching statistics. *Appl. Statist.* 18, 264-270, 1969.

GRUBB R.E. et SELFRIDGE L.D. - Computer tutoring in statistics. *Computers Autom.* 13, 20-26, 1964.

SCHATZOFF M. - Applications of time-shared computers in a statistics curriculum. *J. Amer. Statist. Assoc.* 63, 192-208, 1968.

Tableau 1

Résultats de différents tests de comparaisons de moyennes appliqués à 40 séries de données semblables.

Analyse de la variance : CM_a CM_r F	Méthode de la plus petite différence significative : classement des moyennes	Méthode de NEWMAN et KEULS : classement des moyennes	Méthode de DUNNETT: différences par rapport à un témoin (A)
2,26 5,33 0,42			
4,63 3,91 1,18			
4,21 2,92 1,44			
12,14 5,61 2,16			
12,14 5,40 2,25			
14,48 6,21 2,33			
7,36 3,07 2,40			
11,83 4,75 2,49			
13,22 5,24 2,52			
15,49 3,28 4,72××	A B D C E 19,6 19,8 22,0 22,2 22,6	A B D C E 19,6 19,8 22,0 22,2 22,6	CDE
21,87 4,21 5,19××	A B E C D 19,4 19,5 22,2 22,3 22,8	A B E C D 19,4 19,5 22,2 22,3 22,8	CDE
20,94 3,44 6,09×××	B A D E C 19,2 19,7 22,1 22,4 22,6	B A D E C 19,2 19,7 22,1 22,4 22,6	CE
23,77 3,72 6,39×××	A B C E D 19,1 19,9 22,1 22,7 23,0	A B C E D 19,1 19,9 22,1 22,7 23,0	CDE
22,91 3,17 7,23×××	A B C D E 19,5 20,1 22,6 22,6 23,3	A B C D E 19,5 20,1 22,6 22,6 23,3	CDE
29,37 2,76 10,6×××	A B D E C 19,3 19,6 22,3 22,8 23,5	A B D E C 19,3 19,6 22,3 22,8 23,5	CDE
11,89 2,91 4,09××	A B E C D 19,8 19,8 21,8 21,9 22,3	A B E C D 19,8 19,8 21,8 21,9 22,3	D
6,57 2,46 2,67×	A B E D C 20,1 20,4 21,5 22,0 22,1	A B E D C 20,1 20,4 21,5 22,0 22,1	
11,34 3,71 3,06×	A B D E C 20,1 20,4 22,3 22,4 22,5	A B D E C 20,1 20,4 22,3 22,4 22,5	
12,48 4,05 3,08×	A B E D C 19,5 20,3 20,6 22,2 22,4	A B E D C 19,5 20,3 20,6 22,2 22,4	CD
11,50 3,54 3,25×	B A E C D 19,7 20,1 21,7 22,1 22,4	B A E C D 19,7 20,1 21,7 22,1 22,4	
16,37 5,02 3,26 ×	A B E C D 20,0 20,0 22,0 22,6 23,0	A B E C D 20,0 20,0 22,0 22,6 23,0	D

Analyse de la variance : CM_a	CM_r	F	Méthode de la plus petite différence significative : classement des moyennes	Méthode de NEWMAN et KEULS : classement des moyennes	Méthode de DUNNETT: différences par rapport à un témoin (A)
14,64	4,63	3,16×	A B C D E 19,9 21,6 21,7 23,1 23,1	A B C D E 19,9 21,6 21,7 23,1 23,1	DE
14,17	4,46	3,18×	A B D E C 19,8 21,2 22,5 22,6 23,1	A B D E C 19,8 21,2 22,5 22,6 23,1	CE
15,38	4,80	3,20×	A B C D E 19,3 20,1 21,3 22,2 22,6	A B C D E 19,3 20,1 21,3 22,2 22,6	DE
10,79	2,67	4,04××	A B C D E 19,9 20,6 21,9 21,9 22,9	A B C D E 19,9 20,6 21,9 21,9 22,9	E
16,65	3,92	4,25××	B A C D E 18,5 20,5 21,5 21,8 22,1	B A C D E 18,5 20,5 21,5 21,8 22,1	
17,09	3,83	4,46××	A B E C D 19,3 20,0 21,6 21,7 23,0	A B E C D 19,3 20,0 21,6 21,7 23,0	D
14,83	3,22	4,61××	A B D C E 19,3 20,3 21,3 22,0 22,7	A B D C E 19,3 20,3 21,3 22,0 22,7	CE
11,57	2,51	4,61××	A B E D C 19,6 20,5 22,0 22,1 22,4	A B E D C 19,6 20,5 22,0 22,1 22,4	CDE
20,89	3,99	5,24××	B A D E C 19,3 20,0 21,8 22,4 23,1	B A D E C 19,3 20,0 21,8 22,4 23,1	C
17,60	2,92	6,03×××	A B D C E 19,0 19,8 21,4 21,9 22,5	A B D C E 19,0 19,8 21,4 21,9 22,5	CDE
14,25	4,65	3,06×	A B D C E 20,2 20,6 21,2 21,7 23,6	A B D C E 20,2 20,6 21,2 21,7 23,6	E
10,56	3,33	3,17×	A B E C D 18,7 20,8 20,8 21,5 21,5	A B E C D 18,7 20,8 20,8 21,5 21,5	CD
12,66	2,77	4,57××	A D B E C 19,9 20,8 21,2 22,6 22,9	A D B E C 19,9 20,8 21,2 22,6 22,9	CE
22,61	2,50	9,04×××	A B D C E 19,1 20,3 21,6 22,3 23,5	A B D C E 19,1 20,3 21,6 22,3 23,5	CDE
20,84	3,75	5,56××	A D B E C 18,3 21,4 21,5 22,0 22,3	A D B E C 18,3 21,4 21,5 22,0 22,3	BCDE
24,39	3,78	6,45×××	A B C D E 19,5 21,3 21,7 22,4 24,3	A B C D E 19,5 21,3 21,7 22,4 24,3	DE
22,85	2,95	7,75×××	A B E C D 19,1 20,4 20,8 22,5 23,3	A B E C D 19,1 20,4 20,8 22,5 23,3	CD
29,84	3,46	8,62×××	A B E D C 18,8 19,5 20,6 22,8 23,2	A B E D C 18,8 19,5 20,6 22,8 23,2	CD
42,83	2,31	18,5×××	B A D E C 17,2 20,4 22,4 22,4 22,6	B A D E C 17,2 20,4 22,4 22,4 22,6	BCDE