REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. MORICE

Tables et abaques relatifs aux lois des variables t, χ^2 et F non centrées

Revue de statistique appliquée, tome 17, n° 1 (1969), p. 79-97
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1969__17_1_79_0>

TABLES ET ABAQUES RELATIFS AUX LOIS DES VARIABLES t, χ^2 ET F NON CENTRÉES

E. MORICE

Les problèmes relatifs à la puissance de divers tests classiques (estimation et comparaison de moyennes et de variances) font appel aux distributions de diverses variables non centrées associées à la loi normale (t, χ^2 et F non centrés) :

$$- \; t'(\nu, \delta) = \frac{u + \delta}{\chi(\nu)} \sqrt{\nu},$$

u étant une variable normale réduite, δ une constante et $\chi^2(\nu)$ une variable χ^2 à ν degrés de liberté, indépendante de u.

$$- \; \chi'^2(\nu, \lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} (u_i + a_i)^2, \qquad \lambda = \sum_{1}^{\nu} a_i^2$$

les u_i étant des variables normales réduites indépendantes et les a_i, des constantes.

$$- \; F'(\nu_1, \lambda_1 ; \nu_2) = \frac{\frac{1}{\nu_1} \chi'^2(\nu_1, \lambda_1)}{\frac{1}{\nu_2} \chi^2(\nu_2)}$$

Des tables des distributions de ces variables ont été calculées, puis présentées sous forme d'abaques, pour quelques valeurs des paramètres qui y figurent.

On trouvera ci-après les références essentielles relatives à ces publications.

Remarque - Les auteurs des divers documents cités ont souvent utilisé des notations différentes, en particulier pour les fractiles et les risques. Dans ce qui suit on a toujours utilisé les notations ci-après :

x_α Valeur de la variable aléatoire X telle que $\alpha = \Pr(X < x_\alpha)$

α Risque de 1ère espèce

β Risque de 2ème espèce (Puissance = $1 - \beta$)

ν Nombre de degrés de liberté.

I - LOI DE T NON CENTRE

La distribution cumulative de la variable

$$t'(\nu, \delta) = \frac{u + \delta}{\chi(\nu)} \sqrt{\nu},$$

joue un rôle important dans les problèmes de tests relatifs à l'estimation ou à la comparaison de moyennes, mais sous la forme générale :

$$\Pr[t'(\nu, \delta) \leq t_0] = P,$$

elle peut aussi intervenir dans maints autres problèmes.

Relativement à l'usage de la relation ci-dessus on tiendra compte de ce que :

$$\Pr[t'(\nu, \delta) \leq 0] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\delta} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\Pr[t'(\nu, \delta) \leq t_0] = 1 - \Pr[t'(\nu, -\delta) \leq -t_0]$$

Les tables et abaques ci-après permettent, moyennant éventuellement quelques interpolations, de traiter la plupart de ces problèmes.

- RESNIKOFF and LIEBERMAN : "Tables of the non-central t distribution", Stanford University Press 1957.

Ces tables donnent la distribution de $t'(\nu, \delta)$, densités et fréquences cumulées pour

α = 0,001 - 0,0025 - 0,004 - 0,01 - 0,025 - 0,04 - 0,065 - 0,10 - 0,15 et 0,25

ν = 2 (1) 24 (5) 49

et pour les valeurs de δ définies par

$$\int_{\delta/\sqrt{\nu+1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \alpha \quad , \quad \delta = \sqrt{\nu+1}\; u_{1-\alpha}$$

Pour ces valeurs de ν et de δ, ces tables donnent aussi les valeurs de x telles que :

$$\Pr\left[\frac{1}{\sqrt{\nu}} t'(\nu, \delta) > x\right] = \varepsilon$$

pour ε = 0,995 - 0,99 - 0,90 - 0,75 - 0,50 - 0,25 - 0,10 - 0,05 et ε = 0,005, pour $\nu \geqslant 5$.

La distribution de $t'(\nu, \delta)$ étant surtout utilisée dans des problèmes relatifs à la puissance du test t, ces tables ont été présentées par divers auteurs sous des formes correspondant plus directement à ces problèmes Citons :

- OWEN - "Handbook of Statistical tables" - Addison Wesley Pub. Londres 1961 p. 31-45.

On trouve cet ouvrage :

1/ Graphiques donnant en fonction de ν et δ :

$$1 - \beta = \Pr[t'(\nu,\delta) \geq t_{1-\alpha}(\nu)]$$

c'est-à-dire la puissance du test t, au risque α, de l'hypothèse d'une moyenne égale à m_0 à partir d'un échantillon de $n = \nu + 1$ observations ayant donné une moyenne $\bar{x}$ et une variance estimée $s^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1}$ soit :

$$P = 1 - \beta = \Pr\left[\frac{\bar{x} - m}{s}\sqrt{n} + \frac{m - m_0}{s}\sqrt{n} \geq t_{1-\alpha}(\nu) \,\middle|\, m, \sigma^2\right],$$

si la moyenne est m et non m_0, soit encore :

$$P = \Pr\left[\frac{\sigma}{s}\left(\frac{\bar{x} - m}{\sigma}\sqrt{n} + \frac{m - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) \geq t_{1-\alpha}(\nu)\right]$$

$$P = \Pr\left[\frac{u + \delta}{\chi(\nu)} \geq t_{1-\alpha}(\nu)\right]$$

avec

$$\delta = \frac{m - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \qquad , \qquad \left(\frac{\sigma}{s} = \frac{\sqrt{\nu}}{\chi(\nu)}\right)$$

$$u = \frac{\bar{x} - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

Ces graphiques sont établis pour :

$$\alpha = 0,005 - 0,01 - 0,025 - 0,05$$

$$\nu = 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty, \qquad 0 < \delta < 9$$

Dans le cas du test de l'hypothèse $D = m_2 - m_1 = 0$ relative à deux populations de même variance σ^2, à partir d'échantillons d'effectifs n_1 et n_2, on utilisera les mêmes graphiques, pour obtenir la puissance du test, si $m_2 - m_1 = D \neq 0$, avec :

$$\delta = \frac{D}{\sigma}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \qquad \nu = n_1 + n_2 - 2$$

2/ Graphiques donnant pour le test de l'hypothèse $m = m_0$, au risque α, l'effectif nécessaire n pour un test de puissance $P = 1 - \beta$, en fonction de

$$\Delta = \frac{m - m_0}{\sigma} \qquad (0,1 < \Delta < 5)$$

$$\beta = 0,01 - 0,05 - 0,10 - 0,20 - 0,50$$

On trouvera aussi ces graphiques dans :

- MORICE - Puissance de quelques tests classiques" Revue de Statistique Appliquée (XVI) 1968 N° 1, p. 77.

- RESNIKOFF - Tables to facilate the computations of percentage points of the non-central t distribution.
Annals of Mathematical Statistics (33) 1962, p. 580/586.

- JOHNSON and WELCH - Applications of the non-central t distribution Biometrika (31) 1940, p. 362/389.

Tables donnant les valeurs de 100 $t'_{1-\alpha}$ en fonction de δ pour :

α et 1 - α = 0,005 - 0,001 - 0,0025 - 0,05 - 0,10 (0,10.....0,5

ν = (1) .... 9 - 16 - 36 - 144 - ∞

- OWEN - Handbook of statistical tables
Addison Wesley Pub. Londres, 1961 p. 109/116.

A partir des tables données par Johnson et Welch, Owen donne des tables, exigeant quelques calculs intermédiaires, et permettant d'obtenir :

1/ La valeur t_o telle que

$$P = \Pr[t'(\nu, \delta) \leq t_o] = 1 - \beta$$

pour $1 - \beta = 0,90 - 0,95 - 0,99$

$\nu = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 36, 144, \infty$

Noter que

$$\Pr[t'(\nu, \delta) \geq t_o] = 1 - \Pr[t'(\nu\ -\delta) \leq -t_o]$$

2/ La valeur δ telle que

$$\Pr[t'(\nu, \delta) \leq t_o] = 1 - \beta$$

pour les mêmes valeurs de $1 - \beta$ et α.

Remarque - Pratiquement, ces problèmes peuvent être résolus avec une précision suffisante à l'aide d'une simple interpolation entre deux des graphiques donnant $1 - \beta = \Pr[t'(\nu, \delta) \geq t_{1-\alpha}(\nu)]$, (Owen p. 32 ...).

Exemple - Déterminer, pour $\nu = 12$ et $\delta = 3,80$, la valeur t_o telle que :

$$0,90 = \Pr[t'(12 ; 3,80) \geq t_o]$$

Avec l'aide d'une table de la distribution de t, pour $\nu = 12$, on peut lire sur ces graphiques

$$0,90 = \Pr[t'(12 ; 3,6) > 2,18]$$

$$0,90 = \Pr[t'(12 ; 4,1) > 2,68]$$

d'où, par interpolation linéaire, pour $\delta = 3,80$, on trouve $t_o \sim 2,38$: le calcul à l'aide des tables de Owen donne 2,42.

(Ceci; n'est évidemment possible que pour les valeurs de δ compatibles, pour ν et β fixés, avec les valeurs de t_o correspondant aux abaques, soit

$$t_{0,95}(\nu) \leq t_o \leq t_{0,995}(\nu)$$

- NEYMAN and TOKARSKA - Errors of second kind in testing Student's hypothesis
Journal of the American Statistical Association (31) 1936, p. 318/322.

Tables donnant δ pour

α = 0,05 et 0,10

ν = 1 (1) 30

β = 0,05 - 0,10 (0,10) 0,90

- MERRINGTON and PEARSON - An approximation to the distribution of non-central t
Biometrika (45) 1958, p. 484/491.

- VAN ERDEN - Some approximations to the percentage points of the non central t distribution.
Mathematical Centrum, Report 8242 - Amsterdam 1959 et Revue de l'Institut International de Statistique (29) 1961, p. 4/32.

- SCHEUER and SPURGEON - Some percentage points of the non central t distribution
Journal of the American Statistical Association (58) Mars 1963 p. 176-182.

Les tables données dans cet article complètent celle de Resnikoff et Lieberman (voir ci-dessus), en donnant les valeurs de x telles que

$$\Pr[t' / \sqrt{\nu} > x] = \varepsilon ,$$

pour ε = 0,975 et 0,025 et pour les mêmes valeurs de ν et $\delta = \sqrt{\nu + 1}\ u_{1-\alpha}$

- GRUBBS and WEAVER - Operating characterisces for the common statistical tests of significance
Annals of Mathematical Statistics - Juin 1946.

- GRUBBS - On designing single sampling inspection plans
Annals of Mathematical Statistics (20) 1949 p. 242/256.

- OWEN - Table of factors for one sided tolerance limits for a normal distribution.
Sandia Corporation - Monographs S C R 13, Office of Technical Services, Department of Commerce - Washington D.C.

Détermination du facteur k, tel qu'on puisse affirmer au niveau de confiance γ qu'une fraction au moins égale à P d'une population normale est inférieure à $\bar{x}$ + ks (ou supérieure à $\bar{x}$ - ks) avec :

$\bar{x}$ moyenne d'un échantillon de n observations

s^2 variance estimée avec ν degrés de liberté (ν pouvant être égal à n - 1 ou différent) ; d'où

$$\gamma = \Pr[t'(\nu, \delta = u_p\sqrt{n}) \leq k\sqrt{n}]$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_p} e^{-\frac{u^2}{2}} du = P$$

Ces tables, reproduites dans Owen (op. cit. p. 117/126) donnent les valeurs de k pour

γ = 0,90 et 0,95, P = 0,900 - 0,950 - 0,975 - 0,990 - 0,999

et pour :

1/ n = 1, 2, 3, et 4 avec ν = 1 (1) .... 75 (5) .... 100 (10)....

2/ n = 2 (1) .... 25 (5) .... 50 (10) ... 100 - 120 - 145 - 300 - 500 ∞ avec $\nu = n - 1$..

II - LOI DE χ^2 NON CENTRE

En ce qui concerne le test χ^2, l'hypothèse (H_0), que l'on teste au risque α de première espèce, est que les variables Z_i sont distribuées suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, c'est-à-dire que

$$\frac{\nu s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(z_i - \bar{z})^2}{\sigma^2}$$

suit une loi de χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté $(i = 1, 2, \ldots, n)$,

$\chi^2(\nu) = \sum_1^\nu u_i^2$, les u_i étant des variables normales réduites indépendantes.

L'hypothèse alternative (H_1) est que la loi des Z_i est $\mathcal{N}(a_i \sigma, \sigma^2)$ c'est-à-dire que pour les variables réduites Z_i/σ de variance unité, l'espérance mathématique est a_i.

La distribution de χ^2 non centré est alors celle de la variable

$$\chi'^2 = \sum_1^\nu (u_i + a_i)^2.$$

Il se trouve (Patnaik, 1943) que par raison de symétrie, dans l'étude de la loi de χ'^2, les a_i considérés individuellement s'éliminent et que seul subsiste $\lambda = \sum_1^\nu a_i^2$: les écarts individuels a_i n'interviennent pas directement.

La loi de $\chi'^2(\nu, \lambda)$ est définie par

$$f(\chi'^2) = e^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \frac{e^{-\frac{\chi'^2}{2}} (\chi'^2)^{\frac{\nu}{2}+j-1}}{2^{\frac{\nu}{2}+j}\, \Gamma(\nu/2 + j)}$$

Sa densité est une moyenne pondérée des densités de lois de χ^2 ayant $\nu + 2j$ degrés de liberté, les coefficients de pondération étant des probabilités relatives aux termes successifs d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda/2$.

Elle est caractérisée par

$$E(\chi'^2) = \nu + \lambda$$
$$V(\chi'^2) = 2(\nu + 2\lambda)$$

Les principales études relatives à la loi de $\chi'^2(\nu, \lambda)$, avec

$$\lambda = \sum_{1}^{\nu} a_i^2 ,$$

et à ses applications sont les suivantes (1) :

- FIX - Tables of non central χ^2
University of California Pub. in Statistics Vol. 1 N° 2 1949 p. 15/19.

Tables donnant, pour α = 0,01 et 0,05, les valeurs de λ telles que:

$$\Pr[\chi' (\nu, \lambda) \leq \chi^2_{1-\alpha}(\nu)] = \beta$$

pour

β = 0,1 (0,1 0,9

ν = 1 (1) ..... 20 (2) ..... 40 (5) ..... 60 (10) ..... 100.

Tables reproduites dans Owen (cf. ci-dessus) p. 61-62.

(Noter que les valeurs de λ, données dans Owen, correspondent aux valeurs de la puissance P = 1 - β et non à β comme l'indique la table).

- PATNAIK - The non-central χ^2 and F distributions and their applications.
Biometrika (36) 1949 p. 202/232.

Tables donnant des valeurs de P

$$P = \Pr[\chi'^2(\nu, \lambda) > \chi^2_{1-\alpha} (\nu)]$$

pour

α = 0,05

ν = 2 (1) 12 (2) 20

λ = 2 (2) 20

- ABDEL-ATY - Approximate formulae for the percentage points and the probability integral of the non-central χ^2 distribution
Biometrika (41) 1954 p. 538.540.

- SANKARAN - On the non-central χ^2 distribution
Biometrika (46) 1959 p. 233/237.

- PEARSON - Note on an approximation to the distribution of non-central χ^2
Biometrika (46) 1959 p. 364.

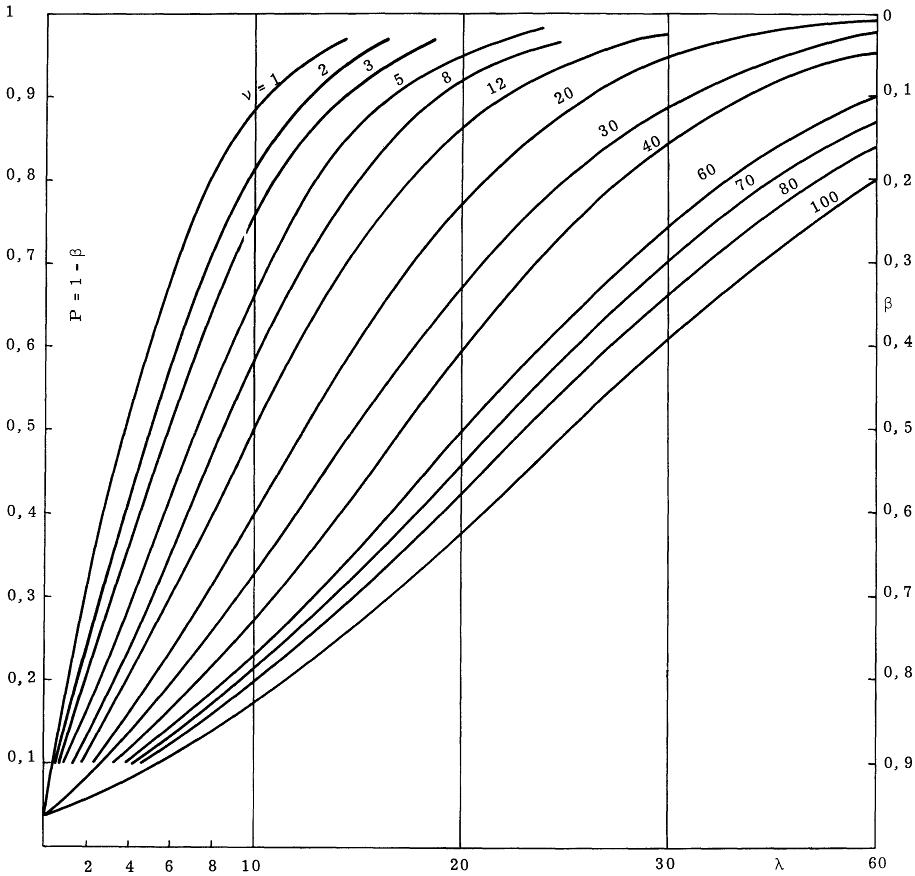
- FIX a publié une autre table de χ'^2, sous une forme différente dans "The Harold Cramer Volume (1959).

----

(1) La distribution de $\chi'^2(\nu, \lambda)$ avait été d'abord étudiée incidemment par R.A. FISHER qui, sous certaines hypothèses assez restrictives avait aussi proposé l'approximation $\chi'^2 \sim \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) \chi^2$ [FISHER : "The general sampling distribution of the multiple correlation coefficient. Proceedings Royal Society - Series A, Vol. 121 p. 654/673] (la table du χ^2 non centré de Fisher a été reproduite dans KULLBACK : "Information theory and statistics 1959 p. 380).

$$P = 1 - \beta = \int_{\chi^2_{0,95}(\nu)}^{\infty} f[\chi'^2(\nu, \lambda)]\, d(\chi'^2)$$

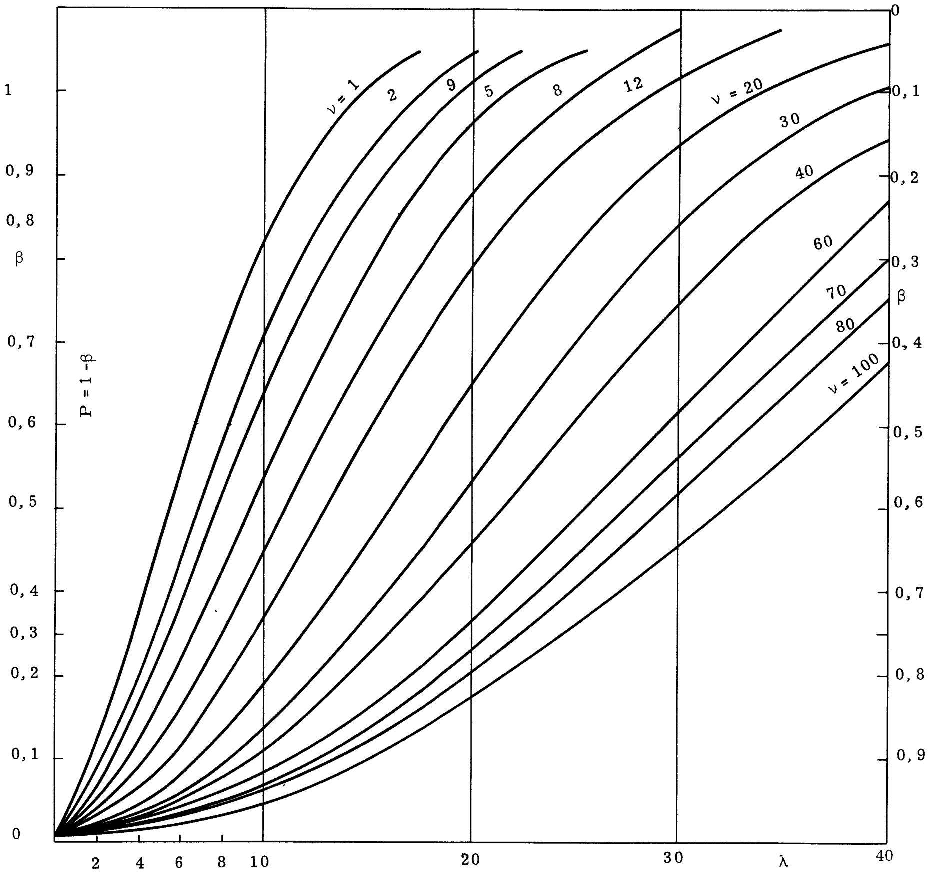
$$\chi'^2 = \sum_{1}^{\nu} (u_i + a_i)^2 \ , \quad u_i = \mathfrak{N}(0, 1) \ , \quad \lambda = \sum_{1}^{\nu} a_i^2$$



Puissance du test χ^2
$\alpha = 0,05$

$$P = 1 - \beta = \int_{\chi^2_{0,99}(\nu)}^{\infty} f[\chi'^2 (\nu, \lambda)] \, d(\chi'^2)$$

$$\chi'^2 = \sum_1^{\nu} (u_i + a_i)^2 \qquad u_i = \mathcal{N}(0,1) \qquad \lambda = \sum_1^{\nu} a_i^2$$



Puissance du test χ^2

$\alpha = 0,01$

Pour $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, six tables donnent en fonction de α et de la puissance $1 - \beta$ (qui y est notée β), les valeurs correspondantes de $\lambda = f[\alpha, 1 - \beta \mid \nu]$ pour

$\alpha = 0,5$ (0,1)...... 0,1 - 0,05 - 0,01 - 0,05 - 0,001

$\beta = 0,5$ (0,1)......... 0,9 - 0,95

(voir graphiques ci-joints construits à partir des tables de Fix et Patnaik).

- TUKEY - Approximations to the upper 5 % point of Fisher's β distribution and non central χ^2.
  Biometrika (44) 1957, p. 528/531.

Approximation - Pratiquement, pour $\nu > 5$, on peut obtenir une bonne approximation en considérant que la distribution de $\chi'^2(\nu, \lambda)$ est approximativement celle de $k\ \chi^2(\nu')$ avec :

$$k = \frac{\nu + 2\lambda}{\nu + \lambda} \quad , \quad \nu' = \frac{(\nu + \lambda)^2}{\nu + 2\lambda}$$

$$\Pr[\chi'^2(\nu, \lambda) < a] \sim \Pr[k\ \chi^2(\nu') < a]$$

Exemple - Pour $\alpha = 0,05$, $\nu = 10$, $\chi^2_{0,95}(10) = 18,31$, a et $\lambda = 20,63$, on a :

$$\Pr[\chi'\ (10\ ;\ 20,53) < 18,31] \sim \Pr[\chi\ (18,2) < 10,94]$$

Une interpolation dans la table de χ^2 donne P # 0,095 alors que la table de FIX donne P = 0,10.

Pour $\nu' > 30$, on pourra utiliser l'approximation habituelle de χ^2, soit :

$$\frac{\chi'^2}{k} \sim \mathcal{N}\left(E = \frac{(\nu + \lambda)^2}{\nu + 2\lambda} \qquad V = 2\ \frac{(\nu + \lambda)^2}{\nu + 2\lambda}\right)$$

III - LOI DE F NON CENTRE

La loi de :

$$F'\ (\nu_1, \lambda_1\ ;\ \nu_2) = \frac{1/\nu_1\ \chi'^2(\nu_1, \lambda_1)}{1/\nu_2\ \chi^2(\nu_2)}$$

qui dépend de trois paramètres ν_1, ν_2 et λ_1 est trop compliquée pour être tabulée de manière exhaustive.

Dans les articles signalés, ci-après, elle a surtout été étudiée en vue de son application au test F d'analyse de la variance, ce qui explique l'introduction d'un nouveau paramètre Φ utilisé, par Tang et les auteurs qui l'ont suivi, comme caractéristique globale de l'hétérogénéité des moyennes de populations de même variance σ^2.

La loi de la variable :

$$F'(\nu_1, \lambda, \nu_2) = \frac{1/\nu_1\ \chi'^2(\nu_1, \lambda)}{1/\nu_2\ \chi^2(\nu_2)}$$

avec

$$\chi'^2(\nu_1, \lambda) = \sum_{i=1}^{\nu} (u_i + a_i) \quad , \quad \lambda = \sum_{1}^{\nu} a_i^2$$

les u_i étant des variables normales réduites indépendantes et les a_i étant des constantes, intervient dans l'étude de la puissance du test F.

Pour un test au risque α de première espèce, et pour ν_1 et ν_2 fixés, cette puissance

$$P = 1 - \beta = \Pr[F'(\nu_1, \lambda, \nu_2) \geq F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2)]$$

de même que la puissance du test χ^2, ne dépend que de λ et non, individuellement des a_i.

Divers tables et graphiques ont été établis à partir d'une thèse d'Eisenhart et des travaux de Tang.

- TANG - The power function of the analysis of variance tests with tables and illustrations of their use.
  Statistical Research Memoirs (2) 1938, p. 126/149.

Les tables de Tang donnent le risque de seconde espèce β, pour α = 0,01 et 0,05 en fonction de

$$\nu_1 = 1, 2, \ldots\ldots 8$$
$$\nu_2 = 2, 4, 6 \ (1) \ldots\ldots\ldots 30 \ 60 \ \infty$$

et du paramètre auxiliaire $\Phi = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\nu_1 + 1}}$, pour des valeurs de , par intervalle de 0,1, et comprises entre 1 et 3 (environ, car la puissance devient très faible pour $\Phi < 1$, à moins que ν_1 et ν_2 ne soient très grands).

Ces tables donnent aussi les valeurs de

$$E^2 = \frac{\nu_1 F_\alpha(\nu_1, \nu_2)}{\nu_2 + \nu_1 F_\alpha(\nu_1, \nu_2)}$$

Exemple - Etant donnés k échantillons de n observations provenant de k populations de même variance σ^2, l'hypothèse à tester au risque α de première espèce étant :

$$(H_o) : \quad m_1 = m_2 = \ldots\ldots\ldots = m_k$$

contre l'hypothèse alternative :

(H_1) : les moyennes m_i ne sont pas toutes les mêmes, on aura alors

$$\nu_1 = k - 1 \quad , \quad \nu_2 = k(n - 1)$$

$$\Phi^2 = \frac{1/k \sum (m_i - \overline{m})^2}{\sigma^2/n}$$

Les tables de Tang ont été reproduites dans divers ouvrages, par exemple :

- Kempthorne - The design and analysis of experiments
  John Wiley p. 612-628.

- MANN - Analysis and design of experiments
Dover Publ. 1949.

Relativement à la puissance du test F, on peut aussi citer :

- LEHMER - Inverse tables of probabilities of second kind
Annals of Mathematical Statistics (15) 1944 p. 388.

Pour α = 0,01 et 0,05 ces tables donnent les valeurs de Φ pour

ν_1 = 1 (1) ... 10 - 12 - 15 - 20 - 24 - 30 - 40 - 60 - 80 - 120 - ∞

ν_2 = 2 (2) ... 20 - 24 - 40 - 40 - 60 - 80 - 120 - 240 - ∞

et pour les puissances P = 1 - β = 0,7 et 0,8.

Pour les besoins des problèmes classiques d'analyse de variance ces tables ont été présentées de diverses façons sous forme d'abaques. Citons par exemple :

- PEARSON and HARTLEY - Charts of the power function for analysis variance tests derived from non central distribution
Biometrika (38) 1951, p. 112/130.

Huit doubles graphiques pour α = 0,01 et 0,05 et

ν_1 = 1, 2 .... 8 donnent pour

ν_2 = 6(1) ..... 12 - 15 - 20 - 30 - 60 - ∞

et en fonction de Φ (à partir de Φ = 2, pour ν_1 = 1 et Φ = 1, pour ν_1 = 2..... 8 si α = 0,01 et à partir de 1,2 si α = 0,05), les valeurs de la puissance P = 1 - β (de 0,10 à 0,99).

Ces abaques ont été reproduits dans :

- DIXON and MASSEY - Introduction to statistical analysis
Mac Graw Hill 2eme édition 1957 p. 426/433.

- FOX - Charts of the power of F test
Annals of Mathematical Statistics (27) 1956 p. 484/497.

Huit graphiques, pour α = 0,01 et 0,05 et P = 1 - β = 0,5 - 0,7 -0,8 - 0,9 donnent, en fonction de :

ν_1 et ν_2 = 3(1) .... 10 (2) ..... 20 (20) ..... 100 ... 200, ∞, les courbes Φ = Cte (Φ variant de 1 à 2 .... 5, suivant les cas, par intervalles de 0,10).

Deux nomogrammes, de lecture assez difficile, permettant les interpolations pour les valeurs de P comprises entre 0,5 et 0,9.

(Noter que dans les abaques originaux la puissance est désignée par β au lieu de 1 - β).

Ces abaques sont reproduits dans

- OWEN - Handbook of Statistical tables
Addison Wesley Pub. 1962 p. 88/99.

- DUNCAN - Charts of the 10 % and 50 % points of the operating characteristic curve for fixed effects analysis of variance.
Journal of the American Statistical Association (52) 1957 p. 345/350.

Deux doubles abaques donnent pour $\alpha = 0,01$ et $0,05$ et pour $\beta = 0,10$ et $0,50$, en fonction de Φ et de $\nu_1 = 1 \ldots 8$, les courbes

$$\nu_2 = \text{Cte} = 6\ (1) \ldots.\ 10 - 12 - 15 - 20 - 30 - 40 - 60 - \infty$$

Ces abaques sont reproduits dans

- DUNCAN - Quality Control and Industrial Statistics
  Irwin, 1959, p. 896.

Dans ces divers abaques et tables on a :

$$\Phi^2 = \frac{(1/k) \sum_{i=1}^{k} (m_i - \overline{m})^2}{(1/n)\sigma^2}$$

pour le test d'homogénéité des moyennes m_i de k populations de même variance σ^2 dont on a observé k échantillons de n éléments avec :

$$\nu_1 = k - 1 \quad , \quad \nu_2 = k(n - 1)$$

(Φ^2, caractéristique globale d'hétérogénéité, ne dépend que de $\sum(m_i - \overline{m})^2$ et non, individuellement des m_i, sa valeur pour un test donné, n et k fixés, impliquant que l'on connaît σ^2).

D'une manière plus générale, ν_1 représente la nombre de degrés de liberté dans l'estimation de la variance des moyennes m_i et ν_2 le nombre de degrés de liberté dans l'estimation de la variance σ^2, soit par exemple :

$\nu_2 = (k - 1)(n - 1)$ dans un tableau à double classification (deux facteurs contrôlés).

$\nu_2 = (n - 1)(n - 2)$, dans un carré latin à n^2 cases.

On peut aussi citer.

- EISENHART WASTAY and WALLIS - Selected techniques of statistical analysis
  Mac Graw Hill 1947.

On y trouve des tables des quantités

$$\Phi(\alpha, \beta, \nu_1, \nu_2) = F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) \quad . \quad F_{1-\beta}(\nu_2, \nu_1)$$

pour $\alpha = 0,01$ et $0,05$ et une gammes étendue de valeurs de β, ν_1, ν_2. (Tables utiles dans la détermination des effectifs d'échantillons dans un test de comparaison de deux variances σ_1^2 et σ_2^2, aux risque α et β fixés).

On trouve aussi dans ce même ouvrage des tables du rapport $\dfrac{\chi^2_\alpha(\nu)}{\chi^2_{1-\beta}(\nu)}$

pour $\alpha = 0,01$ et $0,05$ et une gamme étendue de valeurs de β et de ν (tables utiles dans la détermination de l'effectif n d'un échantillon dans le test $\sigma^2 = \sigma_0^2$ aux risques α et β fixés.

Ces divers tables et abaques ont été publiés avec des notations quelquefois différentes : on a rétabli ci-dessus un système homogène de notations.

Il convient surtout de noter que dans les graphiques de Fox, la puissance est notée β et non $1 - \beta$ (cette dernière notation plus usuelle est utilisée dans la fig. 2 ci-jointe).

Les deux schémas ci-après montrent la disposition des graphiques de Pearson et Hartley (fig. 1) et de Fox (fig. 2).

Dans l'ensemble les graphiques de Fox sont plus faciles à utiliser, l'interpolation entre les courbes Φ = Cte, presque rectilignes, est aisée mais - sauf emploi du nomogramme d'interpolation - ils ne correspondent qu'aux valeurs 0,5 - 0,7 - 0,8 - 0,9 de la puissance du test.

Les graphiques de Pearson et Hartley sont théoriquement faciles à lire en ce qui concerne la puissance $1 - \beta$, pour toute valeur, comprise entre 0,10 et 0,99, mais cette précision apparente dépend éventuellement d'une interpolation pour ν_2 dans le réseau des courbes ν_2 = Cte.

Exemples d'utilisation des graphiques

1/ On dispose de k = 6 échantillons de n = 3 observations de populations de même variance σ^2 connue (ou valablement estimée) soit :

$$\nu_1 = 5 \quad , \quad \nu_2 = 12$$

Dans un test au risque de première espèce $\alpha = 0,01$ quelle est la puissance du test (probabilité de rejeter l'hypothèse $m_1 = m_2 \ldots\ldots m_6 = \overline{m}$), dans le cas d'une hétérogénéité d'ensemble caractérisée par

$$\frac{\sum_1^i (m_i - \overline{m})^2}{\sigma^2} = \frac{k}{n} \Phi^2 = 13,5, \text{ soit } \Phi = 2,6$$

Le graphique de Pearson-Hartley donne par simple lecture $1 - \beta \neq 0,90$, en accord avec le graphique de Fox relatif à la puissance 0,90 .

Pour ν_2 différent des valeurs qui figurent dans le réseau ν_2 = Cte du graphique de Pearson, une interpolation pour ν_2 sera nécessaire.

De même si la valeur de Φ est différente de celles qui correspondent à $\Phi(\nu_1, \nu_2)$ pour β fixés, une double interpolation entre deux graphiques de Fox sera nécessaire.

Ainsi pour $\alpha = 0,01$, $\nu_1 = 5$, $\nu_2 = 12$ et $\Phi = 1,90$ les graphiques de Fox donnent par double interpolation (fig. 3).

$$1 - \beta = 0,50 \quad \text{pour} \quad \Phi_1 \sim 1,83$$
$$1 - \beta = 0,70 \quad \text{pour} \quad \Phi_2 \sim 2,15$$

d'où, par une nouvelle interpolation

$$1 - \beta \sim 0,54$$

Ce résultat est donné directement par le graphique de Pearson.

2/ Pour k = 6 échantillons, quel doit être l'effectif n de chacun d'eux, dans un test au risque $\alpha = 0,05$ pour que la puissance ait une valeur fixée à l'avance 0,90, si la caractéristique globale d'hétérogénéité des moyennes est caractérisée par

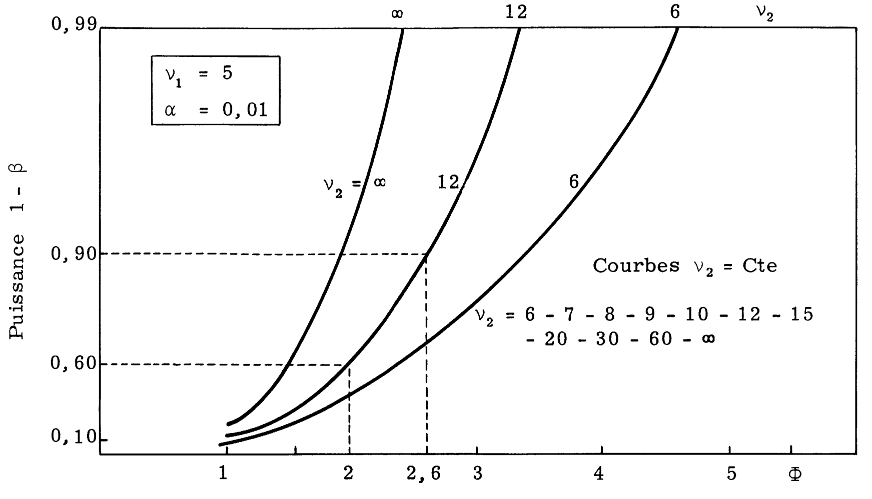


Figure 1 - Graphiques de Pearson et Hartley
(16 graphiques = $\alpha = 0,01$ et $0,05$, $\nu_1 = 1, 2 \ldots\ldots 8$)

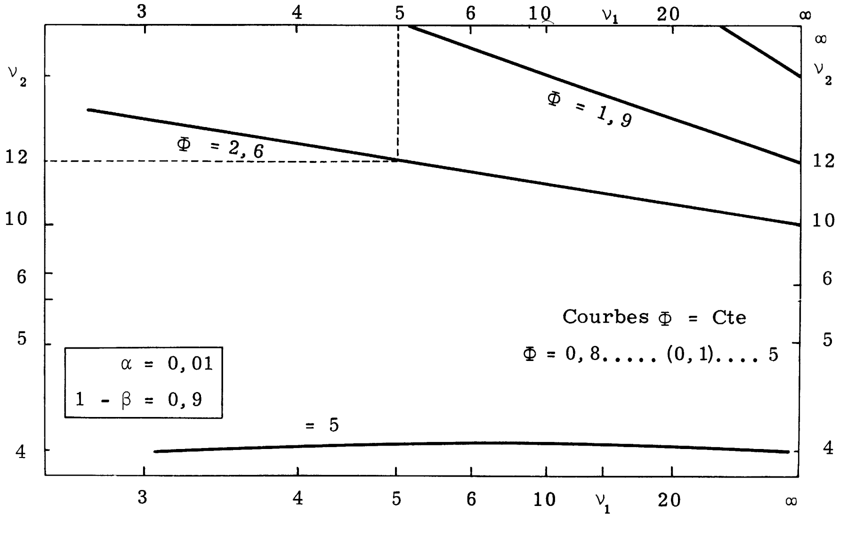


Figure 2 - Graphiques de Fox
(8 graphiques : $\alpha = 0,01$ et $0,05$ - $1 - \beta = 0,5 - 0,7 - 0,8 - 0,9$)

$$\frac{\sum_{1}^{k} (m_i - \overline{m})^2}{\sigma^2} = 6$$

soit :

$$\Phi^2 = \frac{n}{6} \times 6 = n$$

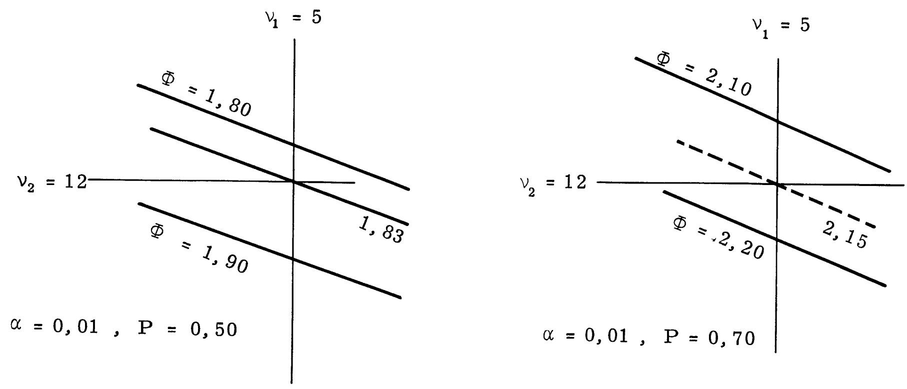


Figure 3 - Puissance du test F [$k = 6$, $n = 3$, $\alpha = 0,01$, $\Phi = 1,90$]
$P = 1 - \beta \sim 0,50 + 0,20 \times \frac{7}{32} \sim 0,54$

Déterminer n revient à chercher sur le graphique de Fox correspondant à $\alpha = 0,05$ et à la puissance $P = 0,9$ le point $[\nu_1 = 5, \nu_2 = 6(n - 1)]$ qui se trouverait sur la courbe particulière $\Phi = \sqrt{n}$.

On procédera par itération en prenant comme valeur de départ pour n celle qui correspond à la valeur de Φ pour $(\nu_1 = 5, \nu_2 = \infty)$ soit environ $\Phi = 1,66$, d'où

$$\Phi^2 = \frac{n}{k} \frac{\sum(m - m)^2}{\sigma^2} = n$$

$$n = (1,66)^2 = 2,76 \longrightarrow 3$$

($\Phi = 1,66$ est la valeur minimale de Φ qui peut être associée à $\nu_1 = 5$ dans le graphique $\alpha = 0,05$, $P = 0,90$).

On aura alors le tableau ci-après des calculs d'itération (Fig. 4).

n	$\Phi = \sqrt{n}$	$\nu_2 = 6(n-1)$	$\nu_2(\nu_1 = 5, \Phi)$
3	1,73	12 $<$	60
4	2	18 $>$	15

3 étant une valeur par défaut, et 4 une valeur par excès on prendre n = pour avoir une puissance voisine de 0,90 (supérieure à 0,90).

Dans le cas d'une puissance ne figurant pas dans les graphiques de Fox, par exemple 0,85, on pourrait procéder par interpolation entre les résultats donnés par les graphiques 0,90 et 0,80. Cette interpolation n'a évidemment d'intérêt que si n est grand : dans le cas présent on obtiendrait encore n = 4.

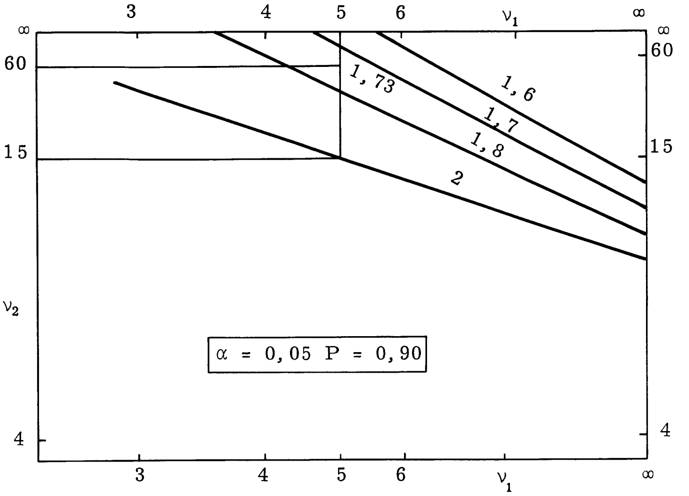


Figure 4 - Graphique Fox

Détermination de n pour = k = 6 , α = 0,05 P = 0,90 , $\dfrac{\sum(m - m)^2}{\sigma^2} = 6$

Avec les graphiques de Hartley et Pearson la lecture de P est immédiate quelle que soit sa valeur, mais l'interpolation permettant de déterminer ν_2 est assez imprécise dans le réseau des courbes ν_2 = cte.

On aura alors le tableau ci-après des calculs d'interpolation (fig. 5).

$\nu_2 = 6(n - 1)$	n	$\Phi = \sqrt{n}$	$\Phi(\nu_2, P = 0,90)$
∞	∞	∞	1,65
60	11	3,33	1,73
30	6	2,45	> 1,82
20	4,33	2,08	> 1,90
15	2,5	1,53	< 1,99

d'où : comme précédemment n = 4 (l'interpolation entre les courbes ν_2 = 15 et ν_2 = 20 du graphique donne P ~ 0,92 pour $\nu_2 = 6 \times 3 = 18$).

La lecture des abaques - aussi bien que celle des tables - implique une certaine marge d'erreur, due soit à la lecture des graphiques, soit aux interpolations utilisées dans les graphiques ou dans les tables.

Mais pratiquement la vraie difficulté n'est pas là.

Qu'il s'agisse de déterminer la puissance du test, ou l'effectif n des échantillons ou la caractéristique globale d'hétérogénité des moyennes des populations, définie par le paramètre

$$\sqrt{\frac{(1/k)\sum(m_i - \overline{m})^2}{(1/n)\sigma^2}}$$

il faudra soit interpréter la valeur de Φ, si elle a été calculée pour un test donné, soit faire à priori une hypothèse sur cette valeur ce qui implique en particulier la connaissance de σ sur qui on ne possédera en général qu'une information approximative : il peut en résulter une assez large marge d'incertitude soit, suivant le cas, dans l'estimation de la puissance du test ou dans l'appréciation globale de l'erreur à craindre caractérisée par $\sum(m_i - \overline{m})^2$.

Ainsi pour k = 6, n = 3, α = 0,01 et une erreur globale envisagée caractérisée par $\sum(m_i - \overline{m})^2 = 135$, on a, en admettant $\sigma^2 = 10$, $\Phi = 2,6$ soit une puissance P $\#$ 0,90, mais, si en réalité $\sigma^2 = 17$ on a dans le test, pour la même erreur globale, Φ $\#$ 2 soit P $\#$ 0,60.

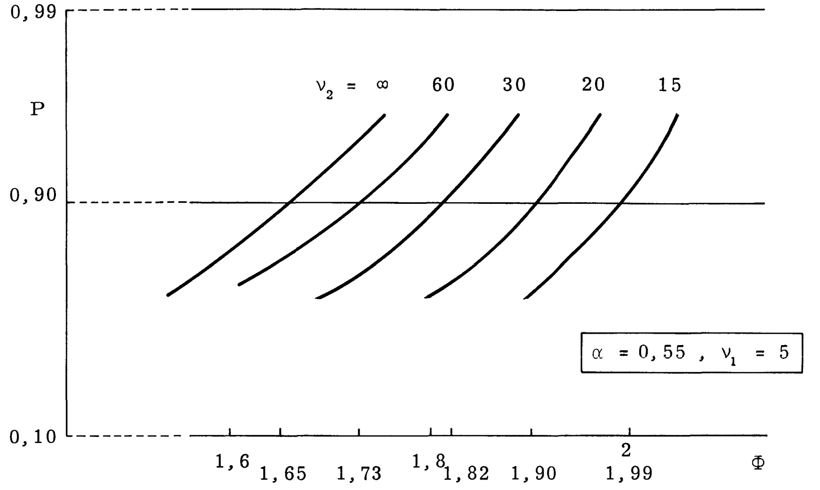


Figure 5 - Graphique de Pearson et Hartley.
Détermination de n pour k = 6, α = 0,05 , P = 0,90 , $\Phi = \sqrt{n}$,

Approximation - Si on envisage pour la variable $F' = \dfrac{1/\nu_1 \quad \chi'^2(\nu_1, \lambda_1)}{1/\nu_2 \quad \chi^2(\nu)}$,
l'approximation déjà signalée ci-dessus soit :

$$\chi'^2(\nu_1, \lambda_1) \sim \frac{\nu_1 + 2\lambda_1}{\nu_1 + \lambda_1}\chi^2(\nu'), \qquad \text{avec} \qquad \nu' = \frac{(\nu_1 + \lambda_1)^2}{\nu_1 + 2\lambda_1}$$

on pourra, pour $\nu_1 > 5$ utiliser l'approximation

$$F' \sim \frac{\dfrac{1}{\nu_1}\,\dfrac{\nu_1 + 2\lambda_1}{\nu_1 + \lambda_1}\,\nu'\,\dfrac{\chi^2(\nu')}{\nu'}}{\dfrac{1}{\nu_2}\,\chi^2(\nu_2)}$$

soit

$$F' \sim \left(1 + \frac{\lambda_1}{\nu_1}\right) F(\nu', \nu_2)$$

Exemple - Pour α = 0,05, $\nu_1 = 8$, $\nu_2 = 12$, $\Phi = 2$, le graphique de Pearson et Hartley donne une puissance P = 0,915.

Pour $\lambda_1 = \Phi^2(\nu_1 + 1) = 36$, l'approximation ci-dessus donne :

$$P = Pr \left[\left(1 + \frac{36}{8}\right) . F(24,2\ ;\ 12)\right] > F_{0,95}(8,\ 12)$$

$$P = Pr\ [F(24,2\ ;\ 12) \geq 1,93]$$

soit, par interpolation dans une table de F, approximativement 0,92.

REFERENCES COMPLEMENTAIRES

M.L. TIKU - Tables of the power of the F-test. Journal of the American Statistical Association 62 N° 319 (1967) p. 519/539

Ces tables, donnent la puissance du test F aux risques α = 0,005 - 0,01 - 0,025 et 0,05 pour

$$\nu_1 = 1\ (1)\ .....\ 10 - 12$$

$$\nu_2 = 2\ (2)\ .....\ 30 - 40 - 60 - 120 - \infty$$

$$\text{et} \quad \Phi = \sqrt{\frac{\lambda}{\nu_1 + 1}} = 0,5 - 1,0\ (0,2) - 2,2\ (0,4)\ ....\ 3$$

D.B. OWEN - A survey of properties and applications of the non central t-distribution. Technometrics 10 N° 3 (1968) p. 445/478

Etude théorique, nombreux exemples d'application. Comparaison de diverses approximations.