MAURICE DUMAS

L'épreuve séquentielle exhaustive

Revue de statistique appliquée, tome 17, nº 1 (1969), p. 5-40

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1969__17_1_5_0>

L'ÉPREUVE SÉQUENTIELLE EXHAUSTIVE

Maurice DUMAS

L'épreuve séquentielle de WALD connaît une grande faveur en raison de l'économie avec laquelle elle permet, dans le cadre des risques classiques, d'accepter ou de rejeter le lot d'élé-

ments qui la subit. Mais la théorie de cette épreuve implique la non-exhaustivité des prélèvements, alors que très généralement ceux-ci ont lieu de façon exhaustive.

Un document récent émanant de l'Association Française de Normalisation (Fascicule de Documentation NF. X 06 021) indique deux sujétions auxquelles l'on doit se soumettre pour que la discordance entre théorie et pratique soit sans conséquence sensible. La première est que l'effectif de l'échantillon au moment de la décision n'excède pas le dizième de l'effectif du lot. La seconde tient à ce que c'est avant l'exécution de l'échantillonnage que les parties doivent décider si celui-ci sera éventuellement tronqué, et dans quelles conditions : cela conduit à n'entreprendre une épreuve séquentielle de WALD que si l'effectif du lot est suffisamment grand. Ainsi, le même fascicule AFNOR que ci-dessus indique comme exemple qu'avec les données (notations classiques) : $p_1 = 0,02$; $p_2 = 0,10$; $\alpha = \beta = 0,10$, l'épreuve en cause n'est pas à entreprendre si l'effectif du lot n'est pas au moins égal à 780.

Notre note indique par quels calculs il est possible de tenir compte de l'exhaustivité du prélèvement, et par suite de s'abstraire totalement de l'une et l'autre des sujétions qui viennent d'être rappelées - et cela, sans sortir du cadre des mêmes risques classiques que ci-dessus.

L'épreuve séquentielle exhaustive complète donc l'épreuve séquentielle - non exhaustive - de WALD, sans viser à se substituer à cette dernière dans les cas où celle-ci est applicable dans des conditions satisfaisantes.

Nous adressons ici nos remerciements très chaleureux à Monsieur E. MORICE qui, en raison de l'intéret qu'il voyait à la question traitée dans notre note, a tenu à en prendre connaissance de façon approfondie, et nous a permis de faire profiter les lecteurs de la Revue de ses observations les plus pertinentes.

M. DUMAS

1 - INTRODUCTION

a) La présente note est relative aux épreuves séquentielles, dites aussi : "plans d'échantillonnage progressif", destinées à fournir à qui les exécute, un élément de décision quant au classement du lot (lot accepté, ou lot rejeté) venant de subir l'une d'elles.

Nous nous proposons d'en exposer brièvement la théorie, établie par WALD [1] et BARNARD [2], et, surtout, de rappeler [3] comment cette théorie, relative seulement au cas de tirages non-exhaustifs, peut être étendue au cas de tirages exhaustifs.

L'exposé est fait en comptant que toute épreuve comprend un ensemble d'essais dont chacun permet d'affecter à l'élément qui en a été l'objet l'un des attributs "bon" ou "défectueux".

U est l'effectif, connu, du lot ;

u est l'effectif, inconnu, des défectueux qu'il contient ;

p est le rapport u/U.

b) Le but que l'on se propose en faisant subir à un lot une épreuve séquentielle, est d'être conduit autant que possible à rejeter tout lot pour lequel u est grand et d'accepter tout lot pour lequel u est faible. Encore faut-il préciser ce que l'on entend par "grand" et "faible".

Pour cela, nous nous donnons deux valeurs u_1 et $u_2 > u_1$, et nous convenons de chercher à définir une épreuve répondant aux deux conditions suivantes :

- dans l'éventualité, hypothétique, dite H_1, où le lot contiendrait exactement u_1 défectueux, condition d'après laquelle la probabilité de rejeter le lot est inférieure ou égale à α, mais aussi voisine de α que possible ;

- dans l'éventualité, dite H_2, où le lot contiendrait exactement u_2 défectueux, condition d'après laquelle la probabilité d'accepter le lot est inférieure à β, mais aussi voisine de β que possible.

Aucune condition ne concerne les cas où u est différent à la fois de u_1 et de u_2. Cependant, on peut manifestement avancer que tout plan d'échantillonnage satisfaisant aux conditions venant d'êtres dites, assure une probabilité de rejet inférieur à α à tout lot caractérisé par $u < u_1$ et une probabilité d'acceptation inférieure à β à tout lot caractérisé par $u > u_2$.

c) En cas de tirages non exhaustifs, on doit considérer non plus u_1 et u_2, mais les rapports p_1 et p_2, définis par :

$$p_1 = \frac{u_1}{U} \qquad \text{et} \qquad p_2 = \frac{u_2}{U}$$

d) α et β sont ce que l'on appelle les "risques" correspondant respectivement à H_1 et à H_2.

2 - REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

a) Nous faisons usage de représentations graphiques sur le quart de plan ayant pour coordonnées le nombre des bons en abscisses x et des défectueux en ordonnées y ; de la sorte les résultats des essais successifs constituant une épreuve sont représentés par un cheminement à angles droits partant de l'origine 0 et progressant sans jamais revenir en arrière ni suivant $0x$, ni suivant Oy, jusqu'au point Z où l'épreuve est arrêtée (Fig. 1).

Toute spécification incluse dans une condition de réception se traduit par une frontière, lieu des points Z où l'épreuve peut prendre fin. Ainsi :

- si l'épreuve doit porter un nombre N d'essais, la frontière correspondante est la droite d'équation $x + y = N$ (Fig. 1) ;

- si une décision d'acceptation intervient lorsque c défectueux au plus ont été constatés en N essais, et une décision de rejet dans tout cas autre, la parallèle à l'axe des x, d'ordonnée $c + 1$, constitue une ligne de rejet ; simultanément, une ligne d'acceptation est constituée par la droite à 45° partant du point $y = 0$, $x = N - c$; il y a lieu de plus de tenir compte de la limitation définie par $x + y = N$;

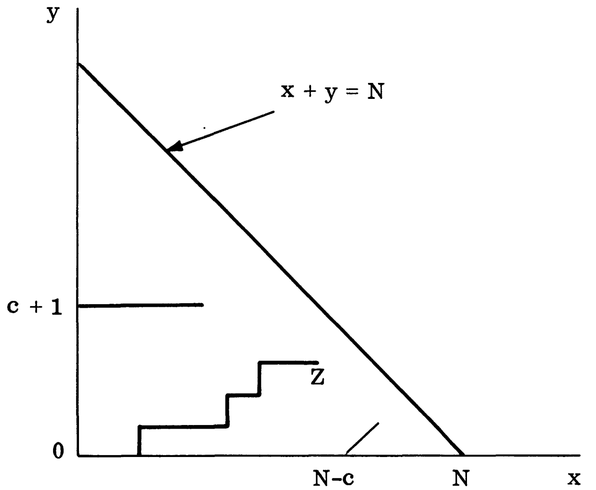

Figure 1 - Cheminement (cf : n° 2).

- si l'épreuve est exhaustive, et porte sur un lot de U éléments dont u sont défectueux, aucun cheminement ne peut se prolonger au-delà du rectangle limité par la parallèle à l'axe des x d'ordonnée u, et par la parallèle à l'axe des y d'abscisse U-u.

b) Nous donnons parfois dans la suite l'indication d'après laquelle nous faisons par exception usage, non de la représentation précédente, mais d'une représentation voisine, à savoir : en abscisses le nombre total des essais et en ordonnées, le nombre des défectueux ; les indications données en a sont alors à modifier en conséquence.

3 - PROBABILITE D'ATTEINDRE UN ENSEMBLE DE POINTS Z(x, y)

a) Dans le cadre d'une certaine éventualité H concernant la composition du lot soumis à l'épreuve, la probabilité que l'on a avant l'épreuve d'atteindre un point Z, de coordonnées x et y, suivant un des cheminements possibles de 0 à Z, est égale à une certaine quantité Pr(Z/H), la même quel que soit le cheminement qui sera suivi.

La probabilité d'atteindre le point Z par n'importe lequel des cheminements possibles est égale au produit de Pr(Z/H) par le nombre des cheminements possibles.

b) Si rien dans les spécifications concernant l'épreuve ne s'oppose à ce que tous les cheminements menant de 0 à Z, sur le graphique défini au N° 2 puissent être suivis, le nombre des cheminements possibles est C_{x+y}^{x}, et l'on a en particulier ceci :

1/ Epreuve non-exhaustive : dans l'éventualité H, la probabilité d'arrivée d'un défectueux étant p :

$$\Pr(Z/H) = p^{y}(1 - p)^{x}$$

et la probabilité d'atteindre Z est

$$C_{x+y}^{x}\, p^{y}(1 - p)^{x} \;;$$

2/ Epreuve exhaustive : le lot est d'effectif U ; l'éventualité H' est que ce lot contienne u défectueux ; alors :

$$\Pr(Z/H') = \frac{C_{U-x-y}^{u-y}}{C_{U}^{u}}$$

et la probabilité d'atteindre Z est égale à la même quantité, multipliée comme plus haut par C_{x+y}^{x}.

c) Si l'épreuve implique au moins une frontière, certains cheminements possibles précédemment, deviennent impossibles. Dans tous les cas, le nombre des cheminements restant possibles est désigné par M(OZ), qui est au plus égal à C_{x+y}^{x}.

La probabilité d'atteindre Z est donc représentée suivant les cas par

$$M(OZ)p^{y}\,(1 - p)^{x} \quad \text{-épreuve non-exhaustive-}$$

ou par

$$M(OZ)\,\frac{C_{U-x-y}^{u-y}}{C_{U}^{u}} \qquad \text{-épreuve exhaustive-}$$

d) A tout ensemble de points Z situés sur une ligne L (par exemple : ligne d'acceptation, ligne de rejet....) on peut faire correspondre la probabilité totale que l'épreuve se termine en l'un ou en l'autre points de L ; soit T Pr(L/H) cette probabilité totale qui est égale à

$$\sum_{L} M\,(OZ)\;\Pr\,(Z/H)$$

4 - EPREUVE SEQUENTIELLE NON-EXHAUSTIVE

a) Les données sont les éventualités H_1 et H_2 auxquelles sont associées comme il a été dit plus haut, les quantités p_1 et α d'une part, et p_2 et β d'autre part.

Depuis les travaux de WALD et de BARNARD, il est classique de définir une ligne d'acceptation du lot soumis à l'épreuve (ligne A, point courant Z_A) par la condition que sur cette ligne le rapport des vraisemblances - c'est-à-dire le rapport des quantités symbolisées au N° 3 par Pr(Z/H) - correspondant respectivement à H_1 et à H_2, soit égal à une certaine fonction des risques α et β ; plus précisément, posons

$$\begin{cases} \dfrac{\Pr\,(Z_A/H_2)}{\Pr\,(Z_A/H_1)} = f\,(\alpha, \beta) \\[2ex] \dfrac{\Pr\,(Z_R/H_2)}{\Pr\,(Z_R/H_1)} = \varphi\,(\alpha, \beta) \end{cases} \tag{1}$$

la seconde relation correspondant à la ligne de rejet (ligne R, point courant Z_R).

Manifestement $f(\alpha, \beta)$ ne peut être qu'inférieur à l'unité, tandis que $\varphi(\alpha, \beta)$ ne peut être que supérieur à l'unité.

Du fait de ces relations, on a :

$$\left\{\begin{aligned} T\ Pr(A/H_2) &= \sum_A M(OZ_A)\ Pr(Z_A/H_2) = f \sum_A M(OZ_A)\ Pr(Z_A/H_1) \\ &= f\ T\ Pr(A/H_1) \\ T\ Pr(R/H_2) &= \varphi\ T\ Pr(R/H_1) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

De plus, sous réserve que les lignes A et R forment avec les axes de coordonnées Ox et OY un contour fermé, ou soient des droites parallèles entre elles, on peut écrire :

$$\begin{aligned} T\ Pr(A/H_1) + T\ Pr(R/H_1) = 1 \\ T\ Pr(A/H_2) + T\ Pr(R/H_2) = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Tirant de (2) et (3) les expressions voulues, il suffit d'écrire d'après les définitions des risques, rappelées au N° 1 :

$$T\ Pr(R/H_1) = \alpha \qquad \text{et} \qquad T\ Pr(A/H_2) = \beta \tag{4}$$

pour être conduit aux expressions classiques :

$$f = \frac{\beta}{1 - \alpha} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \frac{1 - \beta}{\alpha}$$

Ces valeurs sont à porter dans (1), expressions dans lesquelles on remplace d'une façon générale.

$$\frac{Pr(Z/H_2)}{Pr(Z/H_1)} \quad \text{par} \quad \frac{p_2^y(1 - p_2)^x}{p_1^y(1 - p_1)^x}$$

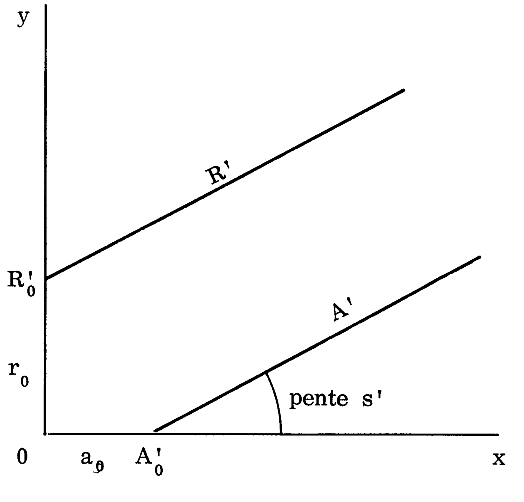

Figure 2 - Droites de WALD dans le plan (x, y) (cf : n° 4 a).

On trouve que les lignes d'acceptation et de rejet (Fig. 2) sont deux droites parallèles, ou plutôt, deux demi-droites A' et R' qui dans le plan des (x, y) ont pour origines respectives :

point A'_0 :

$$x = \frac{\log \frac{1-\alpha}{\beta}}{\log \frac{1-p_1}{1-p_2}} = a_0 \quad ; \quad y = 0,$$

point R'_0 :

$$y = \frac{\log \frac{1-\beta}{\alpha}}{\log \frac{p_2}{p_1}} = r_0 \quad ; \quad x = 0,$$

et pour pente commune

$$s' = \frac{\log \frac{1-p_1}{1-p_2}}{\log \frac{p_2}{p_1}}$$

N.B. - Avec de nombreuses approximations, que nous ne cherchons pas à justifier, mais à condition au moins que p_2 soit peu supérieur à p_1, nous écrivons :

$$s' = \frac{\mathrm{Ln}\, \frac{1-p_1}{1-p_2}}{\mathrm{Ln}\, \frac{p_1 + p_2 - p_1}{p_1}} \approx \frac{\mathrm{Ln}\,(1 + p_2 - p_1)}{\mathrm{Ln}\left(1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}\right)} \approx \frac{p_2 - p_1 - \frac{(p_2 - p_1)^2}{2}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1} - \frac{(p_2 - p_1)^2}{2\, p_1^2}} =$$

$$p_1 \frac{1 - \frac{p_2 - p_1}{2}}{1 - \frac{p_2 - p_1}{2\, p_1}} \approx p_1 \left[1 + \frac{p_2 - p_1}{2\, p_1} \right] = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

En fait, pour $p_2 = 1{,}5\, p_1$, s' et $\frac{p_1 + p_2}{2}$ sont égaux à 1 % près, et pour $p_2 = 5\, p_1$, ils sont à peu près dans le rapport de 0,25 à 0,30.

b) Nous avons plus haut accentué quelques notations afin de les distinguer de celles que l'on fait souvent correspondre au cas où la discussion a lieu non plus dans le plan des (x, y) mais dans celui des (n, y) avec n = x + y ; l'abscisse n est alors égale au nombre total des essais. Les caractéristiques correspondantes (Fig. 3) sont définies en fonction des quantités a_0, r_0 et s' du a ci-dessus :

- par la demi-droite d'acceptation A, qui commence au point

$$A_0 \qquad n = 0A_0 = a_0 \quad ; \quad y = 0$$

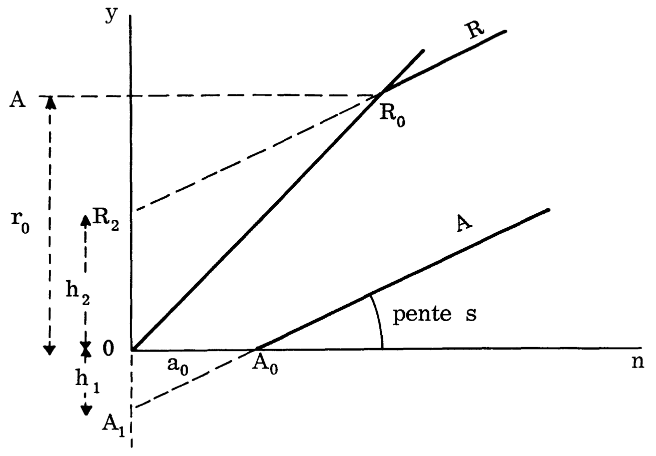

Figure 3 - Droites de WALD dans le plan (n, y) (cf : n° 4 b).

et dont le prolongement passe par le point

$$A_1 \quad n = 0 \quad ; y = 0A_1 = - sa_0 = - h_1 \ ;$$

- par la demi-droite de rejet R, qui commence au point

$$R_0 : \quad n = y = r_0$$

et dont le prolongement passe par le point

$$R_2 : \quad n = 0 \quad ; \quad y = r_0 (1 - s) = h_2 \ ;$$

- par la pente commune des demi-droites, à savoir :

$$s = \frac{\log \frac{1 - p_1}{1 - p_2}}{\log \frac{p_2}{p_1} + \log \frac{1 - p_1}{1 - p_2}} = \frac{s'}{1 + s'}$$

Avec ces notations, les équations des lignes A et R sont respectivement :

$$a_n = - h_1 + sn \quad \text{et} \quad r_n = h_2 + sn.$$

A noter que

$$h_1 = h_2 \quad \text{si} \quad \alpha = \beta$$

5 - GENERALITES SUR L'EPREUVE SEQUENTIELLE EXHAUSTIVE

a) Les données sont l'effectif U du lot, ainsi que les valeurs u_1 et u_2 qui définissent les éventualités H_1 et H_2 et les probabilités α et β qui sont associées à ces éventualités.

Nous convenons de suivre le déroulement de l'épreuve par un cheminement sur un plan avec, en abscisses x le nombre des bons et en ordonnées y celui des défectueux. Nous convenons également, comme pour l'épreuve non-exhaustive, de rechercher dans ce plan une ligne d'acceptation et une ligne de rejet, telles que si le cheminement atteint l'une d'elles on soit autorisé à conclure respectivement à l'acceptation ou au rejet du lot.

Remarquons que ces lignes A et R ne peuvent pas être infinies. Considérons en effet la région du quart du plan limité par les deux parallèles aux axes d'équations $x = U - u_2 + 1$ pour l'une et $y = u_1 + 1$ pour l'autre.

Si le cheminement relatif à l'épreuve atteint la droite $y = u_1 + 1$, on a la certitude qu'avant l'épreuve le lot contenait plus de u_1 défectueux ; s'il atteint la droite $x = U - u_2 + 1$, la certitude correspondante est que le lot contenait moins de u_2 défectueux.

Dans ces conditions aucune des parties en cause - producteur et client - ne peut s'opposer à la convention d'après laquelle le lot sera rebuté si, à l'épreuve, le cheminement atteint $y = u_1 + 1$ et sera, au contraire, accepté, si ce cheminement atteint $x = U - u_2 + 1$.

Nous faisons expressément cette convention, grâce à laquelle, comme nous allons le voir, les lignes A et R peuvent être définies, comme dans le cas de l'épreuve séquenteille non-exhaustive, à partir de la considération d'un rapport de vraisemblances.

Si une convention différente était faite et si elle conduisait à envisager le cas d'un cheminement sortant du domaine limité par $y = u_1$ et $x = U - u_2$, sans doute alors faudrait-il considérer directement des probabilités d'atteinte, calculées en tenant compte qu'au delà de $y = u_1$, la probabilité d'atteinte dans l'éventualité H_1 est nulle, et qu'au delà de $x = U - u_2$, la probabilité d'atteinte dans l'éventualité H_2 est nulle également.

En raison de la convention faite, nous sommes conduits à rechercher des lignes A et R limitées par les deux droites en cause plus haut. Nous savons que la ligne A commence en un point de la partie positive de l'axe des x ; que la ligne R commence en un point de la partie positive de l'axe des y ; qu'aucune de ces lignes ne peut aller en décroissant et que ces lignes ne se coupent pas.

Les connaissances ainsi rappelées ne suffisent pas à éviter que trois cas soient à considérer, suivant les positions des points par lesquels les lignes A et R quittent le domaine. Ces cas font l'objet des deux numéros qui suivent.

6 - PREMIER CAS DE L'EPREUVE SEQUENTIELLE EXHAUSTIVE

a) Comme premier cas, nous examinons celui de la figure 4 où la ligne d'acceptation A est limitée par la droite $x = U - u_2 + 1$ et où la ligne de rejet R est limitée par la droite $y = u_1 + 1$. L'exemple 1 du N° 9 correspond à ce cas.

Dans l'éventualité H_1, la probabilité d'atteinte de la portion utile de la droite $y = u_1 + 1$ est nulle ; soit ε_2 la probabilité d'atteinte de cette même portion dans l'éventualité H_2. De même, la probabilité d'atteinte de la portion utile de la droite $x = U - u_2 + 1$ est nulle dans l'éventualité H_2 et elle est notée ε_1 dans l'éventualité H_1. Dans le cas qui nous occupe, ni ε_1, ni ε_2 ne sont nuls.

Ainsi on définit les lignes A et R, limitées comme il a été dit, par les mêmes équations (1) et (2) qu'au numéro précédent, mais on doit remplacer (3) par :

$$\begin{aligned} T\ Pr(A/H_1) + T\ Pr(R/H_1) &= 1 - \varepsilon_1 \\ T\ Pr(A/H_2) + T\ Pr(R/H_2) &= 1 - \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{5}$$

si bien qu'aux relations (4) correspondent :

$$\begin{cases} T\ Pr(R/H_1) = \dfrac{1}{\varphi - f}\,[1 - \varepsilon_2 - f(1 - \varepsilon_1)] \leq \alpha \\ T\ Pr(A/H_2) = \dfrac{f}{\varphi - f}\,[\varphi(1 - \varepsilon_1) - (1 - \varepsilon_2)] \leq \beta \end{cases} \tag{6}$$

On remarquera qu'aux égalités (4) correspondent des inégalités. Faute en effet de connaître ε_1 et ε_2, nous ne pouvons espérer satisfaire à des égalités, et il nous a fallu marquer dans quel sens nous étions en droit de transgresser les égalités que nous aurions été tentés d'écrire ; en l'occurrence, le signe "inférieur ou égal à" que nous avons utilisé à cet effet, a pour signification "égal ou aussi peu inférieur que possible à".

b) Compte tenu de ce que ε_1 et ε_2, étant des probabilités, sont comprises entre 0 et 1, nous allons chercher des quantités majorant respectivement les deux crochets de (6).

Posant

$$X \equiv f\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 1 - f$$

et

$$Y \equiv -\varphi\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1 + \varphi$$

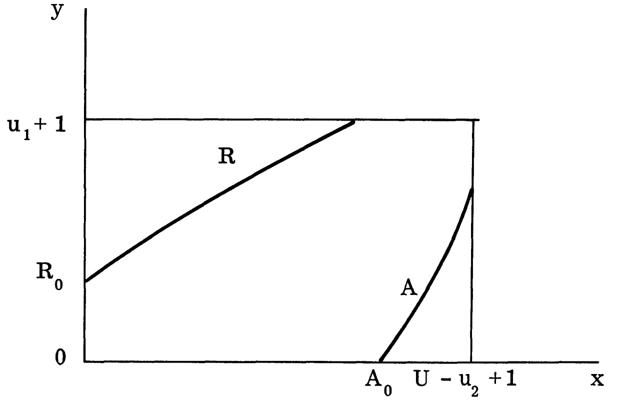

Figure 4 - Premier cas (cf : n° 6 a).

les relations (6), compte tenu de ce que $f < 1 < \varphi$, s'écrivent :

$$\begin{cases} X \leq \alpha(\varphi - f) \\ Y \leq \beta \dfrac{\varphi - f}{f} \end{cases}$$

Dans le plan (Fig. 5), des $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, la droite $X = 0$ est la droite, de pente f, passant par les points $C(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1)$ et $D(\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 1 - f)$; de même, la droite $Y = 0$ est la droite, de pente φ, passant par les points C et E $(\varepsilon_1 = \frac{\varphi - 1}{\varphi}, \varepsilon_2 = 0)$; comme X et Y sont positifs à l'intérieur du quadrilatère OECD, le maximum possible de X se situe au point E et celui de Y au point D ; d'où

$$X_{max} = \frac{\varphi - f}{\varphi} \quad \text{et} \quad Y_{max} = \varphi - f$$

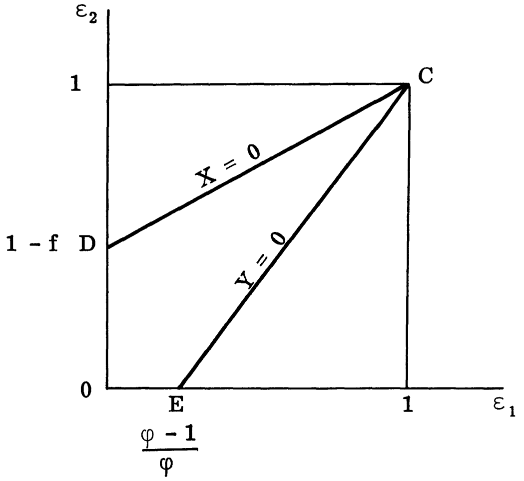

Figure 5 - Raisonnement du n° 6 b.

Pour que les relations (6) soient satisfaites, il suffit donc d'avoir :

$$f = \beta \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{1}{\alpha} \tag{7}$$

c) Puisque l'on est dans le cas de l'exhaustivité, l'on a, d'après le N° 3 b et c :

$$\frac{Pr(Z/H_2)}{Pr(Z/H_1)} = \frac{M(0Z)\ C^{u_2-y}_{U-x-y}}{C^{u_2}_{U}} \cdot \frac{C^{u_1}_{U}}{M(0Z)\ C^{u_1-y}_{U-x-y}}$$

A ce rapport qui a une valeur bien déterminée en tous les points, de coordonnées entières, du domaine considéré (Fig. 4), droites $y = u_1 + 1$ et $x = U - u_2 + 1$ exclues, nous donnons le nom de cote C du point en cause et nous posons :

$$C(x, y) = \frac{Pr(Z/H_2)}{Pr(Z/H_1)} = \frac{u_2!}{u_1!} \frac{(U - u_2)!}{(U - u_1)!} \frac{(u_1 - y)!}{(u_2 - y)!} \frac{(U - u_1 - x)!}{(U - u_2 - x)!} \tag{8}$$

Les calculs correspondant à cette quantité font l'objet de l'Annexe B.

Les équations des lignes A et R de la figure 4, qui s'obtiennent en portant dans (1) les valeurs de f et de φ indiquées par (7), sont finalement :

$$\begin{cases} C(x_A , y_A) = \beta \\ C(x_R , y_R) = \dfrac{1}{\alpha} \end{cases} \tag{9}$$

Plus précisément, x et y étant des entiers, on peut prendre comme ligne A une ligne qui contient, ou qui laisse à sa droite (côté des x grands) tous les points dont la cote C(x, y) est inférieure ou égale à β, et seulement ces points ; et comme ligne R, une ligne qui contient ou qui laisse au-dessus d'elle (côté des y grands) tous les points dont la cote est supérieure ou égale à $1/\alpha$, et seulement ces points.

La détermination de ces lignes est grandement facilitée si l'on a préalablement recours à un calcul approximatif.

d) Pour un calcul approximatif, nous proposons d'utiliser la formule suivante, dont l'approximation, discutée dans l'Annexe A, est un cas d'espèce :

$$\frac{V\,!}{(V - S)\,!} \approx \left(V - \frac{S - 1}{2}\right)^{S} \tag{10}$$

En particulier d'après cette formule :

$$\frac{(u_1 - y)\,!}{(u_2 - y)\,!}\;\frac{(U - u_1 - x)\,!}{(U - u_2 - x)\,!} \approx \left[\frac{U - \dfrac{u_1 + u_2 - 1}{2} - x}{\dfrac{u_1 + u_2 + 1}{2} - y}\right]^{u_2 - u_1}$$

de sorte que les équations (9) ont pour formes approximatives :

$$\begin{aligned} y_A - \frac{u_1 + u_2 + 1}{2} &= \mu_A \left[x_A - U + \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}\right] \\ y_R - \frac{u_1 + u_2 + 1}{2} &= \mu_R \left[x_R - U + \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}\right] \end{aligned} \tag{11}$$

avec

$$\beta\, \mu_A^{u_2 - u_1} = \frac{1}{\alpha}\,\mu_R^{u_2 - u_1} = \frac{u_2\,!}{u_1\,!}\;\frac{(U - u_2)\,!}{(U - u_1)\,!} \approx \left[\frac{\dfrac{u_1 + u_2 + 1}{2}}{U - \dfrac{u_1 + u_2 - 1}{2}}\right]^{u_2 - u_1} \tag{12}$$

Ce sont là les équations des droites B et T (Fig. 6) qui se coupent au point M de coordonnées

$$U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{u_1 + u_2 + 1}{2}$$

Ce point M est situé à l'extérieur du contour limité (Fig. 4) par $x = U - u_2 + 1$ et $y = u_1 + 1$, ou au sommet de ce contour si $u_2 = u_1 + 1$, et précisément à 45° de ce sommet.

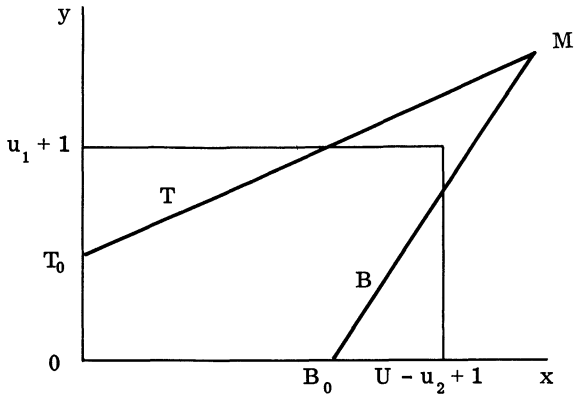

Figure 6 - Contour approché (cf : n° 6 d).

Il est remarquable que le point M ne dépende aucunement des risques α et β.

Les droites B et T coupent les axes aux points B_0 et T_0, définis ici :

$$\left\{\begin{array}{l} B_0 \quad x = U - \dfrac{u_1 + u_2 - 1}{2} - \dfrac{1}{\mu_A}\dfrac{u_1 + u_2 + 1}{2} \approx \left[U - \dfrac{u_1 + u_2 - 1}{2}\right][1 - \beta^{\frac{1}{u_2 - u_1}}] ; y = 0 \\ T_0 \quad x = 0 \; ; y = \dfrac{u_1 + u_2 + 1}{2} - \mu_R \left[U - \dfrac{u_1 + u_2 - 1}{2}\right] \approx \dfrac{u_1 + u_2 + 1}{2}[1 - \alpha^{\frac{1}{u_2 - u_1}}] \end{array}\right. \quad (13)$$

7 - AUTRES CAS DE L'EPREUVE SEQUENTIELLE EXHAUSTIVE

a) Comme second cas, nous examinons celui de la figure 7 où la ligne d'acceptation A et la ligne de rejet R sont l'une et l'autre limitées par la droite $y = u_1 + 1$. Les exemples 2 et 3 du N° 10 correspondent à ce cas.

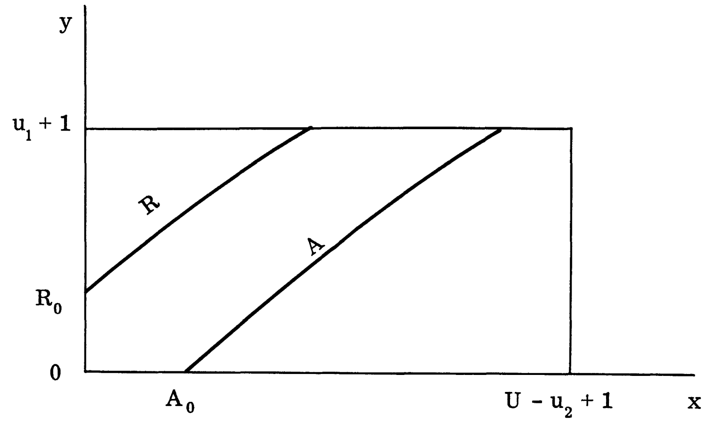

Figure 7 - Second cas (cf : n° 7 a).

Seul resterait à examiner le cas où ces mêmes lignes seraient l'une et l'autre limitées par la droite $x = U - u_2 + 1$; mais ce cas ne paraît guère pouvoir se présenter que si la droite à 45° issue de M (cf. N° 6 d) coupe l'axe des y en un point d'ordonnée positive, ce qui conduit à la condition $x_M < y_M$, d'où $U < u_1 + u_2$. Aussi ce cas nous paraît-il n'avoir aucun intérêt pratique, de sorte qu'il n'est aucunement traité dans la présente note .

b) Gardant les notations ε_1 et ε_2 et les définitions correspondantes dites à propos du premier cas, on voit que le second cas est caractérisé par $\varepsilon_1 = 0$ puisque la droite $x = U - u_2 + 1$ ne comprend aucune partie utile ; par contre, la droite $y = u_1 + 1$ a une partie utile, à savoir celle qui est comprise entre les lignes A et R ; ε_2 est par suite différent de zéro.

Pour l'étude du second cas, les formules (5) et (6) demeurent valables, sauf à y faire $\varepsilon_1 = 0$; quant au raisonnement du N° 6 b, qui est incompatible avec $\varepsilon_1 = 0$, il peut être remplacé par le suivant.

Les nouvelles relations (6) montrent que f et φ doivent satisfaire aux inégalités

$$\frac{1}{\varphi - f}[1 - \varepsilon_2 - f] \leq \alpha \quad \text{et} \quad \frac{f}{\varphi - f}[\varphi - 1 + \varepsilon_2] \leq \beta$$

lesquelles peuvent être écrites :

$$1 - f - (\varphi - f)\,\alpha \leq \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon_2 \leq \frac{\varphi - f}{f}\beta + 1 - \varphi \tag{14}$$

Comme on sait seulement que ε_2, non nul, est compris entre 0 et 1, ces inégalités sont certainement satisfaites si l'on a :

$$\begin{cases} 1 - f - (\varphi - f)\,\alpha \leq 0 \\ (\varphi - f)\,\beta - f\varphi \geq 0 \end{cases} \tag{15}$$

Le problème revient à rechercher la région du plan des (f, φ) dans laquelle on a, pour f et φ positifs :

$$X \leq 0 \qquad \text{et} \qquad Y \geq 0$$

avec

$$X \equiv 1 - f - (\varphi - f)\alpha \quad \text{et} \quad Y \equiv (\varphi - f)\,\beta - f\varphi.$$

Dans le plan en cause, la ligne $X = 0$ est la droite qui passe par les deux points suivants (Fig. 8) :

$$\begin{cases} f = 0 \\ \varphi = \dfrac{1}{\alpha} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi = 0 \\ f = \dfrac{1}{1 - \alpha} \end{cases}$$

Dans le même plan, la courbe $Y = 0$ est l'hyperbole équilatère qui, ainsi que le montre une étude élémentaire, passe par l'origine $f = \varphi = 0$, a son ordonnée φ qui croît avec f et qui devient infiniment grande pour $f = \beta$.

La figure 8 représente les droite et courbe en cause, dans la région des valeurs positives de f et de φ. La continuation de l'étude montre que la seule région du plan où l'on ait à la fois $X < 0$ et $Y > 0$ est celle qui, hâchurée sur la figure, se trouve au-dessus (côté des φ grands) de la droite $X = 0$ et entre l'axe des ordonnées d'une part et la branche d'hyperbole d'autre part.

Il est ainsi permis de choisir un couple de valeurs de f et de φ parmi tous ceux de la région hâchurée, sans qu'au premier abord un couple paraisse devoir être choisi de préférence à tout autre.

Dans ces conditions, nous nous bornons à remarquer que le point de l'hyperbole équilatère qui a pour ordonné $\varphi = 1/\alpha$, a pour abscisse $f = \frac{\beta}{1 + \alpha\beta}$, et que ce sont là des valeurs tellement proches dans leur ensemble de celles du premier cas (à savoir : $\varphi = 1/\alpha$ et $f = \beta$) que nous nous sentons, pratiquement, autorisé à considérer que tous les résultats exposés dans les §§ c et d du N° 6, sont valables pour le second cas comme ils le sont pour le premier. Au demeurant, si un calcul préliminaire conduisait à reconnaître que l'on est dans les conditions du second cas, il serait toujours possible de reprendre ces calculs après avoir changé β en $\beta' = \frac{\beta}{1 + \alpha\beta}$.

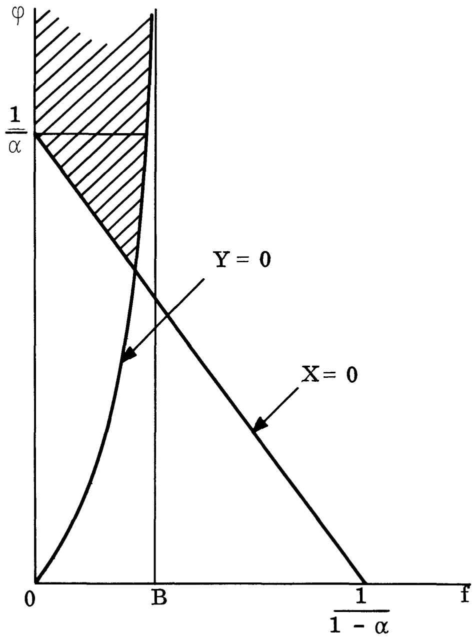

Figure 8 - Raisonnement du n° 7 b.

8 - COMPARAISON DES EPREUVES SEQUENTIELLES EXHAUSTIVE ET NON-EXHAUSTIVE.

a) Généralités

Quelles que soient les valeurs de U, de u_1 et de u_2, et par suite aussi de p_1 et de p_2, il est possible de calculer comme il est indiqué plus haut les points des deux lignes A et R de l'épreuve séquentielle exhaustive et aussi ceux des deux droites de WALD, correspondant au cas de la non-exhaustivité. Mais tandis que les lignes A et R sont toujours valables, les droites de WALD ne sont valables que sous certaines conditions : l'intérêt de l'épreuve séquentielle exhaustive est d'ailleurs surtout grand lorsque ces dernières conditions ne sont pas remplies.

Les comparaisons qui suivent sont faites sans tenir compte de la question de validité : des droites de WALD seront calculées dans les exemples illustrant ces comparaisons (N° 9 et suivants) à partir de données telles qu'il serait absolument aberrant de les utiliser - à moins que les prélèvements aient lieu effectivement de façon non-exhaustive.

b) Contours exhaustif et non-exhaustif

La question des positions relatives des lignes d'acceptation et de rejet suivant qu'il s'agit du cas exhaustif ou du cas non-exhaustif, est examinée ci-après, en s'aidant des indications des figures 9 et 10.

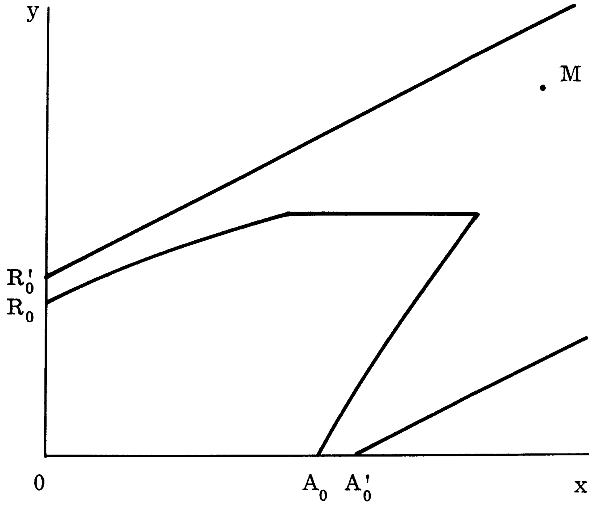

Figure 9 - U faible

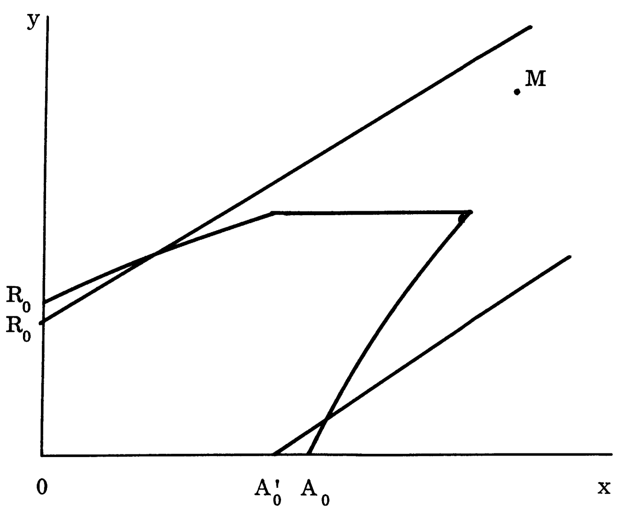

Figure 10 - U grand

Figures 9 et 10 - Positions relatives des lignes d'acceptation et de rejet (cf : n° 8 b).

1/ Dans le cas d'exhaustivité, les points de départ des lignes A et R sont respectivement (notations de la figure 4) A_0 sur l'axe des x et R_0 sur l'axe des y ; nous admettons qu'à partir de ces points, les lignes se dirigent vers le point M de la figure 6, bien que cette figure fasse partir les droites qui y sont représentées des points B_0 et T_0, voisins de A_0 et R_0.

Dans le cas de non-exhaustivité, les points de départ des deux droites parallèles de WALD sont de même A'_0 et R'_0 (notations de la figure 2).

La comparaison que nous nous proposons de faire entre les deux cas résulte des positions relatives des points en cause.

En l'occurrence, nous raisonnerons comme si le point M était l'aboutissement des lignes A et R, alors que ces lignes, qui, avant d'arriver au point M, sont de toute façon tronquées par les droites $y = u_1 + 1$ et $x = U - u_2 + 1$, s'éloignent quelque peu, (voir le n° A-4d), des droites A_0M et R_0M.

Nous avançons que le point M est toujours, sauf, peut-être, exception, entre les deux droites de WALD. Cela résulte de ce que la droite OM a pour pente d'après les coordonnées de M :

$$\frac{u_1 + u_2 + 1}{2U - u_1 - u_2 + 1}$$

soit sensiblement $\frac{p_1 + p_2}{2}$; et de ce que la pente s' des droites de WALD est elle-même (cf. N° 4a) sensiblement égale à la même quantité.

2/ Pour U, u_1 et u_2 donnés, on peut coter chaque point de l'axe Ox par le moyen de la formule (8) dans laquelle on fait $y = 0$.

La cote est nulle à l'infini de l'axe Ox ; elle est égale à 1 à l'origine.

Si l'on considère ce qui se passe en un point de l'axe Ox, alors que U varie tandis que le rapport u_2/u_1 reste constant, on voit que la cote de ce point croît en même temps que U et qu'elle devient égale à $\frac{(1 - p_2)^x}{(1 - p_1)^x}$ pour U infiniment grand - ce qui correspond à la valeur de la cote en cas de non-exhaustivité.

On sait que A_0 est le point de Ox de cote β. Soit A''_0 le point pour lequel on a $\frac{(1 - p_2)^x}{(1 - p_1)^x} = \beta$, c'est-à-dire le point d'où partirait la droite d'acceptation de WALD si la théorie correspondante (N° 4 b) avait conduit à prendre f égal à β ; mais en fait cette théorie n'a pas conduit à prendre cette valeur et la cote du point A'_0, origine réelle de la droite considérée, est $\frac{\beta}{1 - \alpha}$, ce qui est supérieur à β.

Il s'ensuit que sur l'axe Ox on trouve toujours à partir de l'origine le point A_0 puis le point A''_0, de même qu'on trouve toujours A'_0 puis A''_0 ; mais les positions relatives de A_0 et de A'_0 sont des cas d'espèce, en ce sens que, à partir du moment où U est suffisamment grand, les points se placent dans l'ordre 0, A'_0, A_0, A''_0.

On doit donc s'attendre à ce que le point A_0 (cas de l'exhaustivité) soit plus près de l'origine que le point A'_0 (de la droite de WALD), et cela dans presque tous les cas de la pratique, puisque l'intérêt de la considération de la non-exhaustivité n'existe guère que si U est relativement petit.

3/ Une discussion analogue à la précédente mais relative à l'axe Oy conduit à une conclusion analogue, à savoir : on doit s'attendre à ce que dans presque tous les cas de la pratique, le point R_0 (cas de l'exhaustivité) soit plus près de l'origine que le point R'_0 (de la droite de WALD).

Soit R''_0 le point qui serait l'origine de la droite de WALD si celle-ci était calculée d'après la valeur $1/\alpha$, tandis qu'elle est calculée (point R'_0) d'après $\frac{1 - \beta}{\alpha}$.

4/ Les valeurs de $0A_0$, $0A'_0$ et $0A''_0$ d'une part, et celles de $0R_0$, $0R'_0$ et $0R''_0$ d'autre part, ont été calculées dans le cas de chacun des exemples numériques traités plus loin.

5/ Les figures 9 et 10 schématisent les positions relatives des lignes correspondant aux formules respectives des cas de l'exhaustivité et de la non-exhaustivité, en fonction des valeurs de U.

La figure 9 correspond à U relativement faible ; c'est, peut-on dire, toujours le cas, du moins lorsqu'il est indiqué de se servir des formules d'exhaustivité.

La figure 10 représente par contre un cas (U grand) qui peut être considéré comme exceptionnel ; au demeurant, dans un tel cas, sans doute est-il admissible d'adopter le contour exhaustif, sauf à remplacer les parties les plus voisines des axes par les portions de droite correspondantes, et à définir ainsi un contour mixte donnant les garanties désirées.

c) Economie des épreuves

La position relative des lignes telle qu'elle résulte de ce qui précède permet d'avancer, sans calcul, que l'épreuve séquentielle exhaustive est encore plus économique que l'épreuve correspondante non-exhaustive, et cela en toute rigueur, à moins que U soit à ce point grand que les petits débordements (Fig. 10) au-delà des droites de WALD aient une influence sensible sur le résultat avancé - ce qui apparaît comme bien peu probable.

d) Tronquage

On est parfois conduit à avoir recours au tronquage d'une épreuve séquentielle et cela soulève quelques difficultés du point de vue de la valeur des risques encourus ; avec l'épreuve séquentielle exhaustive, la nécessité pratique d'un tronquage sera manifestement moins fréquente qu'avec l'épreuve séquentielle non-exhaustive correspondante : plus précisément un tronquage doit nécessairement être défini explicitement dans toute condition de recette prévoyant une épreuve séquentielle non-exhaustive, tandis que rien n'impose une telle obligation dans le cas de l'autre épreuve.

Lorsque l'on envisage le tronquage d'une épreuve non-exhaustive, il serait d'ailleurs normal de reconnaître auparavant comment la règle de l'épreuve séquentielle exhaustive permet de conclure, avec le respect intégral des risques α et β.

9 - EXEMPLE 1

a) Les données sont

$$U = 15 \; ; \; u_1 = 3 \; ; \; u_2 = 6 \; ; \; \alpha = 0{,}10 \; ; \; \beta = 0{,}05$$

d'où

$$\mu_A^3 = \frac{1}{0{,}05} \cdot \frac{6\,!}{3\,!} \cdot \frac{9\,!}{12\,!} = \frac{20}{11} = 1{,}22^3$$

et

$$\mu_R^3 = \frac{0{,}10}{11} = 0{,}209^3$$

Ainsi, des approximations des lignes A et R cherchées sont, d'après les formules (11), constituées par les droites :

$$\text{B} \quad y_B = 5 + 1{,}22\;(x_B - 11) \approx -\,8{,}42 + 1{,}22\;x_B$$
$$\text{T} \quad y_T = 5 + 0{,}209\,(x_T - 11) \approx 2{,}70 + 0{,}21\;x_T$$

Ces droites passent par le point M de coordonnées $x_M = 11$; $y_M = 5$; elles coupent les axes respectivement aux points B_0 d'abscisse 6,93 et T_0 d'ordonnée 2,70.

L'étude graphique correspondante doit tenir compte de ce que (Fig. 11) les lignes $x = U - u_2 + 1 = 10$ et $y = u_1 + 1 = 4$ limitent le domaine à considérer. Elle attire l'attention sur les points suivants qui paraissent devoir faire partie de l'une des lignes A et R, à savoir :

	Ligne A			Ligne R	
x	7	8	9	0	1
y	0	1	2	3	3

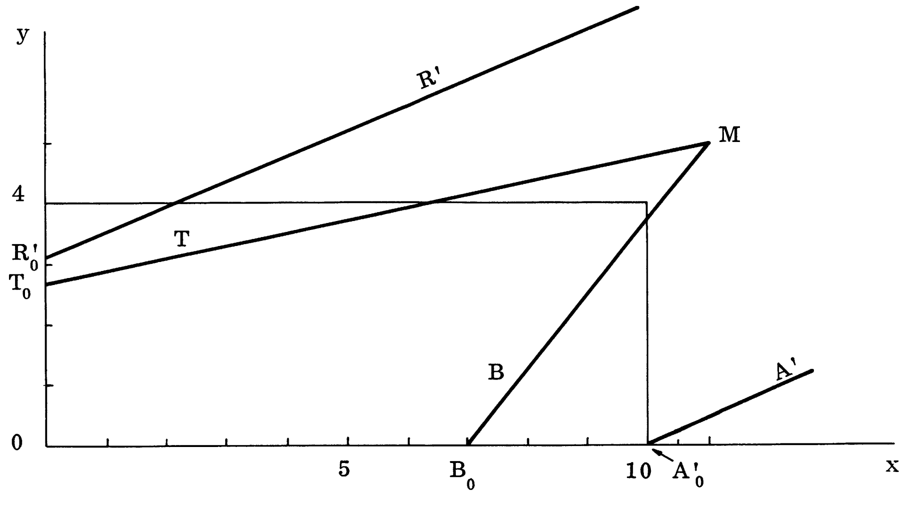

Figure 11 - Exemple 1 (cf : n° 9).

Le calcul des rapports de vraisemblances, c'est-à-dire des cotes, par la formule (8) confirme que les points notés font bien partie des lignes indiquées, mais conduit en outre à ajouter à la ligne R le point $x = 2$, $y = 3$.

b) La théorie de WALD (non-exhaustive), si elle était appliquée brutalement aux données correspondantes, soit : $p_1 = 0,20$; $p_2 = 0,40$; $\alpha = 0,10$; $\beta = 0,05$, conduirait aux droites (Fig. 2) définies par leur pente 0,415 et en outre par $OA'_0 = 10,03$ et par $OR'_0 = 3,15$. Leurs équations sont donc

$$A' \quad y = -4,16 + 0,415\, x$$

$$R' \quad y = 3,15 + 0,415\, x$$

A l'abscisse du point M, ces droites passent par les points d'ordonnées 0,40 et 7,71 (à comparer à $y_M = 5$).

La figure 11 montre les positions relatives des droites et points considérés.

c) cf. N° 8 b : $OA''_0 = 10,42$; $OR''_0 = 3,32$.

10 - EXEMPLES 2 ET 3

a) Exemple 2 : Les données sont

$$U = 100 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_2 = 10 \quad ; \quad \alpha = \beta = 0,05$$

D'où d'après (12) :

$$\mu_A \approx \left(\frac{1}{0,05}\right)^{1/6} \cdot \frac{7,5}{93,5} = 0,132 \quad \text{et} \quad \mu_R \approx 0,049.$$

De là :

$$y_B = 7,5 + 0,132\,(x_B - 93,5)$$

$$y_T = 7,5 + 0,049\,(x_T - 93,5)$$

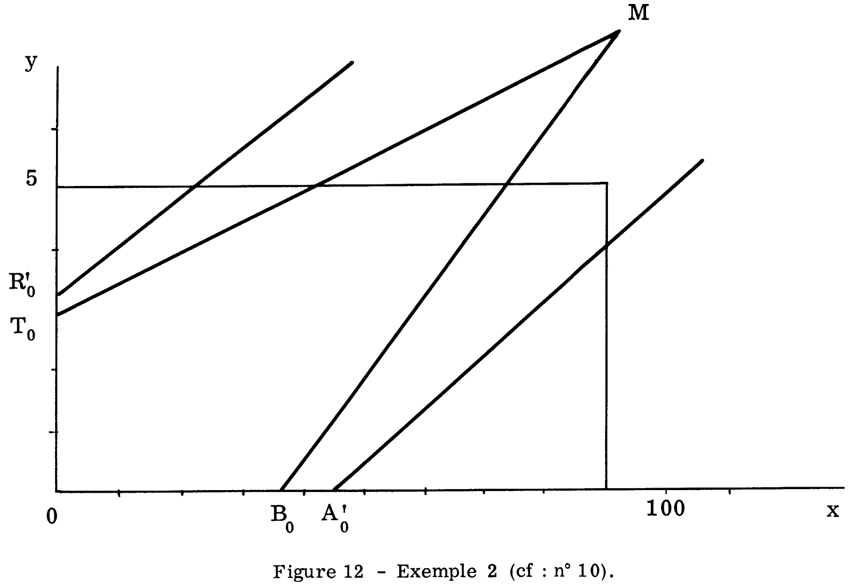

Figure 12 - Exemple 2 (cf : n° 10).

et (notations de la figure 6)

$$OB_0 = 93{,}5 - \frac{7{,}5}{0{,}132} = 36{,}7$$

$$OT_0 = 7{,}5 - 4{,}6 = 2{,}9$$

Coordonnées de M = 93,5 et 7,5.

Pente de OM = 0,080.

Comparativement : cas non-exhaustif avec $p_1 = 0{,}04$ et $p_2 = 0{,}10$ (notations de la figure 2) :

$$OA'_0 = 45{,}5 \quad ; \quad OR'_0 = 3{,}20 \quad ; \quad \text{pente } s' = 0{,}070.$$

Sur les 2 droites de WALD les points d'abscisses 93,5 (abscisse du point M) ont respectivement pour ordonnées 4,28 et 10,68 (à comparer à 7,5).

Les points correspondants sont portés sur la figure 12.

b) Exemple 3 : Mêmes données que celles de l'exemple 2 sauf $\beta = 0{,}10$

$$OB_0 = 29{,}5 \quad ; \quad OT_0 = 2{,}9.$$

Mêmes coordonnées de M et pente de OM que ci-dessus.

Comparativement :

$$OA'_0 = 34{,}8 \quad ; \quad OR'_0 = 3{,}14 \quad ; \text{pente } s' = 0{,}070.$$

Ordonnées des points d'abscisse 93,5 : 4,11 et 9,68.

c) A titre de vérification des formules approchées utilisées à propos des exemples 2 et 3, on peut calculer des cotes données par (8). On trouve :

$y = 0$; $x = 36$ 0,054

$x = 37$ 0,049

- à comparer (Ex. 2) à $OB_0 = 36{,}7$ et $\beta = 0{,}050$

$y = 0$; $x = 29$ 0,108

$x = 30$ 0,098

- à comparer (Ex. 3) à $OB_0 = 29{,}5$ et $\beta = 0{,}100$.

$x = 0$; $y = 2$ 7,5

$y = 3$ 30

- à comparer (Ex. 2 et 3) à $OT_0 = 2{,}9$ et $1/\alpha = 20$.

La vérification peut être regardée comme satisfaisante.

d) cf. N° 8 b : Exemple 2 : $OA''_0 = 46{,}5$; $OR''_0 = 3{,}25$

Exemple 3 : $OA''_0 = 35{,}6$; $OR''_0 = 3{,}25$

11 - EXEMPLE 4

a) Les données, manifestement anormales, sont :

$U = 30$; $u_1 = 10$; $u_2 = 15$; $\alpha = 0{,}10$; $\beta = 0{,}08$.

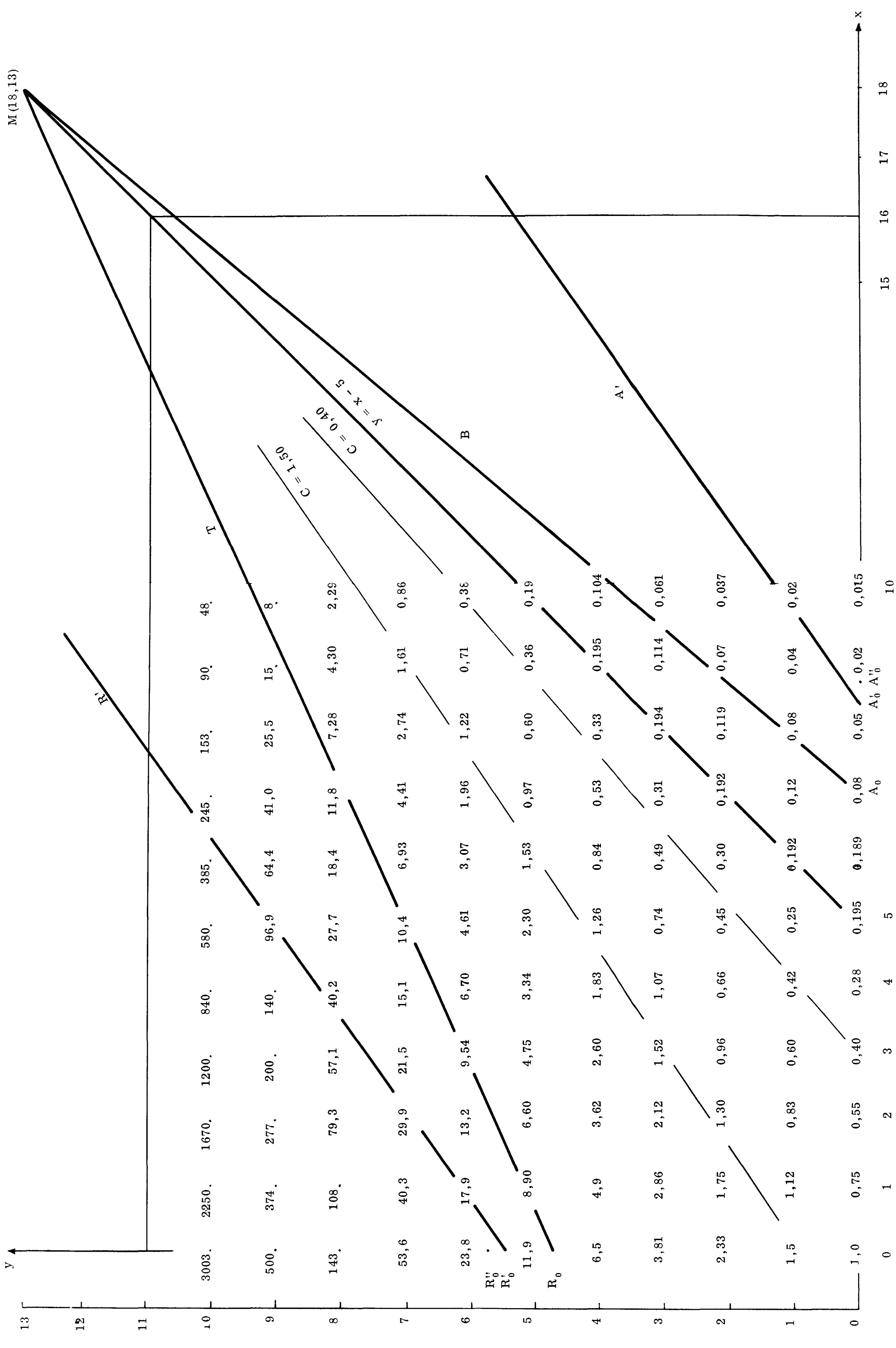

Figure 13 - Exemple n° 4 (cf. n° 11)

Le graphique est limité par les droites (Fig. 4).

$$x = 16 \quad \text{et} \quad y = 11$$

Le calcul de cotes C(x, y) suivant la formule (8) a été exécuté pour un grand nombre de points du domaine utile ; les résultats en sont portés sur la figure 13 ; les points et les virgules faisant partie de ces valeurs marquent les points du graphique auxquels correspondent ces valeurs.

Le point M de la figure 6 a pour coordonnées 18 et 13.

Si les droites B et T de cette même figure coincidaient exactement avec les lignes A et R de la figure 4, on devrait trouver que ces droites passent par tous les points de cotes respectives β et $1/\alpha$, quels que soient α et β. Pour permettre d'apprécier la valeur pratique des droites en cause, nous avons aussi tracé les droites correspondant aux cotes 0,40 et 1,50, lues respectivement sur les axes Ox et Oy.

D'après les cotes portées sur la figure, à $\beta = 0,08$ correspond le point $y = 0$; $x \approx 7,0$ (point A_0) et à $\alpha = 0,10$, le point $x = 0$; $y \approx 4,7$ (point R_0).

Ces points sont joints à M sur la figure 13.

b) Sur la figure 13, sont portés également les points correspondant au cas non-exhaustif, à savoir (notations de la figure 2) :

$$OA'_0 = 8,40 \;;\; OR'_0 = 5,48 \;;\; \text{pente } 0,71.$$

A l'abscisse du point M, les droites de WALD passent par les points d'ordonnées 6,82 et 18,26 (à comparer à la valeur 13 trouvée plus haut comme ordonnée du point M).

c) cf. N° 8 b : $OA''_0 = 8,75$; $OR''_0 = 5,7$.

12 - REGLE DE L'EPREUVE SEQUENTIELLE EXHAUSTIVE

a) Données : U est l'effectif du lot soumis à l'épreuve en vue de son acceptation ou de son rejet.

Par convention entre producteur et client, les risques suivants sont admis :

- risque au plus égal à α de rejeter un lot qui contiendrait au plus u_1 défectueux ;

- risque au plus égal à β d'accepter un lot qui contiendrait au moins u_2 défectueux.

b) Plan : Le plan de l'épreuve est déterminé à partir du moment où sont connues les lignes d'acceptation A et de rejet R.

Pour la recherche de ces lignes, se reporter à l'Annexe B, dont le N° B 5 indique comment calculer pour y donné, deux valeurs entières x_α et x_β telles que

$$C(x_\beta, y) > \beta \geq C(1 + x_\beta, y) \;;\; C(x_\alpha, y) \geq \frac{1}{\alpha} > C(1 + x_\alpha, y)$$

N.B. - Un tronquage du plan peut, avant l'épreuve, être convenu entre producteur et client ; le cas du tronquage n'est pas autrement évoqué dans la présente note, si ce n'est en 8 d.

c) Préparation : Traduire le résultat de la recherche des lignes A et R de l'une des manières suivantes :

(i) - ou, porter sur un graphique :

- le domaine limité par les conditions $0 \leq x \leq U - u_2 + 1$ et $0 \leq y \leq u_1 + 1$;

- les points de la ligne A définis par $1 + x_\beta(y)$;

- les points de la ligne R définis par $x_\alpha(y)$.

(ii) - ou, établir une table donnant pour $0 \leq y \leq u_1$, les valeurs de $1 + x_\beta(y)$, ligne A, et de $x_\alpha(y)$, ligne R.

d) Exécution et décision. En cours d'épreuve, après chaque essai, considérer le nombre x des non-défectueux, et le nombre y des défectueux obtenus jusqu'alors ; puis :

(i) - Cas où $x < U - u_2 + 1$ et $y < u_1 + 1$:

- si la ligne A est atteinte : accepter le lot ;

- si la ligne R est atteinte : rejeter le lot ;

- si aucune de ces lignes n'est atteinte : procéder à un nouvel essai.

(ii) - cas $y = u_1 + 1$: rejeter le lot

(iii) - cas $x = U - u_2 + 1$: accepter le lot.

N.B. - Les points (ii) et (iii) sont en rapport avec la convention qui est exposée au N° 5 et à l'examen de laquelle nous avons borné notre étude.

ANNEXE A

DE QUELQUES APPROXIMATIONS CONCERNANT LES RAPPORTS DE FACTORIELLES
(cf. N° 6 d)

A.1. FORMULE

$$\frac{V\,!}{(V - S)\,!} \approx \left(V - \frac{S-1}{2}\right)^S \tag{21}$$

$$\frac{V\,!}{(V - S)\,!} = V(V-1)\,(V-2)\,\ldots\ldots\,(V - S + 1)$$

$$= \prod_{i=0}^{S-1}\left[\left(V - \frac{S-1}{2}\right) + \left(i - \frac{S-1}{2}\right)\right]$$

$$= \left(V - \frac{S-1}{2}\right)^S \left[1 - \frac{(S+1)\,S\,(S-1)}{24\left(V - \frac{S-1}{2}\right)^2} + \ldots\ldots\right] \tag{22}$$

On remarque d'une part que la parenthèse ne contient qu'un nombre fini de termes(1) et d'autre part que lorsque $S(S^2 - 1)$ est inférieur à $\left(V - \frac{S-1}{2}\right)^2$, l'expression $\left(V - \frac{S-1}{2}\right)^S$ a une valeur qui est supérieure à celle de $\frac{V!}{(V-S)!}$, mais qui ne lui est supérieure que d'environ de 4 %, au plus.

Voici pour quelques valeurs faibles de S, les plus faibles valeurs entières de V telles que la formule (21) soit vraie au plus à $\frac{1}{24}$ près.

S	2	3	4	5	6	8	10
V	3	6	10	13	17	27	36

A.2. UTILISATION DE LA FORMULE (21)

a) Dans le cours de la note, la formule (21) a été utilisée dans les quatre cas suivants :

1/ $\frac{u_2!}{u_1!} \approx \left(\frac{u_1 + u_2 + 1}{2}\right)^{u_2 - u_1}$ soit $V_1 = u_2$ et $S = u_2 - u_1$;

2/ $\frac{(U - u_1)!}{(U - u_2)!} \approx \left(U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}\right)^{u_2 - u_1}$ soit $V_2 = U - u_1$ et $S = u_2 - u_1$;

3/ $\frac{(u_2 - y)!}{(u_1 - y)!} \approx \left(\frac{u_1 + u_2 + 1}{2} - y\right)^{u_2 - u_1}$ soit $V_3 = u_2 - y$ et $S = u_2 - u_1$;

4/ $\frac{(U - u_1 - x)!}{(U - u_2 - x)!} \approx \left(U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}\right)$ soit $V_4 = U - u_1 - x$ et $S = u_2 - u_1$.

On remarque que dans tous les cas S a la valeur $u_2 - u_1$, connue.

V_1 et V_2 sont connus ; il est donc facile de se rendre compte de l'approximation faite en ce qui les concerne lorsque la formule (21) est utilisée ; au demeurant, rien n'empêche de laisser les expressions correspondantes sous la forme d'un rapport de factorielles.

$V_3 = u_2 - y$ et y varie de 0 à u_1, de sorte que V_3 peut, comme valeur inférieure, atteindre la valeur $u_2 - u_1$ qui est précisément celle de S ; la correspondance donnée en fin de A.1 montre que dans ces conditions la formule (21) n'est que grossièrement approchée.

$V_4 = U - u_1 - x$; comme x varie de 0 à $U - u_2$, l'on arrive à la même conclusion que pour V_3.

----

(1) Pour S = 1, la parenthèse se réduit à l'unité ; pour S = 2 et S = 3, elle contient seulement les deux termes écrits ; pour S = 4 et S = 5, elle contient seulement, d'après [4] N° 707, en plus des deux termes écrits, le terme

$$+ \frac{(S+1)\,S\,(S-1)\,(S-2)\,(S-3)\,(5S+7)}{5760\left(V - \frac{S-1}{2}\right)^4}$$

b) L'analyse du a ci-dessus est de nature à faire craindre que les utilisations qui ont été faites de la formule (21) aient été parfois téméraires, et que finalement les solutions approchées mises en avant dans la note soient dans certaines régions trop éloignées de la réalité pour être vraiment utiles.

Mais plusieurs points sont à considérer :

1 - Il se trouve que la formule qui détermine la suite des calculs est moins la formule (21) que la formule (23) du N° suivant.

2 - Des compensations se produisent lorsque l'expression à calculer comprend - c'est le cas très général - deux ou quatre rapports de factorielles et non pas un seul : ce point est discuté plus loin, à l'aide de la formule (23) du N° suivant.

3 - Une approximation, même grossière, est parfois sans conséquence pratique : si l'approximation affecte un résultat utilisé pour avoir l'attention attirée sur les 2 valeurs entières consécutives qui encadrent ce résultat, et s'il se trouve que l'encadrement est large, les chances sont importantes que les résultats rigoureux et approximatifs soient encadrés par les mêmes valeurs ou par des valeurs immédiatement voisines.

4 - Quel que soit l'intérêt théorique de la discussion des formules (21) et (23) dans toute leur généralité, pour toutes valeurs imaginables des grandeurs qu'elles font intervenir, nous ne devons pas perdre de vue que notre note se rapporte à une certaine épreuve de réception ; en particulier U peut être grand mais le cas de U très grand est du domaine des épreuves non exhaustives ; u_1 ne peut être que d'un petit nombre d'unités ; u_2, toujours égal au moins à $u_1 + 1$, est dans la pratique de l'ordre de $2\ u_1$ ou de $3\ u_1$; enfin, seul le cas où $u_2 < \frac{U}{2}$ est à considérer car s'il en était autrement, on pourrait inverser les rôles de défectueux et de non-défectueux.

A.3. FORMULE

$$\left(\frac{V\,!}{(V - S)\,!}\right)^{1/s} \approx V - \frac{S - 1}{2} \qquad (23)$$

a) Dans tous les cas où V et S sont tels que la formule (21) soit applicable, on peut écrire d'après (22) :

$$\left(\frac{V\,!}{(V - S)\,!}\right)^{1/s} \approx \left(V - \frac{S - 1}{2}\right) \left[1 - \frac{S^2 - 1}{24\left(V - \frac{S - 1}{2}\right)^2}\right]$$

Cela donne à penser que la formule (23) doit fournir une assez bonne approximation de son premier membre tant que $S^2 - 1$ est petit par rapport à

$$\left(V - \frac{S - 1}{2}\right)^2$$

et, en tout état de cause, pour $V > \frac{3\ S}{2}$, cette dernière inégalité correspondant à

$$S^2 < \left(V - \frac{S}{2}\right)^2$$

b) Nous posons

$$\left(\frac{V\,!}{(V - S)\,!}\right)^{1/s} = \left(V - \frac{S - 1}{2}\right)\,[1 - \varphi(V, S)] \tag{24}$$

et nous donnons dans le tableau de la figure 21 quelques valeurs calculées de $\varphi(V, S)$ pour des valeurs de V et de S relativement petites, susceptibles d'être rencontrées dans des problèmes de conditions de réception. A noter que $\varphi(V, 1)$ est toujours nul.

Figure 21

Tableau de valeurs de $\varphi(V, S)$ (cf. N° A.3)

S	2	4	6	8	10	16	32
V = S φ	2 0,057	4 0,115	6 0,145	8 0,164	10 0,177	16 0,200	32 0,225
V = S + 1 φ	3 0,020	5 0,054	7 0,080	9 0,098	11 0,115	17 0,146	33 0,185
V φ				10 0,064		18 20 0,113 0,075	36 40 0,122 0,079
$V = \frac{3S}{2}$ φ	3 0,020	6 0,032	9 0,036	12 0,038	15 0,040	24 0,041	48 0,043
V = 2S φ	4 0,010	8 0,015	12 0,016	16 0,017	20 0,0174	32 0,0180	64 0,0185
V = 4S φ	8 0,0022	16 0,0028	24 0,0032	32 0,0033	40 0,0034	64 0,0034	"

Comme dans l'application de cette formule (N° A.2) la valeur de S est la même pour les 4 expressions relatives à un même problème, le tableau est disposé pour permettre de suivre aisément les variations de φ à S constant.

Un réseau de courbes (Fig. 22) traduit graphiquement les principales données du tableau.

Le cas limite V = S correspond à la valeur $\frac{S\,!}{O\,!} = S\,!$; d'où, d'après la formule de Stirling :

$$S\,! = \left(S - \frac{S - 1}{2}\right)^{s}\,[1 - \varphi(S, S)]^{s} \approx \sqrt{2\Pi S}\left(\frac{S}{e}\right)^{s}$$

et pour S grand

$$\frac{S}{2}\,[1 - \varphi(S, S)] \approx \frac{S}{e}\ ;$$

Ainsi $\varphi(S, S)$ tend pour S grand vers $1 - \frac{2}{e} = 0,264$.

On lit sur le tableau que $\varphi(32, 32)$ égale déjà 0,225.

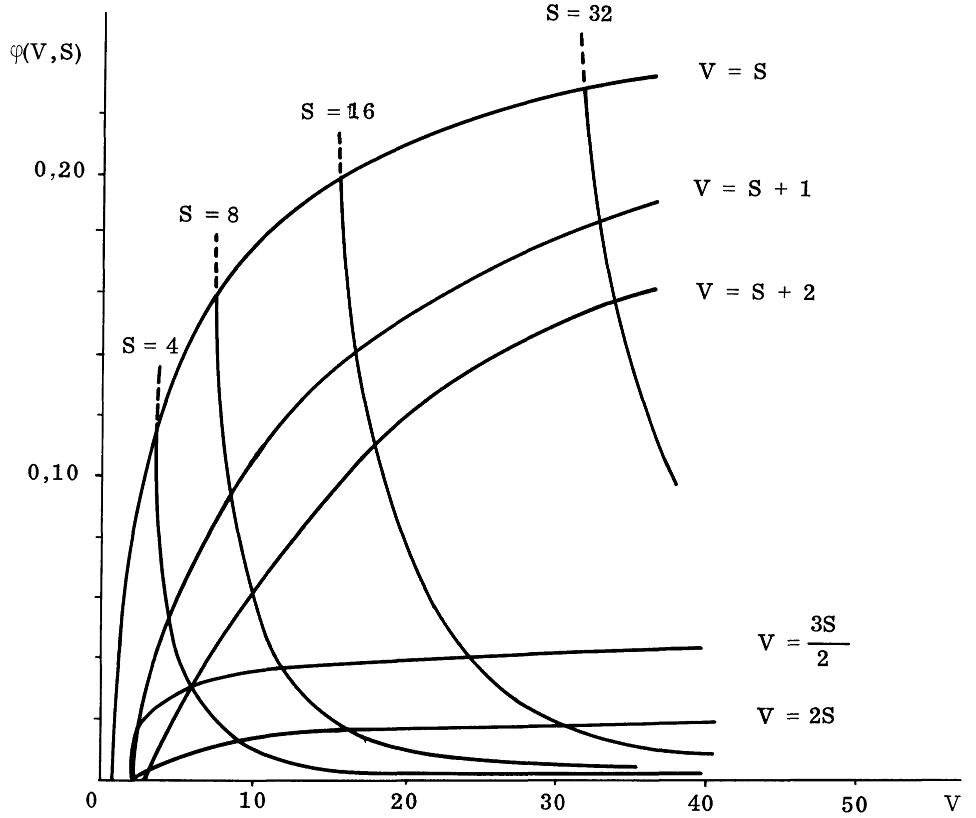

Figure 22 - φ (V , S) (cf. n° A. 3)

Remarque - Ce qui précède conduit également à

$$S\,! \approx \left(S - \frac{S-1}{2}\right)^S \left(\frac{2}{e}\right)^S = \left(\frac{S+1}{e}\right)^S \tag{25}$$

mais cette formule est moins précise que la formule de Stirling sans pour autant être bien plus simple à calculer.

c) On peut retenir de l'étude faite que $\varphi(V, S)$ est de toute façon limité supérieurement par 0,264 et qu'il n'est guère notable que pour V très voisin de S.

Pour V = 2 S, $\varphi(2S, S)$ paraît ne pas devoir dépasser l'ordre de grandeur de 0,02.

A.4. UTILISATION DE LA FORMULE (23)

a) Nous avons indiqué en A.2 que dans le cours de la note nous avions utilisé la formule (21) dans quatre cas. En fait, l'intérêt des approximations faites est de conduire à des droites issues d'un point M pour représenter de façon approchée les lignes A et R rigoureuses. Or les équations de ces droites dérivent encore plus directement de la formule (23) que de la formule (21). Nous pouvons donc reprendre ce qui a été dit en A.2, en y apportant des précisions tirées de nos connaissances relatives à $\varphi(V, S)$.

Nous gardons les notations du N° A.2.

S est uniformément égal à $u_2 - u_1$.

Suivant que u_2 est égal (valeurs prises à titre d'exemple) à $2\,u_1$ ou à $3\,u_1$, S est égal à u_1 ou à $2\,u_1$ et

$$\left(\frac{u_2\,!}{u_1\,!}\right)^{\frac{1}{u_2-u_1}}$$

est égal à

$$\frac{3u_1 + 1}{2}\left[1 - \varphi(2u_1,\ u_1)\right]$$

ou à

$$\frac{4u_1 + 1}{2}\left[1 - \varphi(3u_1,\ 2u_1)\right]$$

Ainsi sont mises en cause les valeurs de $\varphi(2S,\ S)$ ou de $\varphi\left(\frac{3S}{2},\ S\right)$ qui sont portées sur le tableau de la figure 21 : même pour u_1 grand, d'où S grand, les valeurs de φ sont limitées comme ordres de grandeur à 0,020 ou à 0,050.

L'approximation relative à $\frac{(U - u_1)\,!}{(U - u_2)\,!}$ est de toute façon bien supérieure à celle relative au rapport précédent. Au demeurant, l'un et l'autre de ces rapports peuvent être remplacés par leurs valeurs rigoureuses respectives, sans que cela change le raisonnement de la note.

Quant aux rapports

$$\frac{(u_2 - y)\,!}{(u_1 - y)\,!} \quad \text{et} \quad \frac{(U - u_1 - x)\,!}{(U - u_2 - x)\,!},$$

ils donnent lieu à des approximations qui pour les valeurs extrêmes $y = u_1$ ou $x = U - u_2$ sont mesurées par $1 - \varphi(S,\ S)$ dont nous connaissons la limite absolue, à savoir $2/e$.

c) Pour étudier les compensations qui se produisent lors du calcul de $C(x,\ y)$ - voir Annexe B et formules du N° A.2 a - nous posons :

$$C(x,\ y)^{\frac{1}{u_2-u_1}} = \frac{\frac{u_1 + u_2 + 1}{2}}{U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}} \times \frac{U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2} - x}{\frac{u_1 + u_2 + 1}{2} - y}\,\Psi(x,\ y) = C'(x,y)^{\frac{1}{u_2-u_1}}\,\Psi(x,y)$$

d'où, avec $u_2 - u_1 = S$:

$$\Psi(x, y) = \frac{1 - \varphi(u_2, S)}{1 - \varphi(U - u_1, S)} \times \frac{1 - \varphi(U - u_1 - x, S)}{1 - \varphi(u_2 - y, S)} .$$

Aux extrémités du domaine $0 \leq x \leq U - u_2$; $0 \leq y \leq u_1$, on a (Fig. 23)

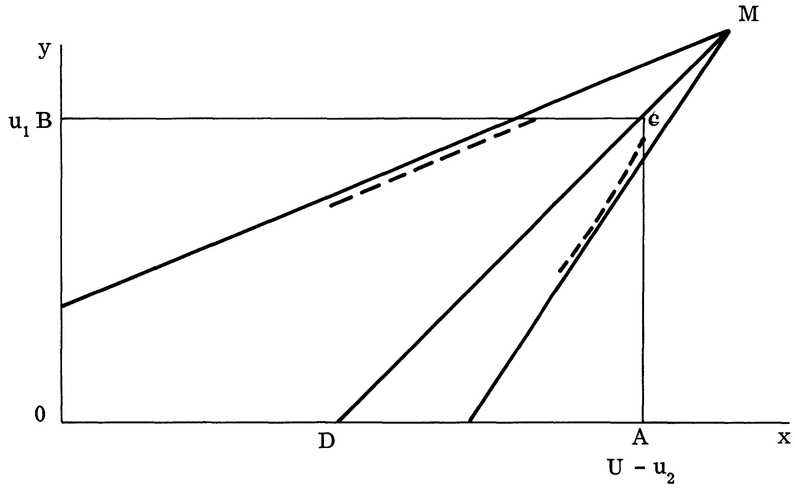

Figure 23 - Positions relatives de lignes et de droites (cf : n° A-4 d).

en O : $\Psi(0,0) = 1$;

en A : $\Psi(U - u_2, 0) = \dfrac{1 - \varphi(S, S)}{1 - \varphi(U - u_1, S)}$, ce qui est nettement inférieur à 1 ;

en B : $\Psi(0, u_1) = \dfrac{1 - \varphi(u_2, S)}{1 - \varphi(S, S)}$, ce qui est supérieur à 1 ;

en C : $\Psi(U - u_2, u_1) = \dfrac{1 - \varphi(u_2, S)}{1 - \varphi(U - u_1, S)}$, valeur, inférieure à l'unité, qui est la même pour tous les points de la droite (droite CD).

$$y = x - U + u_1 + u_2$$

d) Les lignes A et R, supposées continues, que l'on cherche à déterminer dans la note (N° 6-c), sont des lignes à C(x, y) constant ; les droites passant par M (N° 6-d) sont des lignes à C'(x, y) constant (notations de la formule 24) ; il serait intéressant de pouvoir déterminer comment les lignes à C constant se placent par rapport aux droites à C' constant, parce que l'on saurait ainsi de quel côté d'un point approché il faut chercher le point rigoureux correspondant.

A défaut d'étude directe, nous notons que, à ce qu'il nous a semblé, la courbe à C constant s'écarte de la droite à C' constant de manière à se rapprocher de la droite $y = x - U + u_1 + u_2$ (droite CD de la figure 23) comme le montrent les tracés en pointillé de la figure 23 ; on sait que sur cette droite elle-même, C(x, y) et C'(x, y) sont l'un et l'autre constants, sans être, pour autant, égaux entre eux.

ANNEXE B

DE L'EXPRESSION $C(x,y) = \frac{u_2 !}{u_1 !} \times \frac{(U - u_2) !}{(U - u_1) !} \times \frac{(u_1 - y) !}{(u_2 - y) !} \times \frac{(U - u_1 - x) !}{(U - u_2 - x) !}$

(cf. N° 6-c)

B.1. BUT DE L'ANNEXE

Le calcul de l'expression de C(x, y), dite "cote" du point x, y, n'offre aucune difficulté si l'on dispose d'une table donnant les logarithmes des factorielles(1) en cause dans l'expression, pour $0 \leq x \leq U - u_2$ et $0 \leq y \leq u_1$; sans doute suffit-il de se rappeler que l'on a $0 ! = 1$ (voir B.4).

Mais les calculs peuvent être longs.

Le but de la présente annexe est triple :

- indiquer comment procéder lorsqu'on ne possède pas de tables de log n ! : voir le N° B.2 ;

- indiquer comment procéder avec un minimum de calculs lorsque l'on veut connaître les valeurs de C(x, y) en tous les points du domaine considéré : voir le N° B.3 ;

- indiquer les seuls calculs à faire lorsqu'il s'agit de déterminer les lignes d'acceptation A et de rejet R, pour des risques α et β données : voir le N° B.5.

B.2. CALCUL DU RAPPORT DE FACTORIELLES $\frac{V !}{(V - S) !}$

L'expression de C(x, y) est égale au produit de quatre rapports de factorielles, de la forme $\frac{V !}{(V - S) !}$, avec V égal suivant les cas à u_2, à $U - u_1$, à $u_2 - y$ et à $U - u_1 - x$ et avec S égal dans tous les cas à $u_2 - u_1$.

Pour l'évaluation de tels rapports, à défaut de tables de log n ! ou de calcul direct (cas des faibles valeurs de V), on peut utiliser une des formules suivantes, classées ici par ordre de précision décroissante :

$$\frac{V !}{(V - S) !} \approx \frac{(V + 0,5)^{V+0,5}}{(V - S + 0,5)^{V-S+0,5}} \frac{1}{e^S} \tag{31}$$

$$\frac{V !}{(V - S) !} \approx \frac{V^{V+0,5}}{(V - S)^{V-S+0,5}} \frac{1}{e^S} \tag{32}$$

$$\frac{V !}{(V - S) !} \approx \left(V - \frac{S - 1}{2}\right)^S \tag{33}$$

Les formules (31) et (32) sont très précises. La formule (32) dérive directement de la formule de Stirling sous sa forme classique, et l'expression (31), de la même formule, mise sous une forme, plus précise, que

----

(1) Par exemple [4] jusqu'à 100 ! et [5] jusqu'à 1000 !

nous avons étudiée(1). La quantité e^s n'a pas à être calculée, lorsque, par exemple, c'est le produit des rapports $\frac{u_2\,!}{u_1\,!}\ \frac{(U - u_2)\,!}{(U - u_1)\,!}$ qui est à faire.

La validité de la formule (33) est discutée en Annexe A ; il est naturellement possible de compléter le second membre par le terme correctif indiqué dans cette annexe ; en s'en tenant aux parties principales, on a :

$$\frac{u_2\,!}{u_1\,!} \approx \left[u_2 - \frac{u_2 - u_1 - 1}{2}\right]^{u_2 - u_1} = \left(\frac{u_1 + u_2 + 1}{2}\right)^{u_2 - u_1}$$

$$\frac{(U - u_1)\,!}{(U - u_2)\,!} \approx \left[U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}\right]^{u_2 - u_1}$$

$$\frac{(u_2 - y)\,!}{(u_1 - y)\,!} \approx \left[\frac{u_1 + u_2 + 1}{2} - y\right]^{u_2 - u_1} ; \frac{(U - u_1 - x)\,!}{(U - u_2 - x)\,!} \approx \left[U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2} - x\right]^{u_2 - u_1}$$

B.3. CALCUL DES VALEURS DE C(x, y)

a) Cas particulier y = 0.

Le long de l'axe des x on a :

$$C(x,\ 0) = \frac{(U - u_2)\,!}{(U - u_1)\,!}\ \frac{(U - u_1 - x)\,!}{(U - u_2 - x)\,!} \tag{34}$$

Lorsque x croît de 0 à $U - u_2$, C(x, 0) part de la valeur 1 et décroît jusqu'à $\frac{(U - u_2)\,!}{(U - u_1)\,!}(u_2 - u_1)\,!$ pour $x = U - u_2$.

Entre temps, C(x, 0) est passé, pour $x = U - u_1 - u_2$, par la valeur $\frac{u_2\,!}{u_1\,!}\ \frac{(U - u_2)\,!}{(U - u_1)\,!}$, qui est la valeur constante de C(x, y) pour tous les points de la droite $y = x - U + u_1 + u_2$. (droite CD de la figure 23).

Pour le calcul de C(x, 0), voir le N° B.2 ; en particulier, par application de la formule (33) :

$$C(x,\ 0) \approx \left[\frac{U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2} - x}{U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}}\right]^{u_2 - u_1} \tag{35}$$

----

(1) Le tableau suivant donne, d'après [4] N° 702, une idée de la précision qui peut être obtenue, même pour de très faibles valeurs de l'argument.

	n	- 1	- 1/2	0	1	2
	$n\,! = \Gamma(n+1)$	∞	$\sqrt{\Pi}$	1,000	1,000	2,000
Formule : - de Stirling ayant conduit à (32)	$\sqrt{2\Pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$	"	"	0,000	0,922	1,919
- ayant conduit à (31)	$\sqrt{2\Pi}\left(\frac{n + 0,5}{e}\right)^{n+0,5}$	"	$1,41\sqrt{\Pi}$	1,075	1,028	2,034
- déduite de la précédente et non utilisée ici	$\frac{\sqrt{2\Pi}}{n+1}\left(\frac{n + 1,5}{e}\right)^{n+1,5}$	∞	$1,04\sqrt{\Pi}$	1,028	1,017	2,024

b) Cas particulier $x = 0$.

Le long de l'axe des y, on a :

$$C(0, y) = \frac{u_2 !}{u_1 !} \frac{(u_1 - y) !}{(u_2 - y) !} \tag{36}$$

Lorsque y croît de 0 à u_1, C(0, y) part de la valeur 1 et croît jusqu'à $\frac{(u_2) !}{(u_1) !} \frac{1}{(u_2 - u_1) !}$

Pour le calcul de C(0, y), voir le N° B.2 ; en particulier, par application de la formule (33)

$$C(0, y) \approx \left(\frac{\frac{u_1 + u_2 + 1}{2}}{\frac{u_1 + u_2 + 1}{2} - y} \right)^{u_2 - u_1} \tag{37}$$

c) Cas général

Le calcul de C(x, y) en un point quelconque se fait à partir des valeurs trouvées en a et b ci-dessus, par application de la formule

$$C(x, y) = C(x, 0) \times C(0, y) \tag{38}$$

Il convient manifestement de faire par logarithmes tous les calculs en cause dans le présent numéro.

B.4. REMARQUE

Le calcul de C(x, y) ne présente de l'intérêt que pour x et y entiers. Notons cependant que la généralisation au cas des valeurs non entières est immédiate - il suffit de remplacer V ! par $\Gamma(V + 1)$ - car cette généralisation justifie que l'on prenne $0 ! = \Gamma(1) = 1$. D'ailleurs $\Gamma(2) = 1$ et entre ces deux valeurs $\Gamma(V + 1)$ passe par un minimum pour $V = 0,462$. Cette particularité explique ceci : lorsque l'on calcule C(x, y) pour une valeur donnée de y, les différences premières $C(x, y) - C(x + 1, y)$ varient régulièrement ; toutefois une variation brusque est observée de l'avant-dernière différence première à la dernière, car celle-ci fait intervenir, comme valeurs de x, $U - u_2 - 1$ et $U - u_2$ auxquelles correspondent respectivement 1 ! et 0 !, c'est-à-dire les factorielles entre lesquelles se situe le minimum.

Une remarque analogue peut être faite au voisinage de $y = u_1$.

B.5. RECHERCHE DES LIGNES D'ACCEPTATION A ET DE REJET R

Pour la détermination des lignes d'acceptation A et de rejet R correspondant aux risques α et β, il convient, pour chaque valeur entière de y, avec $0 \leqslant y \leqslant u_1$, de déterminer, à supposer qu'elles existent, deux valeurs entières $x_\alpha(y)$ et $x_\beta(y)$ telles que :

$$
\begin{aligned}
C(x_\beta,\ y) > \beta \geq C(1 + x_\beta,\ y) \\
C(x_\alpha,\ y) \geq \frac{1}{\alpha} > C(1 + x_\alpha,\ y)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

La ligne A comprend l'ensemble des points définis par $1 + x_\beta(y)$; la ligne R comprend l'ensemble des points définis par $x_\alpha(y)$.

Pour la détermination des x_α et x_β, on peut choisir l'une des trois opérations qui suivent :

1/ Calculs complets. Calculer les valeurs de $C(x,\ y)$ dans tout le domaine $0 \leq x \leq U - u_1$ et $0 \leq y \leq u_2$, comme il est dit au N° B.3.

Pour chaque valeur de y, rechercher directement d'après les relations (39), les valeurs correspondantes de x_α et x_β.

N.B. - Au lieu de calculer $C(x,\ y)$, on peut se borner à calculer $\log C(x,\ y)$, ces valeurs étant alors à comparer à $\log \beta$ et à colog α.

2/ Calculs abrégés. Pour abréger les calculs complets du 1° ci-dessus sans nuire à la rigueur des résultats :

(i). Remarquer que les relations (39) conduisent à écrire :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\log \frac{(u_1-y)!}{(u_2-y)!} + \log \frac{(U-u_1-x_\beta)!}{(U-u_2-x_\beta)!} > \log \beta \frac{u_1!}{u_2!} \frac{(U-u_1)!}{(U-u_2)!} \geq \log \frac{(u_1-y)!}{(u_2-y)!} + \log \frac{(U-u_1-x_\beta-1)!}{(U-u_2-x_\beta-1)!} \\
&\log \frac{(u_1-y)!}{(u_2-y)!} + \log \frac{(U-u_1-x_\alpha)!}{(U-u_2-x_\alpha)!} \geq \log \frac{1}{\alpha} \frac{u_1!}{u_2!} \frac{(U-u_1)!}{(U-u_2)!} > \log \frac{(u_1-y)!}{(u_2-y)!} + \log \frac{(U-u_1-x_\alpha-1)!}{(U-u_2-x_\alpha-1)!}
\end{aligned}
\right.
\tag{40}
$$

(ii). Calculer :

- $\log \beta \dfrac{u_1!}{u_2!} \dfrac{(U - u_1)!}{(U - u_2)!}$ et $\log \dfrac{1}{\alpha} \dfrac{u_1!}{u_2!} \dfrac{(U - u_1)!}{(U - u_2)!}$

- $\log \dfrac{(u_1 - y)!}{(u_2 - y)!}$ pour toutes valeurs entières de y, avec $0 \leq y \leq u_1$;

- $\log \dfrac{(U - u_1 - x)!}{(U - u_2 - x)!}$ pour toutes valeurs entières de x, avec $0 \leq x \leq U - u_2$.

N.B. - Le calcul de cette dernière quantité peut être limité à un moins grand nombre de valeurs de x, chaque fois que l'on a déterminé des valeurs approchées de x_α et de x_β ; c'est le cas :

- si, de l'étude graphique du 3° ci-dessous, on a retenu des zones de valeurs dans lesquelles se trouvent soit x_α, soit x_β ;

- si l'on procède par fourchettes, avec un premier calcul des valeurs de la quantité en cause pour x variant de a en a ($a > 1$).

(iii). Pour chacune des valeurs entières de y considérées successivement, opérer ainsi qu'il suit :

- présenter la valeur de $\log \dfrac{(u_1 - y)!}{(u_2 - y)!}$ auprès de chacune des valeurs calculées de $\log \dfrac{(U - u_1 - x)!}{(U - u_2 - x)!}$; en fait, la présentation n'est à faire qu'auprès de bien peu de ces valeurs.

- effectuer mentalement la somme de ces deux valeurs, et la comparer d'une part à $\log \beta \frac{u_1 !}{u_2 !} \frac{(U - u_1) !}{(U - u_2) !}$; et d'autre part à $\log \frac{1}{\alpha} \frac{u_1 !}{u_2 !} \frac{(U - u_1) !}{(U - u_2) !}$; au cours de ces comparaisons les valeurs de $x_\beta(y)$ et de $x_\alpha(y)$ apparaissent immédiatement, sans qu'il soit besoin de remonter du logarithme du nombre.

3/ Etude graphique. L'étude graphique, d'éxécution très rapide, ne conduit pas à la détermination rigoureuse des lignes A et R mais elle est susceptible :

- de donner immédiatement une vue d'ensemble, précieuse, de ce qu'est le plan rigoureux ;

- de donner les éléments d'un plan approché ;

- de permettre d'abréger encore les calculs conduits suivant le 2° ci-dessus (cf. NB. du ii).

Mener l'étude ainsi qu'il suit :

(i). Rechercher par le calcul le point $C(x, 0) = \beta$.

Pour cela, calculer $\beta^{\frac{1}{u_2 - u_1}}$; d'après (35), une valeur approximative de x est :

$$\left[U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}\right] \left[1 - \beta^{\frac{1}{u_2 - u_1}}\right]$$

C'est là, sauf exception, une valeur qui n'est pas entière ; à l'aide de la formule (34), vérifier que les deux valeurs consécutives entières qui l'encadrent sont précisément $x_\beta(0)$ et $1 + x_\beta(0)$; c'est-à-dire vérifier que les valeurs de $C(x, 0)$ correspondant à ces deux valeurs encadrent β ; si la vérification ne réussit pas, agir en conséquence ; si elle réussit, déterminer par interpolation entre les deux valeurs de $C(x, 0)$ une valeur x'_β telle que $C(x'_\beta, 0)$ - dont l'expression serait en l'occurrence étendue au cas de valeurs non entières - soit très voisin de β.

(ii). Rechercher par le calcul le point $C(0, y) = 1/\alpha$.

Pour cela, calculer $\alpha^{\frac{1}{u_2 - u_1}}$; d'après (37) une valeur approximative de y est :

$$\frac{u_1 + u_2 + 1}{2} \left[1 - \alpha^{\frac{1}{u_2 - u_1}}\right]$$

C'est là, sauf exception, une valeur qui n'est pas entière ; à l'aide de la formule (36), vérifier que les deux valeurs consécutives entières qui l'encadrent sont telles que les valeurs correspondantes de $C(0, y)$ encadrent $1/\alpha$; si la vérification ne réussit pas, agir en conséquence ; si elle réussit, déterminer par interpolation entre les deux valeurs de $C(0, y)$ une valeur y'_α telle que $C(0, y'_\alpha)$ soit très voisin de $1/\alpha$.

(iii). Porter sur un graphique (notations de la figure 6) :

- le domaine limité par $0 \leq x < U - u_2$ et $0 \leq y \leq u_1$;

- le point M de coordonnées $x_M = U - \frac{u_1 + u_2 - 1}{2}$ et $y_M = \frac{u_1 + u_2 + 1}{2}$;

- les points B_0 et T_0 ayant respectivement pour coordonnées x'_β 0 et 0, y'_α ;

- les droites M B_0 et M T_0 ;

- la droite d'équation $y = x - U + u_1 + u_2$, droite inclinée à 45° qui passe à la fois par le point M et par le sommet $x = U - u_2$ et $y = u_1$;

- les points d'intersection des lignes M B_0 et M T_0 avec les droites d'ordonnées entières.

N.B. 1 - Aux erreurs de graphique près (erreurs qui sont négligées) les abscisses des points d'intersection en cause sont des valeurs approchées respectivement de $1 + x_\beta(y)$ et de $x_\alpha(y)$. Le sens des approximations correspondantes est connu : les valeurs sont toutes approchées par défaut, à la seule exception près des valeurs données par M B_0 s'il se trouve que cette portion de droite se situe, par rapport à la droite $y = x - U + u_1 + u_2$ du côté des x grands ; en outre on sait que l'approximation est meilleure pour les faibles valeurs de y que pour les grandes.

N.B. 2 - Les droites M B_0 et M T_0 donnent une vue d'ensemble du plan d'échantillonnage rigoureux. Ces mêmes droites permettent d'établir un plan approché. En tout état de cause, elles permettent de déterminer au plus 2 u_1 zones de quelques valeurs de x, les unes contenant un point x_β et les autres un point x_α ce qui peut être précieux pour abréger les calculs du 2° ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] WALD A. - Sequential Analysis. John WILEY - 1947.

[2] BARNARD G.A. - Sequential Tests in Industrial Statistics. Royal Statistical Society - 1946.
N.B. - Nous avons plus particulièrement suivi le raisonnement de cet auteur.

[3] DUMAS M. - Epreuve économique permettant de choisir entre deux hypothèses .
Notes à l'Académie des Sciences. Séances des 30 novembre 1953, t. 237 et 9 décembre 1953, t. 238.

[4] DUMAS M. et MAHEU P. - Les méthodes statistiques et leurs applications dans le domaine des techniques industrielles. Eyrolles, 1951.

[5] GRANT E.L. - Statistical Quality Control. McGraw-Hill, 1952.