

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. TORRENS-IBERN

## Un nouveau test d'homogénéité pour échantillons multiples

*Revue de statistique appliquée*, tome 16, n° 4 (1968), p. 41-64

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1968\\_\\_16\\_4\\_41\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1968__16_4_41_0)

© Société française de statistique, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UN NOUVEAU TEST D'HOMOGENÉITÉ POUR ÉCHANTILLONS MULTIPLES

J. TORRENS-IBERN

École Technique Supérieure d'Ingénieurs Industriels  
et École d'Administration des Entreprises. Barcelone

*La méthode exposée ci-dessous pour tester à partir d'échantillons de même effectif l'hypothèse d'une même valeur  $\theta$  pour le paramètre d'une distribution, repose sur le test de Kolmogorov-Massey pour comparer à la fonction de répartition théorique d'un estimateur  $T$  de  $\theta$  (ou d'une fonction connue  $\varphi(T, \theta)$ ) sa fonction de répartition empirique dans les  $k$  échantillons considérés. On tient compte de la nécessité éventuelle d'estimer à partir des mêmes échantillons le ou les paramètres intervenant dans la fonction de répartition théorique de  $T$  ou de  $\varphi$ .*

*Cette méthode particulièrement utile pour contrôler la stabilité d'une production peut être appliquée sous forme graphique ou numérique. Des exemples d'application à des comparaisons de variances, d'étendues, de moyennes, etc. sont donnés.*

## 1 - INTRODUCTION

La comparaison des paramètres statistiques de deux échantillons est un problème dont la solution est connue depuis longtemps. D'abord résolue pour les grands échantillons, ensuite pour les petits, cette comparaison ne présente aujourd'hui aucune difficulté. Plusieurs statisticiens ont étudié le problème afin de rendre plus aisés les calculs opérationnels nécessaires. Il y a, d'ailleurs, une méthode générale de comparaison et ce sont seulement des conditions de détail qui règlent les applications adaptées aux divers cas particuliers.

Rien de tel ne se produit en ce qui concerne les échantillons multiples, c'est-à-dire lorsque l'on a affaire à plus de deux échantillons. L'identité de chaque paramètre pour les échantillons extraits d'une ou plusieurs populations, est testée de façon différente et même, pour les variances, il y a plusieurs méthodes qui n'ont rien de commun entre elles et qui se font concurrence.

Toutes ces méthodes sont le fruit de théories assez compliquées et font appel à des calculs plus ou moins compliqués qu'il peut être difficile de demander à un personnel de formation mathématique insuffisante.

Même dans le cas de la comparaison des moyennes, on peut se servir de l'analyse de la variance, mais peut-être à la réflexion on pensera qu'il s'agit d'un outil de maniement bien compliqué pour le peu de chose que, dans ce cas, on lui demande.

## 2 - THEORIE GENERALE

Soient  $K$  échantillons formés chacun de  $n$  éléments tirés ou non de la même population et soit  $\theta$  le paramètre dont on cherche à savoir s'il peut être théoriquement commun à tous les échantillons, malgré qu'il se présente avec les valeurs  $T_1, T_2, \dots, T_k$  pour chacun d'eux.

En faisant l'hypothèse d'une population unique, on accepte qu'il existe une loi de probabilité du paramètre  $T$  d'échantillonnage, fonction du paramètre vrai  $\theta$  de la population :

$$f(T, \theta) dT$$

Il s'agira, donc, d'étudier la vraisemblance de l'ensemble des résultats  $T_1, T_2, \dots, T_k$ , concernant les  $K$  échantillons, compte tenu de cette hypothèse.

La technique classique pour résoudre ce problème est le test de la validité de l'ajustement au moyen de la loi de  $\chi^2$ . Ici, cependant, en général, cette épreuve ne pourra pas être employée à cause du nombre réduit d'échantillons  $K$ . Par contre il sera possible d'utiliser la droite de Henri lorsque la loi de probabilité du paramètre considéré peut être rattachée à une loi normale, surtout si l'on trace de chaque côté de la droite théorique les limites relatives au niveau de confiance désiré.

Pendant ces dernières années plusieurs tests ont été conçus n'ayant pas l'inconvénient de celui de  $\chi^2$ . Ils sont basés sur la notion de distance qui sépare les points de la fonction de répartition observée dans l'échantillon des points correspondants de la fonction théorique [1].

Parmi ces tests le plus connu et probablement le plus efficace, compte tenu de sa simplicité, est le test de Kolmogorov-Massey [2, 3]. Il s'agit alors de calculer pour toutes les valeurs  $T_1, T_2, \dots, T_k$  du paramètre, dans les échantillons, les différences :

$$|F(T_i, \theta) - S_k(T_i)| \quad i = 1, 2, \dots, K$$

où l'on représente par  $F(T_i, \theta)$  la fonction de répartition théorique du paramètre  $T$  pour la valeur  $T_i$ , lorsque la vraie valeur est  $\theta$  et par  $S_k(T_i)$  la fréquence cumulée jusqu'à la valeur  $T_i$  des paramètres  $T$  dans l'échantillon multiple que l'on considère, et de vérifier si ces différences sont toutes inférieures en valeur absolue aux limites données par Kolmogorov-Massey au niveau de confiance choisi.

Du point de vue théorique il n'y a pas de difficulté à généraliser la méthode aux cas où la fonction  $F(T_i, \theta)$  ne dépend pas seulement d'un paramètre mais de plusieurs,  $\theta_1, \theta_2, \dots$ , indépendants de  $\theta$ , comme c'est le cas pour les moyennes des échantillons en ce qui concerne l'écart-type.

Par contre, la valeur exacte du niveau de confiance sera influencée par le fait que le paramètre ou les paramètres  $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots$  de la population et, donc, de la loi de répartition théorique ne seront pas connus et qu'il faudra les remplacer par leurs estimations  $\theta^*, \theta_1^*, \theta_2^*, \dots$ , issues des propres échantillons.

En ce qui concerne les échantillons qui proviennent d'une population normale, Lilliefors [4] a obtenu par simulation une table qui remplace celle de Massey lorsque la moyenne et l'écart-type sont estimés à partir des échantillons prélevés.

Le "Séminaire de Statistique Appliquée et Recherche Opérationnelle" de l'Ecole d'Ingénieurs Industriels de Barcelone a fait des calculs semblables pour l'application du test de Kolmogorov aux échantillons qui proviennent des populations exponentielles avec paramètres inconnus, que l'on estime au moyen des données des expériences [5].

Les méthodes qui permettent d'appliquer le test d'homogénéité d'échantillons multiples peuvent être graphiques et numériques ; le choix de l'une ou de l'autre méthode dépendra de la fréquence avec laquelle on a à comparer des échantillons multiples observés dans les mêmes conditions et de la formation des personnes qui doivent réaliser le travail. La méthode graphique sera, en effet, la plus avantageuse lorsqu'il faut refaire très souvent des comparaisons identiques avec un même nombre d'échantillons de la même taille, surtout si le personnel chargé de ce travail est peu apte à faire des calculs compliqués.

### 3 - METHODE NUMERIQUE

L'utilisation du calcul exclusivement numérique est recommandable lorsque les comparaisons des échantillons ne sont pas répétitives. Dans ce cas, pour une seule fois, il n'y aurait pas d'intérêt à faire des tracés de la loi des probabilités cumulées et des limites inférieure et supérieure qui l'accompagnent pour un niveau de confiance donné. Un seul tableau suffit pour faire tous les calculs d'une façon ordonnée.

Souvent la loi de probabilité des paramètres des échantillons n'est pas exprimable directement d'une façon simple, mais il existe une fonction  $\varphi(T, \theta)$  des paramètres de la population et des échantillons dont la loi de probabilité est connue. De plus cette fonction, dans la plupart des cas qui nous intéresseront, est linéaire.

Si nous appelons  $\varphi_i$  la valeur particulière que cette fonction prend pour  $T_i$ , c'est-à-dire :

$$\varphi_i = \varphi(T_i, \theta)$$

il est évident que

$$F(\varphi_i) = F(T_i, \theta)$$

Etant donné que  $\theta$  n'est pas connu, nous devons remplacer  $\theta$  par une estimation  $\theta^*$  obtenue à partir de l'ensemble des observations qui constituent les  $K$  échantillons. Nous aurons, alors, la valeur expérimentale :

$$\varphi_i' = \varphi(T_i, \theta^*)$$

qui s'obtient facilement à partir de  $T_i$  par suite du caractère linéaire des fonctions  $\varphi$  auxquelles nous avons affaire. Nous verrons plus loin dans l'exposé de la méthode graphique les formes particulières que prend la fonction  $\varphi$  pour chaque paramètre.

Le reste des opérations consiste à calculer les valeurs de  $F(\varphi_i')$  et de  $S_K(T_i)$  pour chacun des échantillons et comparer les différences.

$$| F(\varphi_i') - S_K(T_i) |$$

avec la limite  $D_n$  du test de Kolmogorov au niveau de confiance désiré, compte tenu du fait que dans le calcul de  $F(\varphi'_1)$  est intervenue, à la place du vrai paramètre  $\theta$ , l'estimation  $\theta^*$  basée sur les  $K$  échantillons observés.

Les exemples d'application de la méthode exposés à la fin permettront de comprendre aisément la façon de procéder.

#### 4 - METHODE GRAPHIQUE

Pour résoudre graphiquement le problème de la comparaison des échantillons nous représenterons la fonction de distribution des paramètres, prenant en ordonnées une échelle arithmétique sur laquelle les fréquences et probabilités cumulées sont mesurées directement, de 0 à 1. L'axe des abscisses, par contre, ne sera pas gradué selon les valeurs directes du paramètre des échantillons  $T$ , mais selon les valeurs de la fonction  $\varphi$ , dont la loi de probabilité est connue. (Par exemple, le  $\chi^2$ , pour les variances, le  $t$  normal ou de Student-Fisher pour la moyenne, etc.). Cette loi de probabilité fournit alors les éléments pour dessiner la courbe théorique des fréquences cumulées.

Une fois tracée sur le graphique (fig. 1) la courbe de la fonction de distribution  $F(\varphi)$  concernant le cas envisagé, on lui ajoutera les deux courbes qui montrent les limites, au niveau de confiance désiré, des différences établies par le test choisi (Kolmogorov, Massey, Lilliefors, ...) et les paliers relatifs au nombre de sous-échantillons qui constituent l'échantillon multiple. Dans la figure 1, par exemple, on suppose qu'il y a 8 sous-échantillons.

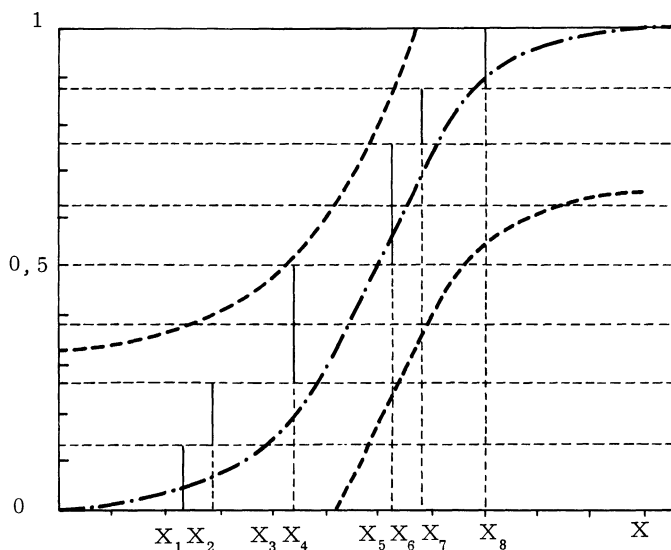


Figure 1

Ayant, ainsi, le graphique préparé pour des comparaisons il s'agira d'y dessiner les échelons représentatifs de la fonction de répartition expérimentale de  $\varphi'$ . Il faudra, donc, passer des valeurs des paramètres  $T_i$  aux valeurs correspondantes de  $\varphi'_i$ , compte tenu de la fonction qui les lie avec les estimations des paramètres  $\theta^*$ ,  $\theta_1^*$ ,  $\theta_2^*$ , données par les mêmes échantillons, c'est-à-dire,

$$\varphi'_1 = \varphi(T_1, \theta^*)$$

Ces calculs sont, en général, linéaires et, par conséquent, très simples, pouvant d'ailleurs être faits graphiquement au moyen d'un abaque à points alignés (voir ci-après).

Si les points supérieurs des échantillons de la fonction de distribution expérimentale sont intérieurs aux courbes des limites de confiance, l'hypothèse de l'homogénéité des échantillons est plausible ; dans le cas contraire il est préférable de la rejeter.

#### 4.1. Utilisation d'abaques à points alignés

Si la fonction  $\varphi$  des paramètres théorique et observé, dont on connaît la loi de probabilité, est linéaire, il est commode de passer des paramètres des échantillons aux valeurs particulières de la fonction à marquer sur l'axe d'abscisses au moyen d'abaques à points alignés.

Or, il résulte qu'il en est ainsi dans tous les cas qui nous intéressent.

On peut recommander ici le type d'abaques à points alignés en N dans lesquels on fera correspondre les deux droites parallèles, respectivement, à  $\varphi$  et T (fig. 2) avec graduations à échelle uniforme, et la droite inclinée à l'estimation du paramètre  $\theta^*$ , obtenue avec la totalité des échantillons. Les graduations des deux droites parallèles ne posent pas de difficultés, puisqu'il suffit de prévoir qu'elles permettent de représenter toutes les valeurs susceptibles d'être effectivement observées.

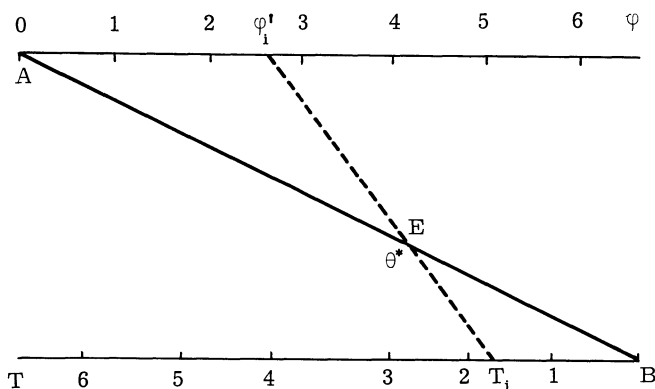


Figure 2

La graduation de l'échelle inclinée peut être faite graphiquement ou analytiquement. Dans le premier cas il suffit de tracer une droite joignant  $\varphi'_1$  avec  $T_1$ , ayant obtenu  $\varphi'_1$  au moyen de

$$\varphi'_1 = \varphi(T_1, \theta_j^*)$$

L'intersection E de cette droite avec AB donne le point  $\theta_j^*$  correspondant à l'estimation obtenue avec l'échantillon multiple particulier j.

Analytiquement, on a, par comparaison des triangles semblables :

$$EB = AB \frac{T_i}{T_i + \varphi'_i} = AB \frac{T_i}{T_i + \varphi(T_i, \theta_j^*)}$$

ainsi à chaque valeur de  $\theta_j^*$  correspondra une valeur de EB, laquelle sera marquée  $\theta_j^*$  sur la droite.

Si les échelles de  $\varphi$  et de T avaient des modules différents il faudrait en tenir compte dans ce calcul. En appelant

$$\rho = \frac{\text{mod}(\varphi)}{\text{mod}(T)}$$

on aura :

$$EB = AB \frac{T_i \text{ mod}(T)}{T_i \text{ mod}(T) + \varphi'_i \text{ mod}(\varphi)} = AB \frac{T_i}{T_i + \rho \varphi'_i}$$

L'abaque peut se construire de façon que la droite de  $\varphi$  coïncide avec l'axe des abscisses de la représentation de sa fonction de répartition, avec la même graduation. Alors, il suffira de faire passer des droites pour les points  $T_i$ , correspondants à chaque échantillon, et  $\theta_j^*$ , correspondant à l'ensemble des K échantillons ou échantillon multiple, et les prolonger jusqu'à l'axe des abscisses pour avoir les points représentatifs des valeurs correspondantes de la fonction  $\varphi$ . (Voir exemples d'application à la fin de l'article).

#### 4.2 Comparaison des variances

On sait que les variances des échantillons de n éléments sont distribuées selon une loi de  $\chi^2$  à n-1 degrés de liberté, de façon que la densité de probabilité d'une valeur particulière  $\sigma_1^2$  de la variance d'un échantillon est égale à la densité de probabilité de

$$\chi^2 = \frac{n \sigma_1^2}{\sigma^2}$$

Si  $\sigma^2$  était connu il n'y aurait pas d'inconvénient à graduer les abscisses avec les valeurs de  $\sigma_1^2$  correspondantes aux valeurs de  $\chi^2$  ayant servi à tracer la courbe des probabilités cumulées, mais en général il faudra prendre une estimation de  $\sigma^2$  telle que  $\sigma^{2*}$ , à la place du paramètre vraie cette valeur étant fonction de l'ensemble des K échantillons que l'on compare.

Ainsi, donc, il sera préférable de marquer les abscisses avec les valeurs de  $\chi^2$  et situer chaque fois les K points par calcul préalable de :

$$\chi_1^2 = \frac{n \sigma_1^2}{\sigma^2}$$

Dans l'abaque à points alignés les deux droites parallèles auront, avec échelle uniforme les valeurs de  $\varphi' = \chi^2$  et  $T = \sigma^{2*}$ . Sur la droite AB les points seront marqués d'après les valeurs  $\sigma^{2*}$  que l'on calculera

$$\sigma^{2*} = \frac{n \sum_{i=1}^k \sigma_i^2}{(n-1)k}$$

Le point concernant une valeur  $\sigma_j^{2*}$ , relative à l'échantillon multiple j, pourrait s'obtenir avec une droite joignant  $\sigma_1^{12}$  avec

$$\varphi_1' = \chi_1^2 = \frac{n \sigma_1^{12}}{\sigma^{2*}}$$

ou bien, en calculant :

$$EB = AB \frac{\sigma_1^{12}}{\sigma_1^{12} + \frac{n \sigma_1^{12}}{\sigma_j^{2*}}} = AB \frac{\sigma_1^{12}}{\sigma_j^{2*} + n}$$

#### 4.3. Comparaison des étendues

La loi de probabilité des étendues a été étudié par Tippett et Pearson (E.K.) en fonction de  $W'/\sigma$  et les tables de leurs probabilités cumulées sont très répandues [6]. Cette fonction sera, donc, prise pour la graduation des abscisses :

$$\varphi' = \frac{w'}{\sigma}$$

et avec l'aide de la table de probabilités cumulées pour les échantillons de taille n il sera facile de tracer la courbe correspondante. Nous remplaçons  $\sigma$  par son estimation :

$$\sigma^* = \frac{\bar{w}'}{d_n}$$

on a alors :

$$\varphi_1' = \frac{d_n \bar{w}_1'}{\bar{w}_1'}$$

Les deux droites parallèles de l'abaque à points alignés seront, donc, avec échelles uniformes graduées selon les valeurs de  $\varphi = w'/\sigma$  et  $T = w'$ . La droite inclinée sera graduée avec les valeurs des étendues moyennes  $\bar{w}'$ , à des points distants de B, définis par :

$$EB = AB \frac{w_1'}{w_1' + \frac{w_1'}{\bar{w}_j'/d_n}} = AB \frac{\bar{w}_j'}{\bar{w}_j' + d_n}$$

#### 4.4. Comparaison des moyennes

On sait que la loi de probabilité des moyennes dépend de la moyenne de la population, mais aussi de l'écart-type de celle-ci. La construction à réaliser pour les moyennes (comme celle que nous verrons ensuite pour les médianes) se sépare nettement des précédentes ; la figure 3 montre le graphique et l'abaque qu'il faut alors utiliser.

La loi de probabilité des moyennes lorsque l'on connaît la valeur de la variance de la population est celle de Laplace-Gauss :

$$p(m', m, \sigma) dm' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{(m' - m)^2}{\sigma^2/n} \right) dm'$$



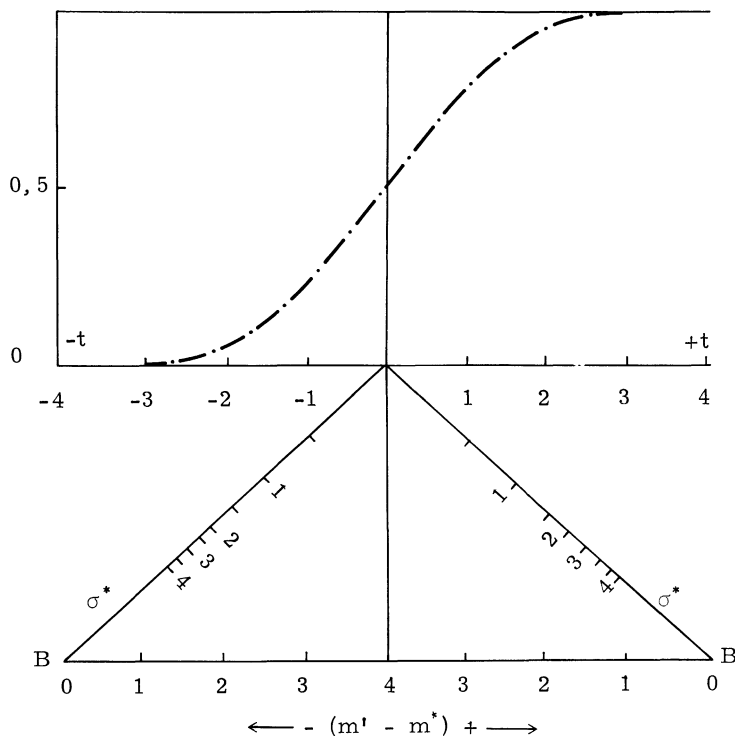


Figure 3

Du point de vue pratique il y a lieu de considérer la variable :

$$t = \frac{m' - m}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{(m' - m) \sqrt{n}}{\sigma},$$

laquelle suit une loi normale réduite.

Si l'on remplace l'écart-type de la population par une estimation obtenue au moyen de la même information qui donne  $m'$ , la loi de probabilité n'est plus celle de Laplace-Gauss mais celle de Student-Fisher.

Pour l'application de ce test d'homogénéité il faudra tenir compte de l'écart type estimé  $\sigma^*$  :

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^k \sigma_i'^2}{(n-1)k}}$$

et utiliser la loi de probabilité de Student-Fisher à  $(n-1)K$  degrés de liberté.

Le remplacement de  $m$  par son estimation  $m^*$  à partir de la totalité des données ne change rien aux calculs :

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^k m_i'}{K}$$

En résumé, la fonction  $\varphi'$  de graduation des abscisses est simplement

$$\varphi' = t = \frac{(m' - m^*) \sqrt{n}}{\sigma^*}$$

la courbe étant tracée selon la loi de Student-Fisher à  $(n-1)K$  degrés de liberté.

Les droites inférieures, coïncidentes, mais avec des graduations à sens contraires, porteront les valeurs  $(m' - m^*)$ , positives à droite et négatives à gauche.

Les droites inclinées seront marquées avec les valeurs de  $\sigma^*$  à des distances de B telles que :

$$AB = AB \frac{(m'_1 - m^*)}{(m' - m^*) + \frac{(m' - m^*) \sqrt{n}}{\sigma^*}} = AB \frac{\sigma^*}{\sigma^* + \sqrt{n}}$$

A la place de l'estimation de  $\sigma$  par la moyenne des écarts-type des sous-échantillons, il peut convenir de prendre l'estimation basée sur l'étendue moyenne de ces sous-échantillons. Lord a étudié la loi de probabilité de la fonction :

$$\varphi' = T = \frac{m' - m^*}{\bar{w}'}$$

c'est celle qu'il conviendra d'utiliser lorsque l'estimation de la variabilité est faite au moyen des étendues. La fonction de distribution de T est donnée dans les tables qui accompagnent l'article de Lord [7].

Les droites inclinées seront marquées d'après les valeurs des étendues moyennes :

$$EB = AB \frac{\bar{w}'}{\bar{w}' + 1}$$

ou avec la correction des modules, si nécessaire :

$$EB = AB \frac{\bar{w}'}{\bar{w}' + \rho}$$

#### 4.5. Comparaison des médianes

La facilité de leur détermination peut faire préférer les médianes aux moyennes s'il s'agit d'une comparaison d'échantillons que l'on veut rapide et faire par un personnel peu formé aux calculs numériques.

La loi de probabilité des médianes est, cependant, moins exactement définie que celle des moyennes et il faudra admettre des approximations peut être grossières comme compensation à la simplicité des opérations numériques nécessaires.

La fonction  $\varphi$  de graduation des abscisses devra être, en représentant par  $M'$  les médianes des sous-échantillons, provenant d'une population normale :

$$\varphi = t = \frac{M' - m}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{M' - m}{\sigma} \sqrt{\frac{2n}{\pi}} = \frac{(M' - m) \sqrt{n}}{1,25 \sigma}$$

Bien que, à notre connaissance, la théorie ne soit pas bien établie, il paraît hors de doute que l'on aura davantage d'efficacité si l'on utilise la loi de Student-Fisher à la place de la loi normale comme loi de probabilité des médianes lorsqu'on ne connaît pas l'écart-type théorique de la population. Si, d'autre part, par souci de la simplicité des calculs on choisit d'estimer la variabilité par l'étendue moyenne, c'est la loi de Lord [8] qu'il faudra employer. Finalement l'estimation du paramètre  $m$  peut se faire aussi au moyen de la médiane des médianes  $M^*$ ; pour que ceci soit aisé il faudra que la taille et le nombre des sous-échantillons  $n$  et  $K$  soient impairs.

On aura, donc :

$$\varphi' = T = \frac{(M' - M^*)}{1,25 \bar{w}'}$$

La droite supérieure étant graduée d'après  $\varphi' = T$ , la droite inférieure est graduée d'après  $(M' - M^*)$  à droite et à gauche selon que ce résultat est positif ou négatif. Sur la droite inclinée, marquée avec les valeurs des étendues moyennes, la position d'une valeur  $\bar{w}'_j$  se trouvera à la distance de l'origine (B ou B') :

$$EB = AB \frac{(M' - M^*)}{(M' - M^*) + \frac{1,25 \bar{w}'_j}{1,25 \bar{w}'_j + 1}} = AB \frac{1,25 \bar{w}'_j}{1,25 \bar{w}'_j + 1}.$$

Les résultats que l'on obtiendra, intéressants à cause de la simplicité des calculs demandés, manqueront, sans doute, de précision. Il faut s'interdire d'utiliser les médianes et les étendues lorsque la précision des résultats est essentielle.

#### 4.6. Comparaison des sommes

Une variante de la comparaison des moyennes qui peut être intéressante par sa simplicité, sans qu'avec elle, contrairement au cas des médianes, l'efficacité du test diminue, est celle de la comparaison des sommes des valeurs des échantillons.

Soit  $S'_i$  la somme des valeurs de l'échantillon  $i$  et  $S^*$  la moyenne des sommes des  $K$  échantillons :

$$S^* = \frac{\sum S'_i}{K}$$

On sait que les sommes des valeurs des échantillons prélevés dans une population normale suit une loi normale d'écart-type  $\sigma\sqrt{n}$ .

Si  $\sigma$  n'est pas connu, il sera possible de prendre à sa place l'estimation obtenue à partir des données dont on dispose. Alors :

$$\varphi' = t = \frac{S' - S^*}{\sigma^* \sqrt{n}}$$

la courbe étant tracée suivant la loi de Student-Fisher à  $(n-1)K$  degrés de liberté.

Les droites inclinées de l'abaque double seront graduées à des distances de l'origine B :

$$EB = AB \frac{(S'_i - S^*)}{(S'_i - S^*) + \frac{(S'_i - S^*)}{\sigma^* \sqrt{n}}} = AB \frac{\sigma^* \sqrt{n}}{\sigma^* \sqrt{n} + 1}$$

Si l'on utilisait les étendues pour estimer la variabilité, la fonction  $\varphi'$  serait :

$$\varphi' = T = \frac{(S'_i - S^*)}{n \bar{w}'}$$

avec la loi de probabilité de Lord ; les distances EB des points de référence se calculeraient :

$$EB = AB \frac{(S'_i - S^*)}{(S'_i - S^*) + \frac{(S'_i - S^*)}{n \bar{w}'}} = AB \frac{\bar{w}'}{\bar{w}' + 1/n} = AB \frac{n \bar{w}'}{n \bar{w}' + 1}$$

## 5 - EXEMPLES D'APPLICATION

Nous emprunterons à Morice et Chartier [8] l'exemple pour étudier l'homogénéité d'un ensemble d'échantillons. Il s'agit de six fours rotatifs réglés pour produire du ciment de la même qualité, dont on a prélevé cinq éprouvettes dans la fabrication de chaque four. La charge de rupture à la traction (en Kg/cm<sup>2</sup>) de ces 30 éprouvettes a été :

Four Eprouv.	I	II	III	IV	V	VI
1	13,1	12,8	12,7	13,6	13,5	10,0
2	11,0	12,9	13,7	14,7	14,5	13,7
3	12,8	11,5	14,1	13,5	14,2	14,0
4	12,3	12,3	14,5	14,0	15,0	14,1
5	14,0	12,5	14,0	14,0	14,7	14,7
Moyennes	12,64	12,40	13,80	13,96	14,38	13,30
Variances	0,9784	0,2480	0,3680	0,1780	0,2616	2,8280
Etendues	3,0	1,4	1,8	1,2	1,5	4,7
Sommes	63,2	62,0	69,0	69,8	71,9	66,5

### 5.1. Comparaison des variances

L'estimation de la variance de la population à laquelle appartiendraient les six échantillons de cinq éprouvettes donne :

$$\sigma^{2*} = \frac{5 \sum \sigma_i^{12}}{4 \times 6} = \frac{5 \times 4,8620}{24} = 1,0130$$

Pour comparer analytiquement ces variances nous construirons le tableau de la page suivante :

Tableau I

$\sigma_1'^2$	$\chi_1^2$	$F(\chi_1^2)$	$S_K(\sigma_1'^2)$	$ F - S_K $
0,1780	0,88	0,075	0,167	0,092
0,2480	1,23	0,129	0,333	0,204
0,2616	1,29	0,139	0,500	0,361
0,3680	1,82	0,241	0,667	0,426
0,9784	4,84	0,697	0,833	0,136
0,8280	14,00	0,992	1,000	0,008

Dans la première colonne il y a les six variances par ordre croissant. La deuxième colonne est obtenue par calcul de

$$\chi_1^2 = \frac{5 \sigma_1'^2}{1,0130}$$

pour chacune des variances. La troisième colonne résulte de la table de probabilités de  $\chi^2$  ; les valeurs inscrites ont été calculées par interpolation linéaire. La quatrième colonne s'obtient, simplement :

$$S_K(\sigma_1'^2) = \frac{i}{K} = \frac{i}{6}$$

La cinquième est la valeur absolue de la différence entre les deux antérieures. On peut comparer les chiffres de cette colonne avec le  $D_n$  de Kolmogorov-Massey [2, 3] ; dans ce cas nous avons pour un risque de première espèce  $\alpha = 0,05$  et des échantillons de taille 6,  $D_6 = 0,521$ . Aucune des différences dépasse ce chiffre ; on peut conclure à l'homogénéité des 6 variances, au niveau de confiance de 0,95.

La figure 4 montre les mêmes résultats obtenus graphiquement. Le tracé de la courbe  $\chi^2$  a été fait au moyen des tables [9] et les limites de confiance pour le test de Kolmogorov-Massey en lui additionnant et retranchant  $D_6 = 0,521$ .

Pour l'abaque à points alignés inférieur le seul point à déterminer est celui où se trouve située la variance estimée de la population  $\sigma^{2*} = 1,013$ .

La distance EB se calcule en tenant compte du rapport des échelles de  $\sigma_1'^2$  et  $\chi^2$ ,  $\rho = 0,10$ , (dans la figure 6), on a :

$$EB = AB \frac{\sigma^{2*}}{\sigma^{2*} + \rho n} = AB \frac{1,013}{1,013 + 0,20 \times 5} \approx \frac{1}{2} AB$$

On pourrait aussi tracer directement l'escalier aléatoire de la fonction de distribution des échantillons au moyen des résultats consignés dans la seconde colonne du tableau 1.

## 5.2. Comparaison des étendues

La variabilité des échantillons peut être comparée au moyen des étendues. Le premier pas sera celui de calculer l'étendue moyenne :

$$\bar{w}' = \frac{\sum w_1'}{K} = \frac{13,6}{6} = 2,267$$

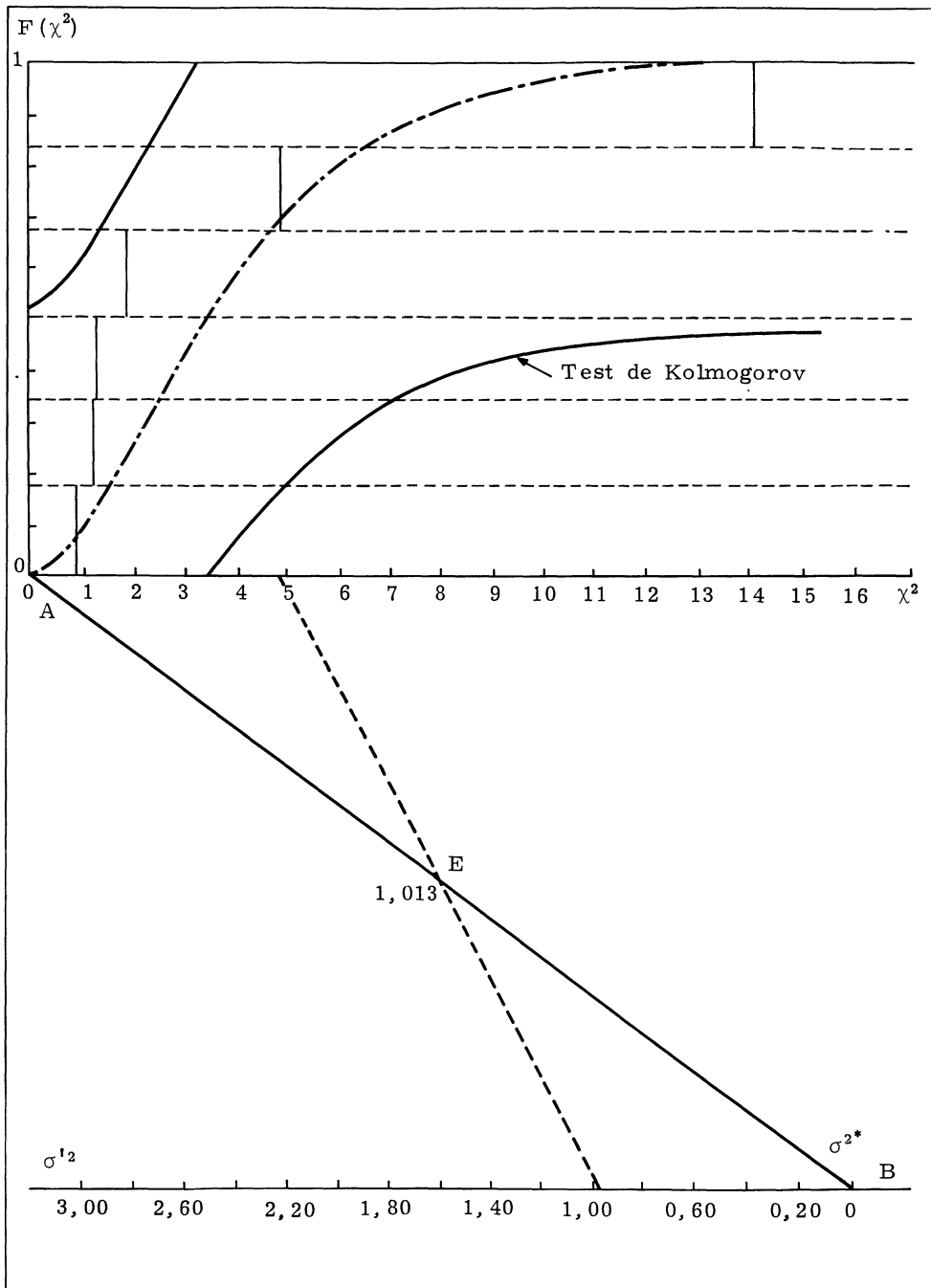


Figure 4

La comparaison des étendues se fera au moyen du tableau 2 :

Tableau 2

$w'_i$	$w'_i/\sigma$	$F(w'_i/\sigma)$	$S_k(w'_i)$	$ F - S_k $
1, 2	1, 230	0, 093	0, 167	0, 074
1, 4	1, 435	0, 153	0, 333	0, 180
1, 5	1, 540	0, 188	0, 500	0, 312
1, 8	1, 845	0, 313	0, 667	0, 354
3, 0	3, 080	0, 799	0, 833	0, 034
4, 7	4, 820	0, 994	1, 000	0, 006

La première colonne est formée avec les six étendues écrites par ordre croissant.

Dans la deuxième colonne il y a les valeurs de :

$$\frac{w'_i}{\sigma} = \frac{w'_i}{w'/d_n} = \frac{w'_i}{2, 267 : 2, 326}$$

La troisième colonne est calculée par interpolation au moyen de la table des probabilités cumulées des étendues [6].

La quatrième colonne est, comme au tableau 1 :

$$S_k(w'_i) = \frac{i}{K} = \frac{i}{6}.$$

La cinquième porte les différences entre les deux précédentes. La comparaison avec  $D_6 = 0, 521$  du test de Kolmogorov-Massey nous dit qu'au niveau de confiance 95 %, on peut conclure à l'homogénéité des étendues et, par conséquent, de la variabilité des échantillons.

Le tracé de la figure 5 ne présente pas de difficultés, avec la table des probabilités cumulées des étendues en fonction de  $\sigma$ .

Pour les limites de confiance il faudrait répéter ce qui a été dit pour les variances.

Le calcul de la position  $w'$  sur l'abaque des points alignés est très simple parce qu'ici les échelles de  $w'/\sigma$  et  $w'$  ont le même module. Alors :

$$EB = AB \frac{\bar{w}'}{\bar{w}' + d_n} = AB \frac{2, 267}{2, 267 + 2, 326} \simeq 0, 493 AB.$$

### 5.3. Comparaison des moyennes

La comparaison des moyennes des six échantillons de cinq éprouvettes sera faite comme suit :

Nous prendrons l'estimation de l'écart-type obtenue antérieurement, soit au moyen des variances des échantillons, soit au moyen des étendues, et l'estimation de la moyenne de l'ensemble des observations :

$$m^* = \frac{\sum m'_i}{K} = \frac{80, 48}{6} = 13, 413$$

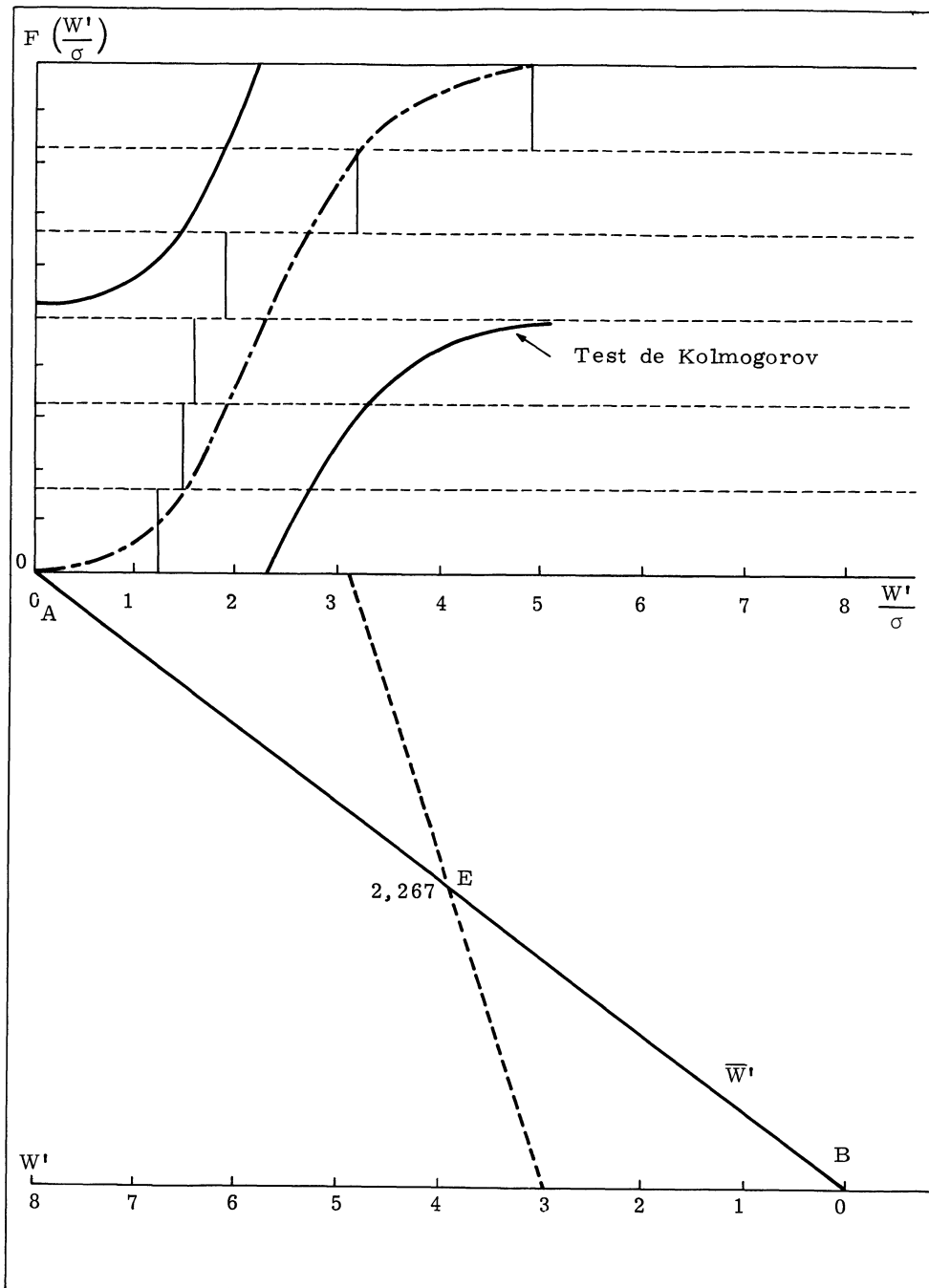


Figure 5



pour calculer :

$$t_i = (m_i' - m^*) \sqrt{\frac{n}{\sigma^{2*}}} = (m_i' - 13,413) \sqrt{\frac{5}{1,013}}$$

Le tableau des calculs sera ici le suivant :

Tableau 3

$m_i'$	$t_i$	$F(t_i)$	$S_K(m_i')$	$ F - S_K $
12,40	-2,25	0,018	0,167	0,149
12,64	-1,71	0,050	0,333	0,283
13,30	-0,245	0,405	0,500	0,095
13,80	0,87	0,803	0,667	0,136
13,96	1,22	0,881	0,833	0,048
14,38	2,15	0,980	1,000	0,020

Dans la première colonne il y a les six moyennes, ordonnées selon un ordre croissant.

La seconde donne les valeurs de

$$t_i = (m_i' - 13,413) \sqrt{\frac{5}{1,013}}$$

La troisième colonne vient de la table de Student-Fisher par interpolation dans la ligne correspondant à  $4 \times 6 = 24$  degrés de liberté.

La quatrième colonne donne, comme d'habitude, les valeurs de :

$$S_K(m_i') = \frac{i}{K} = \frac{i}{6}$$

La cinquième montre les différences entre la 3ème et la 4ème colonne.

La comparaison avec  $D_6 = 0,319$  du test de Kolmogorov-Lilliefors [4] nous fait encore accepter l'hypothèse d'homogénéité des moyennes, au niveau de confiance du 95 % :

La figure 6 est l'application à cet exemple de la méthode graphique. Rappelons, encore, que la loi de probabilité adoptée est celle de Student-Fisher à 24 degrés de liberté et que les limites indiquées sont celles du test de Kolmogorov-Lilliefors.

Le calcul de la distance EB de l'abaque à points alignés ne présente pas de difficulté. On a, en effet (dans la figure 6) :

$$\rho = 0,4 \quad EB = AB \frac{\sigma^*}{\sigma^* + \rho \sqrt{n}} = AB \frac{1,0065}{1,0065 + 0,4 \sqrt{5}} \simeq 0,53 AB$$

$\sigma^* = 1,0065$

#### 5.4. Comparaison des sommes

Comme pour les moyennes nous prendrons l'estimation de la variance antérieurement calculée. D'autre part :

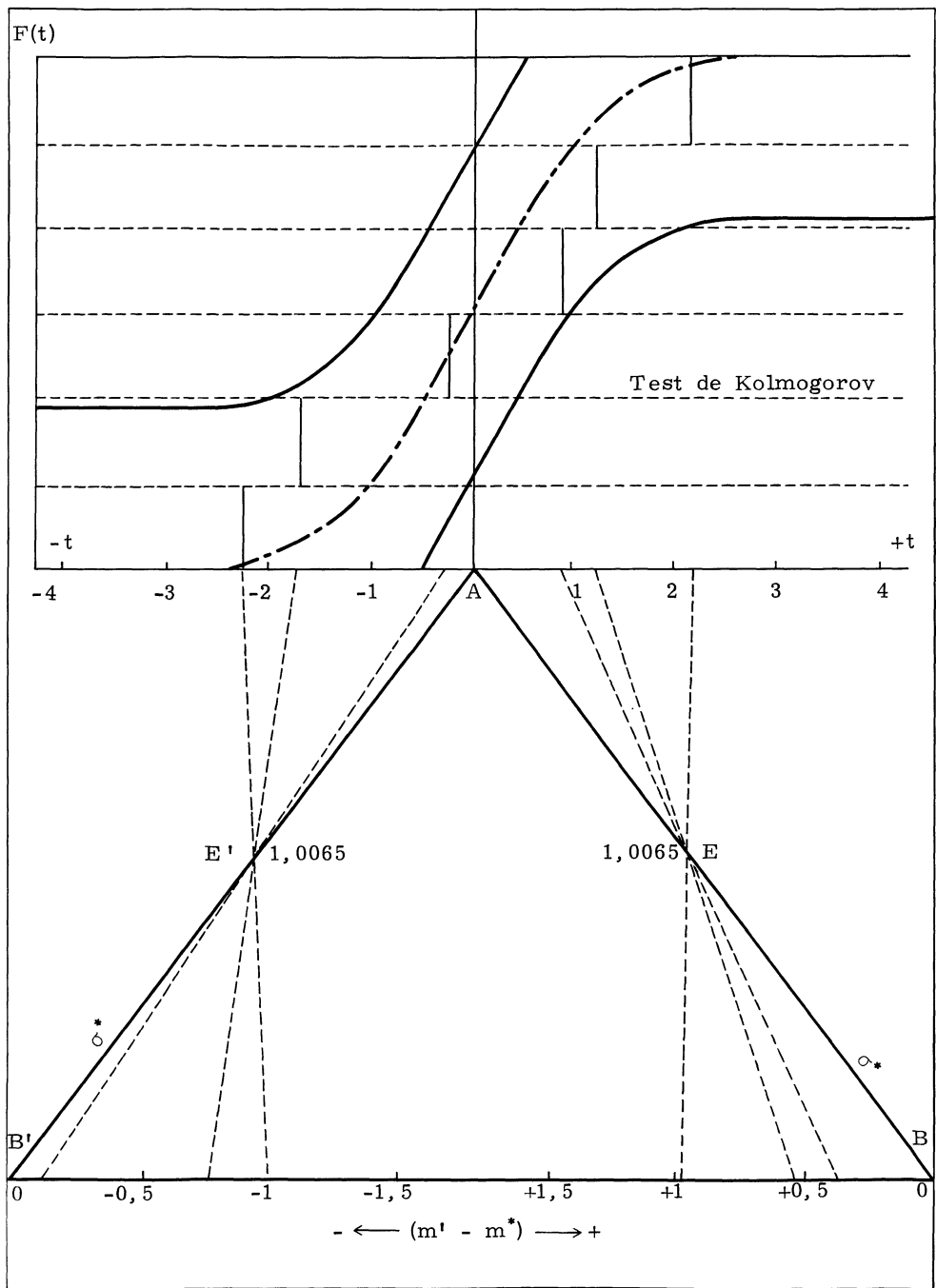


Figure 6

$$S^* = \frac{\sum S'_i}{K} = \frac{402,40}{6} = 67,067$$

Il faudra calculer pour chaque échantillon :

$$t_i = \frac{S'_i - S^*}{\sqrt{n} \sigma^{2*}} = \frac{S'_i - 67,067}{\sqrt{5} \times 1,013}$$

Ce qui nous donnera le tableau ci-après :

Tableau 4

$S'_i$	$t_i$	$F(t_i)$	$S_k(S'_i)$	$ F - S_k $
62,0	-2,25	0,018	0,167	0,149
63,2	-1,71	0,050	0,333	0,283
66,5	-0,245	0,405	0,500	0,095
69,0	0,87	0,803	0,667	0,136
69,8	1,22	0,881	0,833	0,048
71,9	2,15	0,980	1,000	0,020

Les résultats, comme on pouvait le supposer, sont identiques à ceux du tableau 3, de façon que nous ne les commenterons pas.

La construction graphique est représentée sur la figure 7.

Elle est identique au graphique des moyennes, excepté pour l'abaque inférieur où la graduation devra tenir compte du fait que les valeurs que l'on devra y placer sont cinq fois plus grandes. Avec le changement d'échelle correspondant les deux figures sont, donc, identiques.

## 6 - INTERET PRATIQUE DES NOUVEAUX TESTS

On peut se demander si à côté de l'intérêt théorique des tests proposés qui consiste en ce qu'ils fournissent une méthode unifiée pour la comparaison des échantillons multiples, quelque soit le paramètre à considérer, ils ont un intérêt pratique supplémentaire à cause du travail de calcul moins volumineux ou moins difficile qu'avec les tests classiques.

La réponse est, sans aucun doute, affirmative pour la comparaison des variances, excepté en ce qui concerne le test de Hartley, mais celui-ci considère en réalité seulement les deux sous-échantillons extrêmes, étant, de ce fait, moins illustratif que les autres.

Pour tous les tests, mais d'une façon spéciale ceux qui se déduisent de la loi normale (ou la loi, qui lui est proche, de Student-Fisher) il est à remarquer la similitude des calculs avec ceux qu'entraîne le tracé de la droite de Henry lorsque l'on ne dispose pas de papier à graduation normalisée.

Du point de vue de l'intérêt pratique du test proposé, la comparaison la plus illustrative sera celle que l'on peut faire entre l'analyse de la variance et le test d'homogénéité des moyennes (ou plutôt des sommes, puisque les résultats sont identiques, et le calcul des sommes demande moins d'opérations que celui des moyennes).

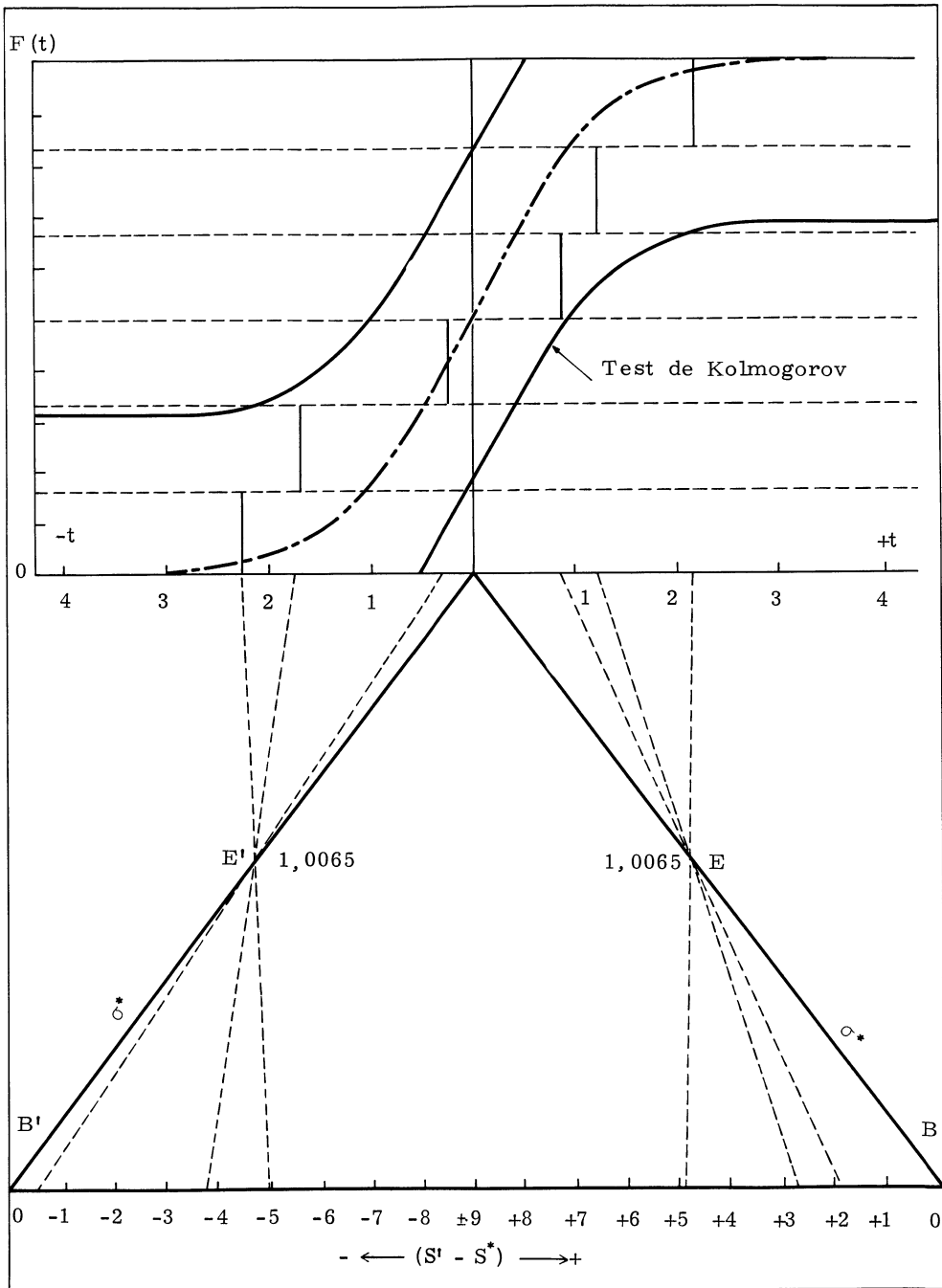


Figure 7

Pour entreprendre l'analyse de la variance il faut être certain que les sous-échantillons n'ont pas des variances significativement différentes, d'où le calcul préalable nécessaire de ces variances, même si par la suite on ne s'en sert pas. Dans le cas de l'exemple, l'analyse de la variance proprement dite (sans tenir compte, non plus des changements de variables possibles pour simplification des données), demanderait le calcul de

9 additions (dont une, très longue, des 30 carrés)  
3 soustractions  
37 multiplications (la plupart élévation au carré)  
5 divisions  
3 lectures de tables

---

57 opérations au total

Pour l'application du test proposé à la comparaison des sommes il faut le calcul de

1 addition  
12 soustractions  
6 multiplications  
3 divisions  
1 racine carrée  
7 lectures de tables

---

30 opérations au total

Le bilan est nettement favorable à la nouvelle méthode.

En ce qui concerne la méthode graphique, certainement intéressante lorsqu'il s'agit de comparaisons répétitives, puisque, si la taille de l'échantillon est la même, la courbe théorique de répartition et les échelles étant identiques, on peut utiliser le même fond d'abaque, il y a lieu de se demander si de telles comparaisons se présentent souvent dans la pratique industrielle.

L'idée de la méthode présentée, aussi bien analytique que graphique, a été le fruit d'un problème industriel ainsi posé : la section de cablage d'une usine de fabrication de conducteurs électriques désirait organiser le contrôle des fils qui lui arrivaient du trefilage dans les meilleures conditions d'efficacité et d'économie, en considérant, principalement, le diamètre et l'allongement du cuivre. Les deux caractéristiques étant mesurables, il n'y avait pas de doute qu'il fallait procéder à un contrôle par mesures, mais on pouvait craindre que les lots des bobines destinées à la même fabrication ne soient pas assez homogènes pour que la moyenne puisse représenter valablement toutes les mesures.

Il était, d'autre part, impossible de marquer avec des étiquettes les bobines d'après leur ordre de trefilage parce qu'elles subissent un traitement thermique après celui-ci.

L'application de la méthode a permis de détecter le manque d'homogénéité de ce traitement thermique puisque il est apparu trop souvent,

$\Phi$				Etendue	Sommes	Dif.	Allongement				Etendue	Sommes	Dif.
Totaux/10						Totaux/10							

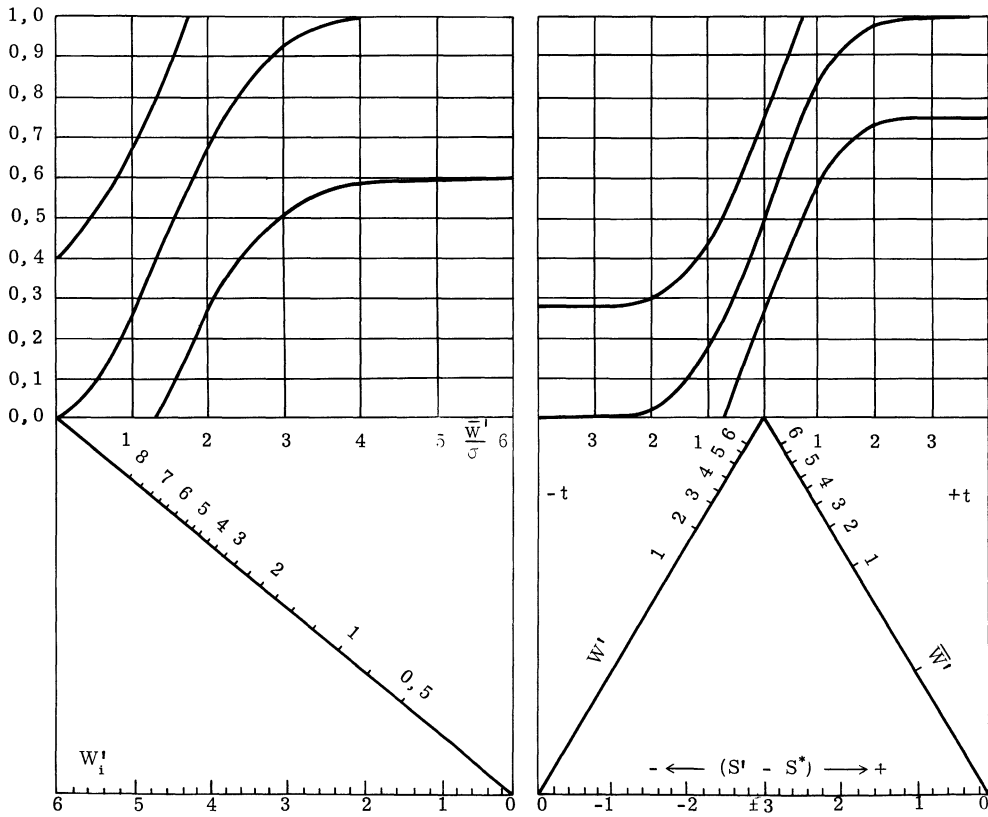


Figure 8

	$\Phi$		Etendue	Sommes	Dif.	Allongement			Etendue	Sommes	Dif.
249	248	252	4	749	1,4	29	27	30	3	86	1,8
250	251	251	1	752	4,4	28	29	31	3	88	3,8
253	249	251	4	753	5,4	29	30	30	1	89	4,8
246	247	250	4	743	-4,6	30	29	27	3	86	1,8
251	246	249	5	746	-1,6	28	27	29	2	84	-0,2
252	251	248	4	751	3,4	30	27	26	4	83	-1,2
245	249	248	4	742	-5,6	24	28	25	4	77	-7,2
247	250	247	3	744	-3,6	29	25	28	4	82	2,2
261	249	252	3	752	4,4	27	27	26	1	80	4,2
248	247	249	2	744	-3,6	30	28	29	2	87	2,8
Totaux/10			3,4	746,6		Totaux/10			2,7	84,2	

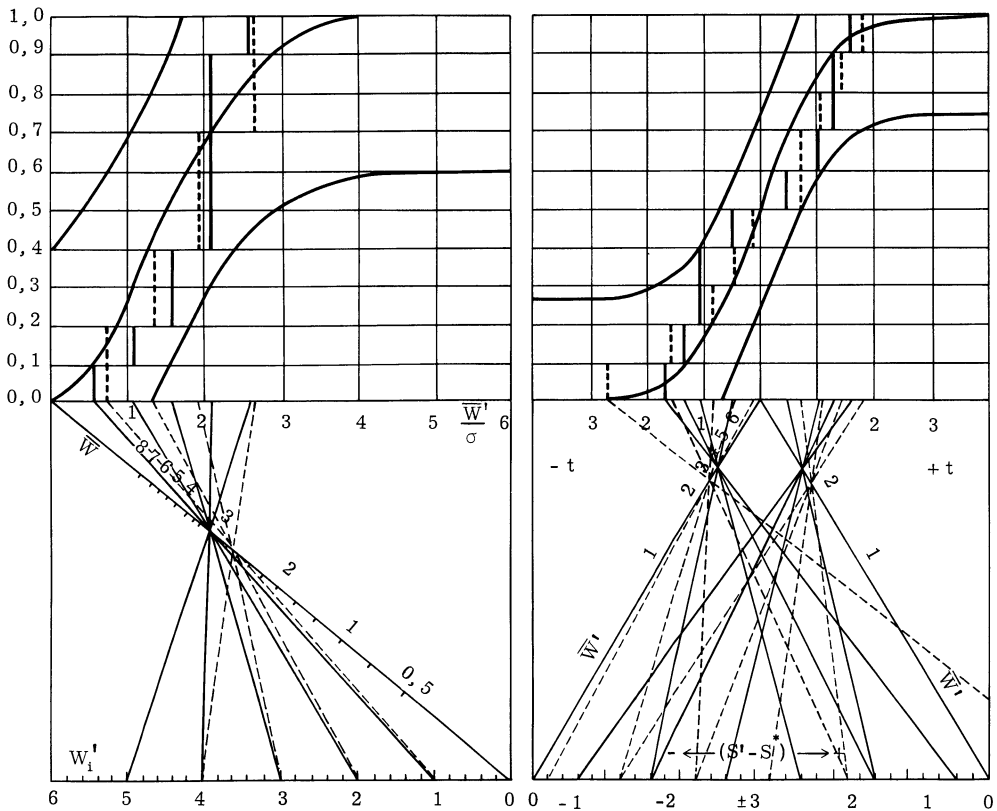


Figure 9

au début de la réalisation du contrôle que les moyennes de l'allongement (en réalité, les sommes de 3 mesures) n'appartenaient pas à une population unique.

La figure 8 montre l'imprimé préparé et la figure 9 un imprimé rempli avec les résultats d'un lot. Les tracés concernant le diamètre et l'allongement étaient faits avec des couleurs d'encre différentes.

Il est évident, néanmoins, que la méthode ne peut donner davantage de précision que celle des paramètres que l'on utilise pour l'estimation.

Ainsi, l'emploi des étendues et des médianes à la place des variances et des moyennes (ou des sommes) ne doit être encouragé que lorsque la rapidité et la facilité de calcul sont davantage nécessaires que la précision et l'efficacité statistique. Il faut dire, cependant, que de tels cas se présentent très souvent dans la pratique industrielle.

## 7 - REMERCIEMENTS ET PRECISIONS

Je remercie vivement mes amis les professeurs Morice, Férignac, Companys et Polo pour les observations faites à une première version de cet article, qui m'ont permis de l'améliorer. La responsabilité des erreurs et du manque de précision, qui peuvent être restés, est exclusivement de l'auteur.

En partie, la première version a été présentée à la 36e Session de l'Institut International de Statistique célébrée à Sidney en Septembre 1967.

## BIBLIOGRAPHIE ET NOTES

- [1] H. RIEDWYL - "Goodness of fit", Journal Am. Stat. Ass. 62 (1967) n° 318, p. 390-398.
  - [2] F. J. MASSEY - "The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of fit", Journal Am. Stat. Ass. 46 (1951), n° 253, p. 68-78.
  - [3] P. FERIGNAC - "Test de Kolmogorov-Smirnov sur la validité d'une fonction de distribution", Rev. Stat. Appl., n° 4, vol. X, 1962,
  - [4] H. W. LILLIEFORS - "On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown", J. Am. Stat. Ass. 62 (1967) n° 318, p. 399-402.
  - [5] Seminario de Estadística Aplicada e Investigación Operativa. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, de Barcelone. Etude non publiée.
  - [6] J. MOTHEs - "Techniques Modernes de Contrôle des Fabrications" Table 10, p. 500, Dunod, Paris, 1952.
  - [7] E. LORD - "The use of range in place of the Standard Deviation in the t test", Biometrika, XXXIV, p. 41-67.
- R. CAVE - "Le Contrôle Statistique des Fabrications", Table XII, p. 494, 2ème éd. Eyrolles, Paris, 1961.



- [8] E. MORICE et CHARTIER - "Méthode Statistique" (2e partie) p. 222 ;  
Inst. Nat. de la Stat. et des Etudes Econom., Impr. Nat., Paris,  
1954.
- [9] J. MOTHEs - "Prévisions et décisions statistiques dans l'entreprise",  
Table 6, p. 511, Dunod, Paris, 1962.