

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. PILÉ

Esquisse d'une théorie générale des systèmes entrée-sortie (hypothèses de conservation des flux). IIIe partie : point de vue probabiliste

Revue de statistique appliquée, tome 15, n° 4 (1967), p. 47-86

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1967__15_4_47_0

© Société française de statistique, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESQUISSE D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES ENTRÉE-SORTIE (HYPOTHÈSES DE CONSERVATION DES FLUX)

G. PILÉ

III^e PARTIE (1)

POINT DE VUE PROBABILISTE

I - DEFINITION D'UNE PROBABILITE \mathcal{P} SUR \mathcal{A}

1/ Les domaines de variation XYZ des y_1 , z_1 , x_1 seront supposés inclus soit dans N_0 , soit dans la droite des réels positifs.

A tout couple $e_1 = (y_1, z_1)$ correspond un point image dans le plan y, z dit espace des phases, la réalisation de l'évènement élémentaire e_1 étant liée ici à une épreuve \mathcal{E}_1 exactement définie

On définira en général une probabilité

soit sur Y seul : $y_1, dA(y_1) z_1$ prenant une valeur certaine

soit sur Z seul : $z_1, dB(z_1) y_1$ prenant une valeur certaine

soit sur Y et Z indépendamment l'un de l'autre

soit sur X seul : $(x_1 p_{x_1})$.

Toute distribution d'entrée définie par une suite n tuple $\{e_1 \dots e_n\}$ sera interprétée comme un évènement lié à la famille \mathcal{F} d'épreuves \mathcal{E}_i et représentée par une trajectoire aboutissant à un point image (y, z) .

L'hypothèse d'indépendance des épreuves d'une même suite (où i peut parcourir soit un ensemble fini $\{0, 1 \dots n\}$, soit infini dénombrable N_0 , entraîne les propriétés suivantes :

1/ La probabilité a priori de l'évènement $\{e_1, e_{i+1}, \dots\}$ est égale à sa probabilité conditionnelle à $\{.. e_{i-2}, e_{i-1}\}$

2/ Le processus est réversible en probabilité, la probabilité d'une suite étant indépendante de son ordre.

Les hypothèses précédentes reviennent à appliquer sur $\{e_i\}$ une probabilité \mathcal{P} homogène, c'est-à-dire indépendante de i, (chaque épreuve \mathcal{E}_i est assimilable à un tirage non exhaustif dans une urne contenant des boules marquées).

Toute une classe de cas concrets échappent à cette condition, en particulier ceux où le flux offre est alimenté par une population finie peu importante.

(1) Les 1^{ère} et 2^{ème} parties ont été publiées dans le numéro précédent (Vol. XV N° 3).

Exemple-type : le problème de l'entretien ou du service de n machines par s réparateurs ou surveillants.

Le traitement de ces cas nécessite des développements qui sortent du cadre limité de cette analyse.

2/ La variable d'état doit être interprétée dans un contexte aléatoire, comme une fonction aléatoire $\varepsilon_1(d)$ dépendant dans le cas transitoire de deux arguments t et d .

- L'argument t , non probabilisé, va parcourir soit une suite régulière, soit l'ensemble des points d'un intervalle de la droite réelle ;

t va s'identifier dans les applications soit à la variable y , soit à $y + z$, ou au nombre n d'épreuves \mathcal{E}_1 si l'on prend comme variable de base la "longueur" des enchaînements au sens de la théorie des ensembles (comme dans le problème de la ruine du joueur par exemple).

- L'argument d parcourt un espace probabilisé sommairement décrit plus haut, se résumant dans un triplet $(E, \mathcal{F}, \mathcal{Q})$ où

- E désigne l'ensemble des distributions d
- \mathcal{F} une σ algèbre de sous-ensembles A_1 de E
- \mathcal{Q} une probabilité sur \mathcal{F} .

II - EXPOSE D'UNE METHODE GENERALE

1/ Faisons un retour en arrière sur l'analyse de structure faite en IIème partie.

Toute distribution de $E_{y,z}$ ayant une définition unique sur le produit d'ensembles ID , $E_{y,z}$ peut être décomposée en classes de sous-ensembles

$$A_{y_1 z_1} = I_{y_1 z_1} D_{\bar{y}_1 \bar{z}_1}$$

(\bar{y}_1 complément de y_1 par rapport à y , \bar{z}_1 complément de z_1 par rapport à z) ayant les propriétés d'une σ algèbre (les A_{y_1, z_1} sont d'ailleurs tous disjoints et leur réunion s'identifie à E).

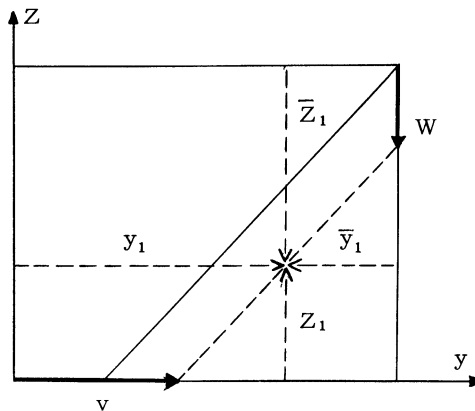


fig. 3.1

A chaque classe correspond un point image dans le plan y, z sur l'aire ombrée (figure page précédente).

Il est facile de voir que le sous-ensemble

$$E_{y,z}^{v,w} = I_{y_1}^{v,w} D_{z_1}^{v,w}$$

a pour images l'ensemble des points situés sur la diagonale (portée en pointillé).

Si l'on substitue aux distributions $D_{y_1}^{v,w}$ leurs conjuguées $I_{z_1}^{v,w}$, on obtient le dénombrement

$$E_{y,z}^{v,w} = I_{y_1}^{v,w} I_{z_1}^{v,w} \quad (\text{formule analogue avec les } D)$$

Il en résulte que si on associe à l'ensemble des distributions d'entrée d'argument $\leq y$, son ensemble conjugué, il est possible de dénombrer $E_{y,z}^{v,w}$ à partir des seules distributions soit incluses, soit denses de ces deux ensembles.

Identifions maintenant les I et D à des suites d'épreuves \mathcal{E} , les opérations "produit" d'ensembles, s'appliquent aux probabilités correspondantes du fait de l'indépendance des épreuves (les points de contact des distributions contigües de I et D sont toujours ce que l'on appelle des points "régénératifs" des processus).

Pour des raisons de simplicité et d'isomorphisme nous conviendrons par la suite de désigner par les lettres I et D , les probabilités attachées à ces distributions.

2/ Dans l'exposé qui va suivre nous nous placerons dans le cas où l'argument non probabilisé est pris égal au nombre n d'épreuves élémentaires de tirage de couples (y_i, z_i) .

Dressons le tableau suivant des $dI_n(V)$ et $dD_n(W)$, probabilités de distributions d'ordre n , soit incluses d'état (v) , soit denses d'état (w) .

| | | | |
|----------------------|---|---|--|
| $\varepsilon > 0$ | $\left\{ \begin{array}{l} V \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{array} \right.$ | $\begin{array}{l} \uparrow \\ dI_1(V) \dots\dots\dots dI_n(V) \\ \\ \\ \\ \\ dI_1(1) \dots\dots\dots dI_n(1) \end{array}$ | avec les notations |
| | $1 \quad I_1 \dots\dots\dots I_n$ | | $I_n = \sum^v dI_n(V)$ |
| | $1 \quad D_1 \dots\dots\dots D_n$ | | $D_n = \sum^w dD_n(W)$ |
| $\varepsilon \leq 0$ | $\left. \begin{array}{l} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W \end{array} \right\}$ | $\begin{array}{l} \downarrow \\ dD_1(0) \dots\dots\dots dD_n(0) \\ \\ \\ \\ \\ dD_1(W) \dots\dots\dots dD_n(W) \end{array}$ | On utilisera de même $dD(W) = \sum^n dD_n(W)$ $D_n(W) = \sum^{w' \leq w} dD_n(W')$ |

Les éléments de la 1ère colonne résultent des sommations

$$dI_1(V) = \int dA(z + V) dB(z) \quad \text{ou} \quad \int dB(y - V) dA(y)$$

$$dD_1(W) = \int dA(z - W) dB(z) \quad \text{ou} \quad \int dB(y + W) dA(y)$$

Ils définissent les probabilités p_ε des écarts : $\varepsilon = V$, $\varepsilon = -W$.

Les principes (opérations "Produit") définis en IIème partie permettent d'écrire :

$$dI_{n+1}(v) = p_\varepsilon^* dI_n(v') \quad \varepsilon + v' = v$$

$$dD_{n+1}(w) = dD_n(w')^* p_\varepsilon \quad w' - \varepsilon = w$$

Conduisant au système de relations suivant de définition de la fonction de répartition $F(w)$

| |
|---|
| $\left. \begin{aligned} dF_n(W) &= I_i^* dD_i(W) \\ F_n(W) &= I_i^* D_i(W) \\ F_n(> 0) &= I_i^* D_i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & i + \bar{i} = n \\ & i \in 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$ |
|---|

Rappelons qu'avec les notations actuelles les relations de transition usuelles seraient les suivantes

$$dF_{n+1}(W) = dF_n(W) p_\varepsilon^{*w' - \varepsilon = w}$$

$$F_{n+1}(W) = F_n(W) p_\varepsilon^{*w' - \varepsilon = w}$$

(appliquées de proche en proche n fois, elles reviennent à élever à la puissance n une matrice d'éléments p_ε).

3/ Propriétés "finies" de la suite double $\{I_n, D_n\}$

a) La relation $I_i^* D_i^{*i+i=n} = 1 \quad i \in 0, \dots, n$, permet de déduire les I_n des D_n et vice versa, en sorte que le calcul des $dF_n(W)$ se ramène à celui des $dD_n(W)$ plus simple et souvent rapidement convergent. (En perdant de vue ces propriétés simples, on alourdit exagérément les calculs).

b) La suite (I_n, D_n) résume l'ensemble des propriétés essentielles attachées à l'étude du système comme nous allons le montrer.

Représentons de la façon suivante les masses de probabilité (I_n, D_n) liées par les relations

$$I_1 + D_1 = 1$$

$$I_2 + I_1 D_1 + D_2 = 1$$

.....

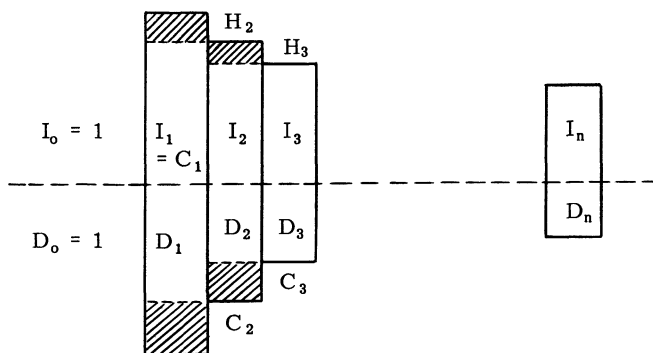


fig. 3.2

Les probabilités I_n et D_n , monotones, décroissantes avec n , peuvent être interprétées de deux manières distinctes selon qu'une suite de n épreuves est ordonnée dans les :

| Probabilités | (1) sens direct | (2) sens inverse |
|---------------------------|---|---|
| I_n | Le système est libre après l'épreuve n <u>non nécessairement pour la 1ère fois</u> | $\sum_n^r y_i \geq \sum z_i$ $\forall r \leq n$ (le joueur A l'emporte constamment sur B) |
| D | $\sum_1^r z_i \geq \sum y_i$ $\forall r \leq n$ (le joueur B l'emporte constamment sur A) | Le système est occupé après l'épreuve n <u>non nécessairement pour la 1ère fois</u> |
| $H_{n+1} = I_n - I_{n+1}$ | $dF_n(> 0)$ | Le joueur B l'emporte sur A <u>pour la 1ère fois</u> après l'épreuve $(n + 1)$ |
| $C_{n+1} = D_n - D_{n+1}$ | Retour du système à l'état libre pour la 1ère fois après $(n + 1)$ ou : le joueur A l'emporte sur B pour la 1ère fois | (transition de 0 à $W > 0$) |

C_{n+1} mesure ainsi la probabilité relative à l'émission à partir de l'instant 0 d'une chaîne complète de n instants "actifs" ou n coups gagnants successifs de B.

Il en résulte que

$$E. M(n) = \sum (i - 1) C_i = \sum D_i$$

tandis que l'E. M. a posteriori (c'est-à-dire à partir du début d'une chaîne (ou d'un 1er coup gagnant) est égale à $\sum D_i/D_1$.

c) Introduisons les F.G. : $I(S)$, $D(S)$, $C(S)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} I_1 &= C_1 \\ I_2 &= C_2 + C_1 I_1 \\ &\dots\dots\dots \\ I_n &= C_n + C_{n-1}I + \dots + C_1 I_{n-1} \end{aligned}$$

La F.G. du premier membre est $I(S) - 1$, celle du second $C(S) I(S)$.

Il en résulte le système de relations suivant :

| | | |
|---------------------------------|----|--------------------------------|
| $I(S) = \frac{1}{1 - C(S)}$ | ou | $C(S) = \frac{I(S) - 1}{I(S)}$ |
| $I(S)D(S) = \frac{1}{1 - s}$ | | |
| $D(S) = \frac{1 - C(S)}{1 - s}$ | | |

d) Dans une partie de $y + Z = n$ coups entre deux joueurs, désignons par $G_{r,n}$ la probabilité que r coups exactement soient marqués par l'avantage du joueur A par exemple :

| | | | |
|----|---------|----------------|----------------|
| Si | $n = 1$ | $G_{11} = I_1$ | $G_{01} = D_1$ |
| | $n = 2$ | $G_{22} = I_2$ | $G_{02} = D_2$ |

et donc $G_{11} = I_1 D_1$

Cette relation est générale, c'est-à-dire que l'on a

| |
|-------------------------|
| $G_{r,n} = I_r D_{n-r}$ |
|-------------------------|

au moins dans le cas où le système à chaque changement de phase** passe par l'état intermédiaire 0 ($y = Z$).

Le résultat de l'épreuve (r coups gagnants pour A exactement) étant un évènement certain, on peut dans ce cas modifier l'ordre de succession des phases et les séparer.

La probabilité cherchée est alors égale au produit de la probabilité de r coups gagnants sur r coups joués par la probabilité de $(n - r)$ coups perdants sur $(n - r)$ coups joués.

 * (traduction de la composition :

$$I_1^{*i} D_1^{i-n} = 1 \quad \forall n$$

** Cette restriction n'est pas nécessaire dans le cas symétrique ($I_n = D_n$) étudié plus loin, ce qui exprime sous une autre forme une propriété démontrée par Sparre Andersen.

En fait les limites d'application de la formule précédente, probablement plus générales, n'ont pu être exactement déterminées dans ce travail.

4/ Comportement à l'infini

Une analyse rigoureuse de ce problème sortant du cadre restreint de ce travail, on se limitera ici aux aspects théoriques essentiels.

a) Cas convergent F.M. $(y - z) = \bar{\varepsilon} > 0$ (ou $\rho < 1$)

On peut montrer que $D_n \rightarrow 0$ et donc que $\sum C_i \rightarrow C(1) = 1$. Le retour du système à l'état 0 constitue un évènement certain.

$$I(S) = \frac{1}{1 - C(S)} \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \sum D_i \text{ converge pour } A \rightarrow 1$$

En vertu d'une propriété classique :

$$I_n \rightarrow \frac{1}{\sum i C_i} = \frac{1}{1 + \sum (i - 1) C_i} = \frac{1}{1 + \sum D_i}$$

Résultat d'ailleurs prévisible.

En effet, la relation de composition $I_1 D_1^{*i+i-n} = 1$ subsiste à l'infini, en sorte que

si $I_n \rightarrow F(0)$, on doit avoir :

$$F(0) + F(0) \sum D_i = 1$$

$$F(0) = \frac{1}{1 + \sum D_i}$$

de la même manière, la relation de définition

$$dF_n(W) = I_1 dD_1^{*i+i-n}(W)$$

tend à la limite vers

$$\begin{aligned} dF(W) &= F(0) dD(W) \\ F(W) &= F(0) D(W) \end{aligned}$$

La connaissance des $dD_n(W)$ est donc suffisante pour déterminer les probabilités limites.

Connaissant $\sum_1^n D_i$ à chaque étape n , on peut en déduire la valeur I , correspondante qui constitue une meilleure approximation de $F(0)$ que $1/(1 + \sum D_i)$.

$F(W)$ doit par ailleurs être neutre vis à vis de la relation de composition avec $(\varepsilon ; p_\varepsilon)$

$$F(W) = F(W') \begin{matrix} *_{W' - \varepsilon = W} \\ p_\varepsilon \end{matrix}$$

(extension à l' ∞ de la relation de récurrence du cas infini)

Ce qui peut s'exprimer en prenant les F.G. des deux membres, par la condition :

$$D(s) = D(s) \left(D_1(s) + I_1 \left(\frac{1}{s} \right) \right)$$

le second membre étant limité aux puissances (+) de s.

Il importe de se rendre compte du mode de convergence des $F_n(W)$ vers sa limite $F^\infty(W)$. Dans les cas d'intérêt pratique où l'histogramme des fréquences p_ϵ est défini entre les bornes $-m$ et $+M$ de ϵ .

La relation de composition vérifiée par $F(W)$ prend deux formes distinctes

$$\text{Si } W \geq M \quad F(W) = \sum_{-m}^{+M} F(W - \epsilon) p_\epsilon \quad (1)$$

$$\text{Si } W < M \quad F(W) = \sum_{-m}^W F(W - \epsilon) p_\epsilon \quad (2)$$

La solution de l'équation aux différences (1) doit satisfaire aux limites (2) en nombre M.

Or (1) admet pour solution la fonction exponentielle comme on s'en assure en effectuant la substitution

$$F(W) = x^W$$

On doit avoir identiquement

$$x^W = \sum_{-m}^{+M} x^{W-\epsilon} p_\epsilon$$

ce qui a lieu si x vérifie l'équation

$$f(x) = \sum_{-m}^{+M} x^{M-\epsilon} - p_\epsilon x^M = 0 \quad (3)$$

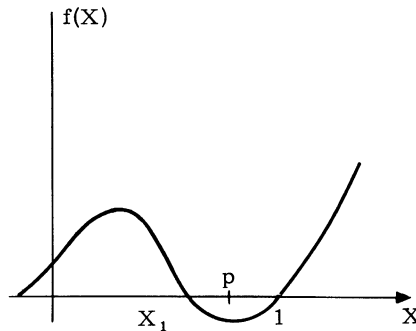


fig. 3.3

Equation polynomiale admettant $m + M$ racines dont $x = 1$. Seules peuvent convenir dans le cas actuel les racines x_i de module au plus égal à l'unité puisque $F(W) \rightarrow 1$ pour k infini

La solution générale de (1) est ainsi définie par :

$$F(W) = 1 - \sum l_i x_i^W$$

les l_i étant déterminés par les conditions aux limites en nombre M . Comme la solution cherchée est unique, on doit s'attendre à ce que l'équation (3) ait exactement M racines de module inférieur à l'unité (ce que confirme la théorie des fonctions analytiques).

On s'assure par ailleurs de l'existence d'une racine réelle (+) puisque

$$f(0) = p_M > 0 \quad f(1) = 0 \quad f'(1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (M - \varepsilon) p - M = - \sum \varepsilon p_\varepsilon > 0$$

(son calcul numérique n'offrira pas de difficultés)

Si M est pair, on doit avoir une autre racine réelle qui ne peut être que (-) et de valeur faible puisque

$$f'(0) = p_{M-1} \\ f''(0) = 2p_{M-2}$$

L'expression de $F(W)$ comporte donc deux éléments :

- 1/ l'un apériodique de tendance $1 - l_1 x_1^W$
- 2/ l'autre constitué par des oscillations périodiques amorties de la forme

$$- \sum l_i^W (\alpha_i \cos W\theta + \beta_i \sin W\theta)$$

auxquelles s'ajoutent les termes comportant des racines (-)

b) Cas divergent $\varepsilon = 0 \quad \rho = 1$

On montre que le retour du système à l'état 0 demeure un évènement certain : $C(1) = 1$

$$I_n \text{ et } D_n > 0$$

mais $\sum I_n$ et $\sum D_n$ augmentent indéfiniment.

L'hypothèse la plus fréquente et intéressante sur laquelle il est utile de s'étendre consiste à supposer identiques les lois de y_i et z_i .

On a dans ce cas $p_\varepsilon = p_{-\varepsilon}$

$$\text{et} \quad dI_n(V) = dD_n(W) \quad \forall n \quad \text{si } V = W$$

Il en résulte que

$$I(s) = D(s) = (1 - s)^{-1/2} \quad \text{et} \quad C(s) = 1 - (1 - s)^{1/2}$$

$$I(s) = D(s) = 1 + \frac{s}{2} + \frac{3s^2}{2^2 2!} + \frac{5 \cdot 3s^3}{2^3 3!} + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3s^4}{2^4 4!} + \dots$$

de termes généraux :

$$I_n = D_n : C_{2n}^n 2^{-2n}$$

$$C_n = \frac{I_n}{n+1} = \left(\frac{2}{n}\right)^{2n+1} C_{2n-2}^{n-1}$$

La propriété la plus intéressante est celle attachée à la fonction $G_{r,n}$ définie

$$dG_{r,n} = I_r D_{n-r} = C_{2r}^r C_{2n-2r}^{n-r} 2^{-2n}$$

L'application de la formule de Stirling conduit à l'expression

$$dG_{rn} \sim \frac{1}{\pi \sqrt{r(n-r)}} = \frac{1}{\pi n \sqrt{t(1-t)}}$$

où l'on a posé $r/n = t$ (fraction de temps où A l'emporte sur B).

$$\frac{dG_{rn}}{1/n} \longrightarrow \frac{1}{\pi \sqrt{t(1-t)}}$$

ce qui conduit à l'expression classique de la F.R. limite $G(t)$

$$G(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin t^{1/2}$$

Rappelons que la loi arc sinus rend compte du phénomène suivant :

Il existe une probabilité a priori élevée pour qu'un joueur donné l'emporte la plupart du temps sur l'autre.

(exemple : 20 % pour une fraction du temps > 90 %)

Cette singularité résulte du fait que l'E. M. de C croît indéfiniment avec n , en d'autres termes qu'il faut souvent un nombre énorme d'épreuves pour changer le signe du résultat.

c) Cas divergent $\varepsilon < 0$ ou $\rho = 1$

Le retour du système à l'état 0 constitue un évènement incertain, en d'autres termes $C(1) < 1$. On tend alors vers une limite finie D nécessairement égale à $1 - C(1)$

et
$$\Sigma I_n \longrightarrow I(1) = \frac{1}{1 - C(1)} = \frac{1}{D_\infty}$$

relation équivalente à celle donnée sous la forme classique

$$C(1) = f = \frac{\Sigma u_n - 1}{u_n}$$

(où u_n a la signification donnée ici à I_n).

L'étude du cas divergent ne diffère pas fondamentalement de celle du cas convergent.

La transposition des I_n et D_n (qui revient, rappelons-le, à considérer les distributions d'entrée conjuguées établit une correspondance duale entre eux :

A toute propriété du cas convergent correspond par dualité une propriété du cas divergent.

Par exemple : la probabilité d'un état 0 à la $n^{\text{ième}}$ épreuve dans le 1er cas est égale dans son dual à la probabilité de l'absence d'état 0 au cours d'une suite quelconque des n épreuves.

III - LE CAS " \mathcal{Q} UNIFORME SUR y "

1/ Supposons que la probabilité d'un impact au point d'abscisse y soit indépendante de y c'est-à-dire soit égale à :

1) à une constante p si les points possibles d'impact forment une suite régulière

2) à λdy dans le cas d'un processus d'arrivée à densité de probabilité constante λ sur y . (Dans l'un et l'autre cas la loi de masse (z, p_z) est quelconque).

Rappelons que l'hypothèse (1) équivaut à admettre une loi d'intervalle géométrique $(y_1, (1-p)p^{y_1})$.

Le passage à la limite (hypothèse 2) conduit à une exponentielle négative $(y_1, \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y_1})$, la loi de fréquence tendant vers une loi de Poisson $(n, e^{-\lambda} \frac{(\lambda y)^n}{n!})$.

Le cas " \mathcal{Q} uniforme sur y " jouit d'une première propriété fondamentale exprimée par le théorème suivant dit "d'inclusion" :

2/ Théorème : dans le cas \mathcal{Q} uniforme

La probabilité d'une distribution de masses $\{z_1\}$ incluse sur y ne dépend que de la masse totale reçue Z suivant la formule

$$dI_y(z) = dH_y(z) \frac{v}{y}$$

où $H_y(z)$ désigne la F.R. de z conditionnelle à y en notant que dans le cas régulier discret y et v désignent le nombre de points d'impact possibles sur y et v en comptant les fermetures droite et gauche.

Cette propriété est immédiate dans le cas d'une masse unique (mesurée dans le cas discret par un nombre entier d'unités d'intervalle).

Appelons A l'évènement : la fermeture à droite de y est couverte par z . Dans l'hypothèse uniforme :

$$\Pr(A) = kZ_1 \quad \forall Z_1 < y$$

A est certain ($\Pr(A) = 1$) si

$$z = y + 1 \quad \text{dans le cas discret} \longrightarrow k = \frac{1}{y + 1}$$

$$Z = y \quad \text{dans le cas continu} \longrightarrow k = \frac{1}{y}$$

Considérons un ensemble de masses Z_1 et désignons par A_1 l'évènement que la fermeture à droite de y soit couverte pour la 1ère fois par la masse z_1 étalée.

Une catégorie d'épreuves étant définie (par exemple on tire au hasard z_1 on l'applique en un point libre au hasard, on l'étale et ainsi de suite), et les A_1 étant incompatibles deux à deux, le résultat global de l'épreuve est défini par

$$A = \sum A_i$$

Le théorème d'addition permet d'écrire $P(A) = kZ$ sous la condition $kZ \leq 1$.

Observons que du fait du mode d'étalement (masses disjointes) et de la proportionnalité de $P(z)$ à z , une distribution étalée réalise indistinctement l'addition des masses et des probabilités correspondantes, les premières constituant une mesure complète des secondes. En d'autres termes il y a identité au sens topologique entre les distributions étalées incluses de masses et la répartition des "masses" de probabilité correspondantes.

On doit également faire remarquer que la transposition au plan du théorème précédent conduit au résultat classique du problème dit de "l'Aiguille de Buffon".

2) Un aspect complémentaire est le suivant.

A toute distribution incluse sur y d'un ensemble de masses réparties en p enchaînements de longueurs respectives $c_1 \dots c_p$, on peut faire correspondre par dualité une distribution de p points C_i sur un segment de longueur $y - z$.

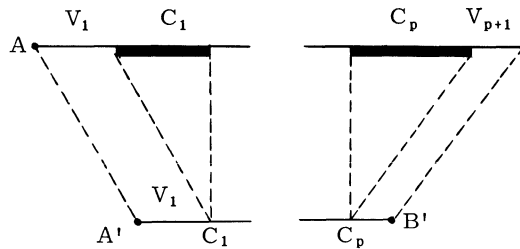


fig. 3.4

les distributions incluses ne différant que par une permutation des C_i s'appliquant à un même ensemble de points sur $A'B'$.

Une distribution incluse $\{c_i\}$ est alors obtenue dans l'hypothèse uniforme actuelle en tirant p points au hasard sur $A'B'$ et en leur substituant une permutation quelconque des C_i .

Toutes les configurations obtenues sont équiprobables. Indiquons incidemment que cette propriété permet de dénombrer à partir des éléments diagonaux $(C_i C_i)^0$ (voir plus loin en 4ème partie) les distributions incluses conditionnelles à une distribution donnée des masses $\{Z_1 \dots Z_n\}$.

Le théorème d'inclusion peut également être démontré par récurrence.

Supposons en effet la formule d'inclusion valable pour n impacts de masse.

Considérons une épreuve élargie à une masse Z_{n+1} ajoutée a priori à $\{z_1 \dots z_n\}$.

L'impact z_{n+1} doit avoir lieu soit en un point C_i affecté à c_i , lequel résulte lui-même initialement d'un tirage "au hasard", soit en un des points libres, constituant a priori un ensemble purement aléatoire sur y (puisque complémentaire d'un ensemble purement aléatoire).

La probabilité a priori d'inclusion de Z_{n+1} est égale dans les deux cas à

$$\frac{(y - \sum z_1) - z_{n+1}}{y - \sum z_1}$$

L'application du théorème de multiplication fournit bien l'expression

$$F_{y,z}(0) = \frac{y-z}{y} = \frac{V}{y}$$

3/ Conséquences du théorème précédent :

On part de la F.R. de $Z : H_y(z)$

$$\begin{aligned} dH_y(Z) &= H(z+0) - H(z-0) \text{ pour les points isolés de masse finie} \\ &= H'(z) dz \text{ pour les autres points} \end{aligned}$$

$F_y(0)$ est alors donnée par l'intégrale (de Stieltjes)

$$I_y = F_y(0) = \frac{1}{y} \int_0^y (y-z) dH_y(z),$$

qu'une intégration par parties ramène à une intégrale ordinaire :

$$I_y = F_y(0) = \frac{1}{y} \int_0^y H_y(z) dz$$

$F_y(0)$ n'est autre que la valeur moyenne de la fonction $H(Z)$ dans l'intervalle y .

4/ Une deuxième propriété des distributions incluses est l'existence d'une loi de composition interne* définie en IIème partie. En effet à toute partition (V_1, V_2) de V s'associent deux composantes incluses dont le point de contact est dans l'hypothèse actuelle, un point régénératif du processus.

5/ L'E.M. de $w : \bar{w}$ relative au cas ergotique peut être obtenue par des calculs simples dont nous rappellerons les principaux résultats :

$$\bar{w} = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \frac{E. M(z_1^2)}{E. M(z_1)} = \frac{b\rho}{2(1-\rho)} \left(1 + \frac{\mu_z}{b^2} \right)$$

où b est la moyenne, ρ_{z_1} la variance de z_1 .

On a en particulier les applications suivantes de cette formule

$$1/ z_1 \text{ constant} \longrightarrow \frac{\bar{w}}{b} = \frac{\rho}{2(1-\rho)}$$

$$2/ z_1 \text{ suit une exponentielle négative } (\mu_{z_1} = b^2) \frac{\bar{w}}{b} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

plus généralement si z_1 suit une loi de χ^2 à k phases

$$\frac{E. M(z_1)^2}{b^2} = \frac{k(k+1)}{k^2} \quad \frac{w}{b} = \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

IV - SYSTEMES SANS DISPOSITIFS D'ATTENTE

Les caractéristiques essentielles d'exploitation de ces systèmes sont les suivantes (exemple du Type II "Service").

a) Taux de perte d'impacts θ

Soit n le nombre d'impacts perdus au cours d'une phase active de loi de probabilité $(z_1, dB(z_1))$

$$dF_z(n) = \int_0^z ([1 - A_1(z - y)] dA_n(y)$$

où $dA_n(y)$ désigne la loi d'intervalle entre un impact et le $n^{\text{ème}}$ suivant (résultat de l'autocomposition d'ordre n de $(y_1, dA_1(y_1))$)

$$dF(n) = \int_0^\infty dF_z(n) dB(z)$$

Si \bar{n} désigne la moyenne de n ainsi obtenue

$$\theta = \frac{\bar{n}}{\bar{n} + 1}$$

b) Taux d'activité ρ :
(proportion des temps "actifs")

$$\rho = \frac{\bar{z}}{(\bar{n} + 1) \bar{y}}$$

Exemple du cas \mathcal{Q} uniforme sur y . (densité de probabilité λ)

$$\theta = \frac{\lambda \bar{z}}{\lambda \bar{z} + 1} \quad \rho = \frac{\bar{z} \lambda}{(\lambda \bar{z} + 1)} = \theta$$

Il y a donc égalité entre taux d'activité et de perte, propriété commune à tous les systèmes satisfaisant à la condition

$$\bar{n} = \bar{z} / \bar{y}$$

c) Si les instants d'observation sont ceux d'arrivée dont le rang n est pris comme argument :

$$dD_1(w_1) = \int_w^\infty dA_1(z - w_1) dB(z)$$

$$dD_n(w) = \int_w^\infty dA_n(z - w_1) dB(z)$$

La convergence vers 0 est rapide du fait que \bar{n} est généralement petit.

Les I_n sont déduits des D_n par

$$I_i \quad D_i^{*i+1} = 1$$

Dans le cas \mathcal{Q} uniforme sur y , le calcul est particulièrement simple puisque l'on a :

$$I_y^v = \sum_n p_n(\lambda v) dB_n(y - v)$$

où $p_n(\lambda v)$ est la loi de Poisson de paramètre (λv)

par ailleurs

$$D_y^1 = dB_1(y + w_1)$$

d) Le calcul de w_2 relatif aux l_n est plus complexe puisqu'il faut connaître pour chaque valeur de n la distribution des impacts perdus.

On peut partir des $p_i = dF(i)$: probabilités de i unités perdues par phase active.

La probabilité de r unités perdues conditionnelle à n est alors égale à :

$$p_n(r) = (n - r)! \sum \prod \left(\frac{p_i}{\alpha_i!} \right)$$

avec $\sum i \alpha_i = r$, $\sum \alpha_i = n - r$.

Si l'on désire connaître la masse perdue, celle-ci est donnée en probabilité par :

$$dF_n(w_2) = \sum_r p_n(r) dB_r(w_2)$$

et dans le cas \mathcal{Q} uniforme sur y

$$dF_{y,z}(w_2) = \sum_r p_r(\lambda z) dB_r(w_2)$$

L'usage des F.G. et du calcul opérationnel facilitera beaucoup les calculs sur lesquels nous ne nous étendrons pas d'avantage.

IV° PARTIE

APPLICATIONS DIVERSES

A - METHODES DE CALCUL DES ELEMENTS

On traitera d'abord ici en détail des méthodes par itération applicables aux cas discrets les plus usuels relevant de l'hypothèse "d uniforme sur y".

1/ Il y a lieu tout d'abord de préciser les conventions, relatives à la topologie des impacts adoptées.

L'hypothèse discrète consiste généralement à considérer comme vides d'impacts les y intervalles élémentaires définis par la suite régulière 0, 1 ... y. Il peut être utile cependant, pour étudier l'évolution d'un processus permanent (impact possible en tout point de y) de fractionner y en une suite d'intervalles réguliers, et d'affecter à chaque impact un "N° de case" c'est-à-dire d'intervalle élémentaire, récepteur sans localisation plus précise.

Pour des raisons de simplicité, on appellera indifféremment "case" un point ou un intervalle récepteurs. Ces deux interprétations ne sont toutefois pas strictement équivalentes dans les dénombrements : un intervalle de longueur y pris avec sa fermeture à droite définit (y + 1) points réguliers. A l'ensemble desquels correspond par dualité un intervalle continu de longueur (y + 1), on est conduit de ce fait à inscrire sur les tableaux de dénombrement, côte à côte deux interprétations notées : [y] et y.

- La 1ère s'appliquera par convention au cas discret de (y + 1) points séparés par y intervalles,

- la 2ème au cas permanent (intervalle continu y)

(on montre facilement l'équivalence des deux définitions : [y] et y + 1).

2/ Nous envisagerons successivement 3 hypothèses de base simple, relatives à la loi de masse ($z_1 p_{z_1}$), de caractéristique commune suivante : les distributions "d" conditionnelles à y et z donnés peuvent être définies de façon à être toutes équiprobables. Il s'ensuit que tous les problèmes peuvent être posés en termes de dénombrement, utilisant les propriétés de structure développées en IIème partie.

a) Cas géométrique

La probabilité a priori de z_1 impacts dans la case i est égale à $(1 - p) p^{z_1}$.

La probabilité relative à une distribution particulière $\{z_1\} i \in 1 \dots y$ de Z impacts dans y cases a donc pour valeur uniforme :

$$(1 - p)^y p^z$$

Rappelons le raisonnement classique permettant de dénombrer les distributions, topologiquement distinctes, possibles.

Figurons chaque impact par la lettre A par exemple les y cases par les intervalles entre $(y + 1)$ barres. Tout arrangement lettres-barres doit commencer et finir par une barre.

Nous avons donc à répartir dans un ordre arbitraire z lettres et $(y - 1)$ barres, le nombre cherché est donc égal à

$$C_{z+y-1}^z = \Gamma_y^z$$

c'est-à-dire au :

Nombre de combinaisons avec répétitions de y objets semblables pris z à z .

$$\text{Il en résulte que } dH_y(z) = \Gamma_y^z (1 - p)^y p^z$$

ou loi de Pascal, résultat de l'autocomposition d'ordre y de la loi géométrique.

La probabilité a posteriori de z_i impacts dans la case i est ainsi égale à

$$\Gamma_{y-1}^{z-z_i} / \Gamma_y^z$$

et la probabilité qu'aucune case ne soit vide

$$P(z_i > 0 \quad \forall i) = C_{z-1}^{y-1} / \Gamma_y^z$$

Il faut en effet qu'au plus une barre apparaisse entre 2 lettres et il y a $(z - 1)$ espaces entre les lettres. On en déduit le nombre de distributions comprenant y cases vides :

$$C_y^y C_{z-1}^{y-y-1}$$

b) Cas binomial

La masse z_i est limitée dans chaque case par une loi binomiale, ce qui équivaut à fractionner chaque intervalle élémentaire en s cases avec la probabilité p d'un impact au plus dans chacune :

$$dH_y(z) = C_{ys}^z p^z (1 - p)^{ys-z}$$

La probabilité de z_i impacts dans une case donnée, conditionnellement à Z , a pour valeur :

$$C_s^{z_i} C_{(y-1)s}^{z-z_i} / C_{ys}^z$$

et la probabilité d'une distribution $\{z_i\}$:

$$\prod C_s^{z_i} / C_{ys}^z$$

on reconnaît dans ces expressions le système de probabilités hypergéométriques.

c) Cas de Poisson

La probabilité d'une masse z_1 dans une case donnée est définie par

$$p_{z_1}(\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{z_1}}{z_1!}$$

d'où :

$$p_{\{z_1\}}(\lambda y) = \frac{e^{-\lambda y} \lambda^z}{\prod z_1!} = p_z(\lambda y) y^{-y} \frac{z!}{\prod z_1!}$$

$$\boxed{dH_y(z) = p_z(\lambda y)}$$

loi de Poisson de paramètre λy .

Les fréquences cherchées correspondent aux coefficients multinomiaux et le calcul des probabilités conditionnelles à z se ramène à des problèmes d'occupation de y cases par z objets distincts.

Nous ferons au sujet des cas précédents une première série d'observations :

1/ L'application du théorème d'inclusion permet le dénombrement immédiat des distributions incluses (la notation (y, z) définira l'ordre de l'ensemble E_{yz})

| | $(y, z)^\circ$ | $C_y = (y, y-1)^\circ$ |
|---------|---------------------------|------------------------------|
| cas a : | $\frac{V}{y} C_{y+z-1}^z$ | $\frac{1}{y} C_{2y-2}^{y-1}$ |
| Cas b : | $\frac{V}{y} C_{ys}^z$ | $\frac{1}{y} C_{ys}^{y-1}$ |
| Cas c : | $V y^{z-1}$ | y^{z-1} |

On constate que seul le cas (a) conduit à des expressions symétriques en y et z . En effet, la bijection entre éléments correspondants des sous-ensembles I et D n'a lieu que dans le cas (a) (pour lequel l'argument z jouit de la même propriété que y : P uniforme à la fois sur y et z).

Il y a égalité des fréquences, mais non des probabilités correspondantes, puisque la probabilité relative à une distribution élémentaire incluse est égale à $(1-p)^y p^z$ tandis que la probabilité de sa conjuguée dense est égale à $(1-p)^z p^y$. Il n'y a égalité en probabilité que si $p = 1/2$, cas s'appliquant au jeu symétrique de "Pile ou Face" déjà rencontré en IIIème partie.

Le cas (a) géométrique a une grande importance du fait qu'il apparaît comme le cas central de la théorie actuelle.

Nous allons procéder à une description détaillée des 3 cas précédents.

3/ Loi de formation des éléments $(y, z)^{\mathbb{W}}$ et $(y, z) < W$

$E_{yz}^{\mathbb{W}}$ peut être décomposé en sous-ensembles caractérisés par un même nombre z_1 d'impacts dans la 1ère case. Sa suppression engendre des sous-ensembles de même ordre : $E_{y-1, z-z_1}^{\mathbb{W}}$ sous réserve que la distribution initiale ne soit pas dense ($z = y + W$) sinon $W > 0$ serait affecté par cette suppression

Inversement et sous la même réserve

$$E_{1, z_1} \times E_{y-1, z-z_1}^{\mathbb{W}} = E_{y, z/z_1}^{\mathbb{W}}$$

(cette égalité ne serait plus vérifiée si l'ensemble $E_{y, z_1}^{\mathbb{W}}$ était assujéti par ailleurs à une limitation du niveau intermédiaire).

Pour W donné, les relations de récurrence suivantes en résultant :

a) cas géométrique :

$$(y, z)^{\mathbb{W}} = (y-1, z)^{\mathbb{W}} + (y-1, z-1)^{\mathbb{W}} + \dots + (y-1, W)^{\mathbb{W}}$$

$$(y, z)^{\mathbb{W}} = (y-1, z)^{\mathbb{W}} + (y, z-1)^{\mathbb{W}}$$

b) cas binomial (s)

$$(yz) = \sum_{i \in 0..s} C_s^i (y-1, z-i)^{\mathbb{W}}$$

dans le cas particulier $s = 1$

$$(yz)^{\mathbb{W}} = (y-1, z)^{\mathbb{W}} + (y-1, z-1)^{\mathbb{W}} \text{ (relation "binomiale")}$$

c) Cas de Poisson

$$(y, z) = \sum_{i \in 0..z-W} C_z^i (y-1, z-i)^{\mathbb{W}}$$

(moment binomial des éléments de la colonne précédente, le premier élément non nul ayant pour rang W).

Remarque

Les relations précédentes sont applicables aux ensembles $E_{y,z}^{<\mathbb{W}}$

Effectuons des décompositions analogues, mais selon le nombre d'impacts dans la dernière case. On obtient les relations suivantes applicables dans tous les cas, y compris le cas "dense".

$$a) (y, z)^{\mathbb{W}} = (y-1, z)^{\mathbb{W}+1} + (y-1, z-1)^{\mathbb{W}} + \dots + (y-1, z-W)^{\circ}$$

$$(y, z)^{\mathbb{W}} = (y-1, z)^{\mathbb{W}+1} + (y, z-1)^{\mathbb{W}-1}$$

$$b) (y, z)^{\mathbb{W}} = \sum_{i \in 0..s} C_s^i (y-1, z-i)^{\mathbb{W}+1-i} + C_s^{\mathbb{W}} (y-1, z-W)^{\circ}$$

(on notera que le dernier terme est nul si $W > s$)

$$c) (y, z)^{\mathbb{W}} = \sum_{i \in 0..W} C_z^i (y-1, z-i)^{\mathbb{W}+1-i} + C_z^{\mathbb{W}} (y-1, z-W)^{\circ}$$

On peut, à partir de ces diverses relations, calculer de proche en proche les éléments cherchés, puisque les éléments initiaux sont les suivants :

| | | | | | | | | |
|--|---|---------------------|---------|---|-------|----------|---|--|
| <u>Eléments $(y, z)^{\leq W}$</u> | | $[y] z \rightarrow$ | 0 | 1 | | W, W + 1 | | |
| $(y, 0)^{\leq W} = 1$ | I | 0 | 1 | 1 | | 1 | 0 | |
| $(a, z)^{\leq W} = 1$ pour $z \leq W$ | | 1 | 1 | | | | 0 | |
| $(y, y + W + 1)^{\leq W} = 0$ | | 2 | 1 | | | | 0 | |
| | | 3 | 1 | | | | | |
| | | . | . | | | | | |
| | | 1 | | | | | | |

| | | | | | | |
|---|----|-------------------|--------------|-------|-------|--|
| <u>Eléments $(y, Z)^{\#}$</u> | | $[y] Z \setminus$ | W | W + 1 | W + 2 | |
| $(y, W)^{\#} = 1$ | II | 0 | 1 | 0 | | |
| $(y, y + W = 1)^{\#} = (y, y + W + 1)^{\leq W}$ | | 1 | 1 (2, W + 1) | | 0 | |
| | | 2 | 1 | | 0 | |

(Les éléments des diagonales W des deux tableaux devant être identiques, il y aura lieu de les déterminer au préalable grâce au tableau I.)

| | | | | | | | | | |
|-------------------------------|-------------------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|
| | $[y] \setminus z$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $(y, z)^{\leq 3} \rightarrow$ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | | | |
| | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 0 | | |
| | 2 | 1 | 3 | 6 | 10 | 14 | 14 | 0 | |
| | 3 | 1 | 4 | 10 | 20 | 34 | 48 | 48 | 0 |
| | 4 | 1 | 5 | 15 | 35 | 69 | 117 | 165 | 165 |
| | 5 | 1 | 6 | 21 | 56 | 125 | 242 | 407 | 572 |

| | | | | | | | | | |
|------------------------|-----------------|---|---|---|---|---|----|-----|-----|
| | $[y] \setminus$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $(y, z)^3 \rightarrow$ | 0 | | | | 1 | 0 | | | |
| | 1 | | | | 1 | 4 | 0 | | |
| | 2 | | | | 1 | 5 | 14 | 0 | |
| | 3 | | | | 1 | 6 | 20 | 48 | 0 |
| | 4 | | | | 1 | 7 | 27 | 75 | 165 |
| | 5 | | | | 1 | 8 | 35 | 110 | 275 |

Il est utile de se faire une idée précise de la structure des éléments $(y, z)^{\#}$ et $(y, z)^{\leq W}$.

Les points-image correspondants dans l'espace (y, z, W) sont "étagés" aux niveaux : 0, 1 ... u ...

Les $(y, z)^{\#}$ s'ordonnent dans la zone angulaire comprise entre les droites $z = W$ et $z = y + W$.

Les $(y, z)^{\leq W}$ s'ordonnent dans la même zone élargie aux "colonnes $z \in 0 \dots W - 1$ ".

Dans les deux cas, les éléments limites sont égaux à 1. Les éléments limites diagonaux aux $(y, y + W)^{\#}$.

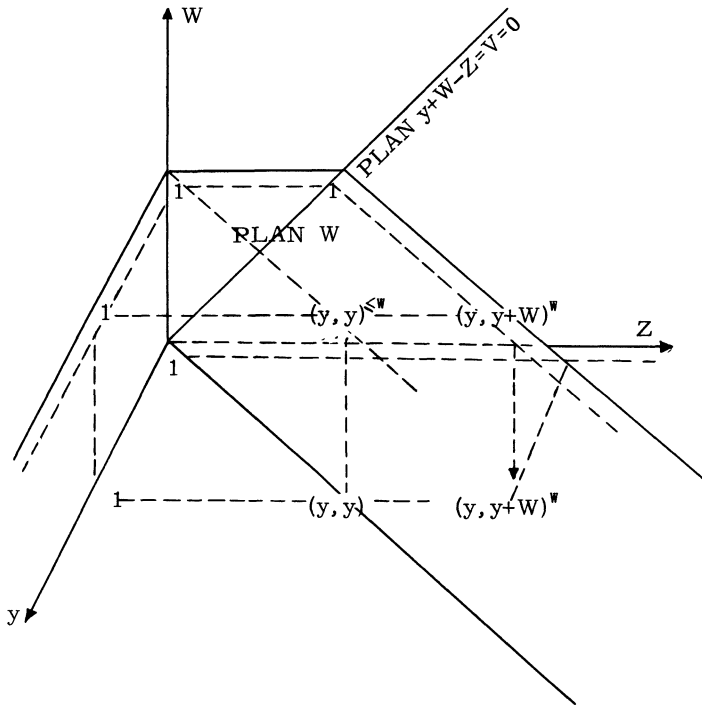
Une même relation permet de déduire les uns des autres, les éléments :

- de même niveau W
- de même plan V défini par $V + z = y + W$.

Le niveau $W = 0$ correspond aux éléments définis sur I
 Le plan limite $V = 0$ " " " " " D

Etant donné le rôle primordial joué par ces 2 sous-ensembles d'éléments, il est commode de les grouper sur un même tableau, ce qui revient à projeter les éléments de D sur le plan $W = 0$ ainsi que le montre le schéma suivant : (Figure 4.1).

EXEMPLE : DISPOSITION DES ELEMENTS $(y, z)^{\leq W}$



Applications aux 3 cas précédents

Les éléments des sous-diagonales dénombrent les distributions du sous-ensemble I, les éléments des sur diagonales, les distributions du sous-ensemble D.

a) Cas d'une distribution de Pascal

| | | Z → | | | | | | | | |
|---|---|-----|---|----|----|-----|-----|-----|------|---|
| y | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 | 35 | |
| 3 | 4 | 1 | 3 | 5 | 14 | 28 | 48 | 75 | 120 | |
| 4 | 5 | 1 | 4 | 9 | 14 | 42 | 90 | 165 | 275 | |
| 5 | 6 | 1 | 5 | 14 | 28 | 42 | 132 | 297 | 572 | |
| 6 | 7 | 1 | 6 | 20 | 48 | 90 | 132 | 429 | 1001 | |
| 7 | 8 | 1 | 7 | 27 | 75 | 165 | 297 | 429 | 429 | |

Sous diagonale K = 4

On constate l'égalité $(y, z) = (z, y)$ résultant de la bijection $I \leftrightarrow D$.

Si l'on se reporte au tableau des éléments E_{yz}^3 donné plus haut à titre d'exemple, on constate que ses éléments sont ceux des sous-diagonales z et suivantes du tableau ci-dessus. Cette identité résulte de la relation démontrée en IIème partie :

$$E_{y,z}^w = I_{y+w, z-w}$$

Il s'ensuit notamment que

$$(y, z)^{<w} = \sum_{i=0}^w (y+i, z-i)^\circ \quad i \in 0 \dots w$$

par exemple

$$117 = (4, 5)^{<3} = 42 + 48 + 27$$

L'expression de E_{yz}^w en fonction de I_{yz} permet incidemment de retrouver les valeurs des éléments $(y, Z)^\circ$.

On peut écrire en effet :

$$(yz) = \sum_{w \in 0..z} (y+w, z-w)^\circ$$

$$(y+1, z-1) = \sum_{w \in 1..z} (y+w, z-w)^\circ$$

d'où

$$(yz) - (y + 1, z - 1) = (y, z)^\circ$$

Finalement $(y, z)^\circ = \Gamma_y^z - \Gamma_{y+1}^{z-1}$

$$(y, z)^\circ = C_{y+z-1}^z - C_{y+z-1}^{z-1} = \frac{V}{y} C_{y+z-1}^z$$

Le tableau d'éléments précédent jouit de nombreuses propriétés opératoires, liées aux structures algébriques mises en évidence en IIème partie.

1/ Relation entre colonnes (outre la relation "lignes")

$$(yz)^\circ = (y, z - 1)^\circ + \dots + (z, z - 1)^\circ \quad (\text{définition } [y])$$

(il faut exclure les éléments de la diagonale principale)

2/ Relation entre sous-diagonales V et sur-diagonales W.

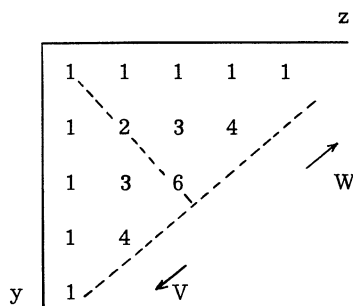
$${}^{*z_1+z_2=z} \{v, z_1\} \{v', z_2\} = (v + v', z)$$

Exemple : $(7, 3) = 75 = 28 \times 1 + 9 \times 2 + 3 \times 5 + 1 \times 14$

La composition étant associative, la sous-diagonale 5 résulte de l'autocomposition d'ordre 4 de la diagonale (1) : {1, 1, 2, 5 ...}.

3/ Secondes diagonales

Il résulte de la formule explicite des éléments (y, Z) que leur tableau n'est autre que le tableau des différences des coefficients binomiaux (triangle de Pascal) disposés comme suit



Observations : L'interprétation formelle de ce tableau conduit à des éléments négatifs au-dessus de la diagonale principale, ce qui est bien conforme aux propriétés algébriques données en IIème partie.

On notera la relation

$$\sum_{i=0}^y (y - i, y + i) = C_{2y}^y \quad i \in 0, \dots, y.$$

par exemple : $1 + 3 + 2 = C_4^2 = 6$

Statistique des états intermédiaires

Les distributions d'état l au point intermédiaire d'abscisse i incluses dans E_y^W vérifient

$$N_{i/y}^{l/<W} = E_i^l \times E_{y-i}^{v \leq l, \leq W},$$

la composition $*i + i' = y$ fournit la fréquence des états l .

Application au cas d'une chaîne complète

$$N_{y,y}^{l/0} = \{D_i\} \{I_i^l\}^{*i+i=y} = (y+l, y-l)$$

(en vertu de la bijection $D_i^l \longleftrightarrow I_{i+l}^l$)

Exemple : les $14 \times 4 = 56$ états intermédiaires des chaînes d'ordre 4 se décomposent en

1 état (4) 7 états (3) 20 états (2) 28 états (1)

(éléments de la 2ème diagonale de rang 4).

Ces résultats permettent notamment un calcul facile des moments de divers ordres des distributions précédentes.

Généralisation du cas (1)

Supposons que le temps de service soit égal à b . La distribution du nombre d'arrivées au cours de b n'est plus géométrique mais devient elle-même une distribution de Pascal : autocomposition d'ordre b de la distribution géométrique.

Les conditions limites pour les éléments de I et D se trouvent modifiées.

Par exemple :

$$I_{y,z} = 0 \quad \text{pour } bz > y$$

Exemple $b = 3$

(Pour plus de commodité, on a adopté la disposition de lignes Z et de colonnes y).

| $z \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | | | | | | | 4 | 9 | 15 | 22 | 30 | 39 |
| 3 | | | | | | | | | | 22 | 52 | 91 |

Si l'unité de longueur est elle-même prise égale à b , on ne retiendra du tableau précédent que les éléments des colonnes $b, 2b \dots$ qui peuvent être déduits directement les uns des autres si l'on remarque que le

nombre de cas possibles d'un impact dans b cases est égal à C_b^1 , de 2 impacts : C_{b+1}^2 , de 3 impacts : C_{b+2}^3 etc ... C'est ainsi que dans l'exemple précédent :

$$91 = 15 C_3^1 + 6 C_4^2 + C_5^3$$

Le tableau triangulaire ainsi obtenu est muni de la même loi de composition interne que dans le cas $b = 1$.

exemple : $39 = 15 + 3 \times 3 + 15$

1/ Cas "binomial" s

L'intervalle y peut recevoir au plus s y impacts, la condition limite est donc la suivante :

$$(y, z)^{z-y} = 0 \quad \text{pour} \quad z > sy$$

Le cas $s = 1$ rappelé pour mémoire correspond aux coefficients binomiaux (triangle de Pascal)

cas $s = 2$

Z \longrightarrow

| [y] | y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|---|---|----|----|--|-----|------|------|------|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | Nota : Eléments "denses dans la zone ombrée | | | | |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 5 | 4 | 1 | | | |
| 2 | 3 | 1 | 4 | 5 | 14 | 14 | 6 | 1 | |
| 3 | 4 | 1 | 6 | 14 | 14 | 42 | 48 | 27 | 8 |
| 4 | 5 | 1 | 8 | 27 | 48 | 42 | 132 | 165 | 110 |
| 5 | 6 | 1 | 10 | 44 | 110 | 165 | 132 | 429 | 572 |
| 6 | 7 | 1 | 12 | 65 | 108 | 429 | 572 | 429 | 1430 |
| 7 | 8 | 1 | 14 | 90 | 350 | 910 | 1638 | 2002 | 1430 |

Exemple de calcul d'éléments :

$$(4, 3) = 48 = 14 + C_2^1 \times 14 + 6$$

$$(2, 3) = 14 = 4 + C_2^1 \times 5$$

On remarque que dans le cas $s = 2$, les éléments des diagonales V sont identiques à ceux des diagonales 2V du cas géométrique.

(Cette propriété n'est pas générale).

Le tableau des éléments de I est muni dans le cas général (s) de la même loi de composition interne que le tableau du cas (1).

Pour développer le tableau (s), on peut également utiliser un mode de construction n'appliquant que la relation simple relative au cas $s = 1$.

Si l'unité de masse est égale à b unités de longueur

$$(y, z)^{\circ} = 0 \quad \text{pour} \quad bz > y.$$

D'où le tableau suivant (pour plus de commodité, on considèrera ici des lignes Z et des colonnes y).

cas $s = 2$

| z \ y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------|---|---|---|---|---|----|---|----|----|----|----|-----|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | | 1 | 3 | 5 | 2 | 5 | 9 | 14 | 20 | 27 | 35 | 44 |
| 3 | | | 1 | 4 | 9 | 14 | 5 | 14 | 28 | 48 | 75 | 110 |

Les éléments d'indice $y = 2$ p doivent être trouvés identiques à ceux du tableau précédent.

cas $s = 3$

| z \ y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | | | | | | | 3 | 7 | 12 | 18 | 25 | 33 |
| 3 | | | | | | | | | | 12 | 30 | 55 |

2/ Distribution de Poisson

| [y] | y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|---|---|---|----|-----|------|-------|-------|--------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 16 | 61 | 206 | 659 | 2052 |
| 3 | 4 | 1 | 3 | 8 | 16 | 125 | 671 | 3130 | 13686 |
| 4 | 5 | 1 | 4 | 15 | 50 | 125 | 1296 | 9031 | 54062 |
| 5 | 6 | 1 | 5 | 24 | 108 | 432 | 1296 | 16807 | 144495 |
| 6 | 7 | 1 | 6 | 35 | 196 | 1029 | 4802 | 16807 | 262144 |
| 7 | 8 | 1 | 7 | 48 | 320 | 2048 | 12288 | 63536 | 262144 |

sur diag
W = 5

sous diag V = 4

Exemples de calcul d'éléments

$$\boxed{671} = C_5^0 206 + C_5^1 61 + C_5^2 16$$

$$\boxed{50} = C_3^0 16 + C_3^1 8 + C_3^2 3 + C_3^3$$

La loi de composition interne des éléments de I doit respecter la condition "d'objets distincts"

$$\text{en } 108 = C_3^0 50 + C_3^1 8 + C_3^2 \times 3 + C_3^3 16$$

(il n'existe pas de loi analogue pour les éléments de D compte tenu de remarques antérieures).

Statistique des états intermédiaires

Reprenons le cas d'une chaîne complète

$$N_{y,y}^{l/0} = \{D_{i,i+l}^{*_{i+i}-y}\} \{I_{i,i-l}\}$$

exemple : les $4 \times 125 = 500$ états intermédiaires d'une chaîne complète d'ordre 4 se décomposent en

$$125 + 16C_4^1 + 3 \times 3C_4^2 + 16C_4^3 = 307 \text{ états } 1$$

$$61 + 7 \times 2C_4^1 + 8C_4^2 = 165 \text{ états } (2)$$

$$15 + 3C_4^1 = 27 \text{ états } (3)$$

$$1 \text{ état } (4)$$

3/ Extension des méthodes précédentes

1er problème : Distributions "semi périodiques" des impacts

Une séquence de s cases ne peut recevoir qu'un impact de masse b au plus, en d'autres termes, tout impact doit être suivi de (s - 1) cases vides au moins.

Faisons l'hypothèse que la lère case puisse recevoir un impact. S'il s'y trouve et qu'on l'en retire, on obtient une distribution de (z - 1) impacts dans (y - s) cases, puisque les cases (2) ... (s - 1) ne peuvent en recevoir.

D'où la loi de récurrence :

$$(yz)^{\leq w} = (y - 1, z)^{\leq w} + (y - s, z - 1)^{\leq w}$$

Exemple

$$s = 3, \text{ unité de masse } b = 5$$

éléments limites du tableau des (y, z)^o :

$$(y, 0) = 1 \quad (yz)^o = 0 \quad \text{pour } bz \geq y$$

(définition : y continue)

(distributions incluses : au-dessus de la ligne brisée, denses : en-dessous)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Z | y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 2 | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 3 | 7 | 12 | 18 | 25 | 33 | 42 | 52 | |
| 3 | | | | | | | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 20 | 25 | 25 | 25 | 12 | 30 | 55 | |

Pour mener commodément les calculs, on peut, soit utiliser une "grille" convenable, soit décaler chaque ligne de (s - 1) unités à gauche par rapport à la précédente pour se ramener au cas binomial simple.

Pour connaître les nombres (y, z) de distributions possibles a priori, on peut construire leur tableau, qui obéit à la même loi de formation mais avec

$$(y, z) = 0 \quad \text{pour} \quad sz \geq y + (s - 1) \text{ ou } : s(z - 1) \geq y - 1$$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|----|
| z | y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 0 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 2 | | | | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 | 78 | 91 | |
| 3 | | | | | | | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 220 | |

On peut aussi procéder à une évaluation directe en raisonnant comme suit :

Chacun des (z - 1) premiers impacts doit être suivi de s "barres", compte tenu des barres extrêmes, il reste

(y + 1) - s(z - 1) - 2 barres et z impacts à disposer en arrangements distincts, il en résulte que (yz) = C_{y+z-sz+s-1}^z.

Une difficulté naît du fait que les distributions correspondantes n'ont pas toutes la même probabilité élémentaire.

Il faut à cet égard effectuer une décomposition selon le rang du dernier impact.

| rang du dernier impact | Elément (y, z) correspondant | Valeur explicite |
|------------------------|------------------------------|--|
| y | (y - s, z - 1) | C _{y+z-sz+(s-2)} ^{z-1} |
| y - 1 | (y - s - 1, z - 1) | C _{y+z-sz+(s-3)} ^{z-1} |
| | | |
| < y - (s - 1) | (y - s + 1, z) | C _{y+z-sz} ^z |

Exemple numérique d'application (b = 5) (on a posé q = 1 - p)

$$F_{(18,3)}(0) = \frac{55}{C_{12}^3 + q C_{12}^2 + q^2 C_{13}^2} = \frac{55}{220 + 66q + 78q^2}$$

(Vérification : l'élément (18, 3) est bien égal à 364 = 220 + 66 + 78)

2ème problème

Dans une distribution binomiale on ne retient comme impacts-masse que les séquences modulo T^* , c'est-à-dire les T suites de points de rangs suivants :

- 1 , $T + 1$, $2T + 1$...
- 2 , $T + 2$, $2T + 2$
- ...
- T , $2T$, $3T$

Raisonnons sur la 1ère suite par exemple : supposons que si la 1ère case ait un impact-masse figurée par une croix x.

Sa suppression laisse subsister une suite T , $2T$, ... dont les $(T - 1)$ premiers impacts figurés par des 0 sont des impacts nuls, c'est-à-dire sans masse.

La relation générale de récurrence subsiste mais dans le cadre de s types de distribution distincts, différenciés par le nombre d'impacts 0 terminaux.

Dans l'hypothèse d'un 1er impact masse par exemple, on aura la définition suivante

$$F_{y,z}^0 = p^{s(z-1)} q^{y-s(z-1)} \left\{ \frac{p}{q} (y, z)_{(1)}^0 + \dots + \left(\frac{p}{q} \right)^s (y, z)_{(s)}^0 \right\}$$

Exemple $T = 2$ $b = 3$

| Distribution des impacts | | y | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|-----------------|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | { x | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | { 0 x | | | | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | |
| 2 | { x 0 x | | | | | | 3 | 9 | 19 | 34 | 55 | 83 | |
| | { 0 x 0 x | | | | | | 3 | 12 | 31 | 65 | 120 | | |
| 3 | { x 0 x 0 x | | | | | | | | 12 | 43 | 108 | | |
| | { 0 x 0 x 0 x | | | | | | | | 12 | 55 | | | |
| 1 | { 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| | { x 0 | | | | 3 | 7 | 12 | 18 | 25 | 33 | 42 | 52 | 63 |
| 2 | { 0 x 0 | | | | 3 | 10 | 22 | 40 | 65 | 98 | 130 | 182 | |
| | { x 0 x 0 | | | | | | 10 | 32 | 72 | 137 | 235 | 365 | |
| 3 | { 0 x 0 x 0 | | | | | | | 10 | 42 | 114 | 251 | 486 | |
| | { x 0 x 0 x 0 | | | | | | | | | 42 | 156 | 407 | |
| 3 | { 0 x 0 x 0 x 0 | | | | | | | | | 42 | 198 | | |

 • A la limite, de telles distributions discrètes conduisent aux distributions exponentielles à T phases ou lois " $E_{T,1}$ " (intervalles entre $T + 1$ arrivées poissonniennes successives).

Si l'unité de longueur est elle-même prise égale à 3 l'utilisation de la relation de récurrence relative au cas $s = 3$ permet d'obtenir des tableaux plus compacts tels que

| Distribution d'impacts | y/b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|------------------------|-----|---|---|----|-----|-----|------------------------------------|
| - | | 1 | 1 | 1 | 1 | ... | |
| x | | | 3 | 6 | 9 | ... | |
| 0 x | | | 3 | 15 | 36 | ... | |
| x 0 x | | | | 19 | 83 | ... | Exemple : |
| 0 x 0 x | | | | 12 | 120 | ... | $83 = 19 + 15 C_3^1 + 6 C_3^2 + 1$ |
| x 0 x 0 x | | | | | 108 | ... | |
| 0 x 0 x 0 x | | | | | 55 | ... | |

3ème problème : service (de durée constante) à s postes

Les relations générales demeurent inchangées.

Considérons par exemple le cas d'arrivées "géométrique", on doit avoir pour $W > 0$

$$\begin{aligned}
 (y, z)^{<W} &= (y-1, z)^{\leq W+s} + (y-1, z-1)^{\leq W+s-1} + \dots + (y-1, z-W+1)^{\leq s+1} \\
 &\quad + (y-1, z-W)^s + \dots (y-1, z-W)^0 \\
 &= (y-1, z)^{<W+s} + (y, z-1)^{<W-1}
 \end{aligned}$$

tandis que pour $W = 0$ $(y, z)^0 = (y-1, z)^{\leq s}$

Le tableau des distributions "denses" (pour lesquelles le débit du système est égal à s aux instants 1, y-1) doit être établi à partir des conditions limites suivantes :

$$(1, z) = 1 \quad (y, z) = 0 \quad \text{pour} \quad z < (y-1)s$$

tandis que le tableau complémentaire des distributions "incluses" est bordé par les éléments limites :

$$(y, 0) = 1 \quad (y, z) = 0 \quad \text{pour} \quad z > (y-1)s$$

Les éléments $((y-1)s, z)$ sont communs, ils sont "encadrés" dans le tableau ci-après donné à titre d'exemple.

En vertu de la loi de formation établie plus haut les $(y, z)^W$ sont les éléments de la sous-diagonale W modulo s, c'est-à-dire =

$$(W, 1) \quad (W+s, 2) \quad \dots$$

éléments munis de la même loi de composition que dans le cas $s = 1$

$$(\text{ex. } 91 = 52 + 9 + 2 \times 4 + 22)$$

Application au cas $s = 3$

(il est plus commode d'utiliser des colonnes y et des lignes z)

| $z \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------|---|----|----|-----|-----|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 3 | 6 | 10 |
| 3 | 1 | 1 | 4 | 10 | 20 |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 14 | 34 |
| 5 | 1 | 3 | 4 | 18 | 52 |
| 6 | 1 | 4 | 4 | 22 | 74 |
| 7 | 1 | 5 | 9 | 22 | 96 |
| 8 | 1 | 6 | 15 | 22 | 118 |
| 9 | 1 | 7 | 22 | 22 | 140 |
| 10 | 1 | 8 | 30 | 52 | 140 |
| 11 | 1 | 9 | 39 | 91 | 140 |
| 12 | 1 | 10 | 49 | 140 | 140 |
| 13 | 1 | 11 | 60 | 200 | 340 |

Ces éléments servent à la détermination des $(y, z)^w$ et $(y, z)^{<w}$ selon les mêmes techniques que celles exposées plus haut

Exemple déduit du cas $s = 3$

| Eléments $(y, z)^2$ | | | | | | Eléments $(y, Z)^{<2}$ | | | | | |
|---------------------|---|---|----|----|-----|------------------------|---|---|----|----|-----|
| $z \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $z \backslash y$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | - | - | - | - | - | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | - | - | - | - | - | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| 3 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | | 3 | 9 | 19 | 34 |
| 4 | | 1 | 3 | 6 | 10 | 4 | | 3 | 12 | 31 | 65 |
| 5 | | 3 | 6 | 12 | 22 | 5 | | 3 | 15 | 46 | 111 |
| 6 | | | 6 | 18 | 40 | 6 | | | 15 | 61 | 172 |
| 7 | | | 6 | 24 | 64 | 7 | | | 15 | 76 | 248 |
| 8 | | | 15 | 39 | 103 | 8 | | | 15 | 91 | 339 |
| 9 | | | | 39 | 142 | 9 | | | | 91 | 430 |
| 10 | | | | 39 | 181 | 10 | | | | 91 | 521 |
| 11 | | | | 91 | 272 | 11 | | | | 91 | 612 |

5/ Limitation des états intermédiaires

L'exemple le plus typique est fourni par le problème "la ruine du joueur".

Soit V l'avoir initial de A et W celui de B .

Le jeu se poursuit tant que $-V < y - z < W$. Il s'arrête dès que l'une ou l'autre de ces limites est atteinte.

(z = coups perdants pour A)

Le cas le plus intéressant en pratique est celui où $V = W$

Exemple : $V = W = 4$

| z \ y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | | | |
| 2 | 1 | 3 | 6 | 10 | 14 | 14 | 14 | | |
| 3 | 1 | 4 | 10 | 20 | 34 | 48 | 48 | 48 | |
| 4 | 1 | 4 | 14 | 34 | 68 | 116 | 164 | | (-3) |
| 5 | | 4 | 14 | 48 | 116 | 232 | 396 | | (-2) |
| 6 | | | 14 | 48 | 164 | 396 | 792 | | (-1) |
| 7 | | | | 48 | | | | | |
| 8 | | | | | (3) | (2) | (1) | (0) | |

Etats intermédiaires

L'identité des éléments des 2 dernières sous-diagonales et sur diagonales est la conséquence du fait que les états + 2 et + 3 par exemple résultent du même ensemble d'états antérieurs 3, 2, 1.

Cette technique de calcul est très souple : si par exemple, en cours de partie, les deux joueurs décident d'accroître leur avoir initial ou de se faire crédit jusqu'à concurrence d'un montant donné, il suffit de modifier les limites en conséquence à partir de valeurs définies de y , z ou $y + z$.

Les éléments en bordure correspondent aux valeurs extrêmes d'absorption (+ 4) et (- 4), c'est-à-dire aux distributions dont l'état atteint ces valeurs pour la 1ère fois.

Cherchons à déterminer par exemple les distributions denses du cas 1 (Pascal) satisfaisant à la condition $l \leq 4$.

On aura le tableau suivant établi à partir de la 4ème colonne Z (les 4 premières colonnes sont identiques à celles du tableau de base des D_{yz}).

| [y] | z | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|-----|---|----|----|-----|-----|------|------|-------------|
| 0 | | 1 | | | | | | |
| 1 | | 4 | 4 | | | | | |
| 2 | | 9 | 13 | 13 | | | | |
| 3 | | 14 | 27 | 40 | 40 | | | Etats in- |
| 4 | | 14 | 41 | 81 | 121 | 121 | | termé- |
| 5 | | | 41 | 122 | 243 | 364 | 364 | diaires (l) |
| 6 | | | | 122 | 365 | 729 | 1093 | (4) |
| 7 | | | | | 365 | 1094 | 2187 | (3) |
| 8 | | | | | | 1094 | 3281 | (2) |
| 9 | | | | | | | 3281 | (1) |
| | | | | | | | | (0) |

A partir de tableaux analogues établis pour les valeurs 1, 2 ... m de Sup l, on peut dresser le tableau des distributions (y, y+m)^m c'est-à-dire atteignant la valeur m pour la l^{ère} fois en y.

En effectuant une composition telle que

$$(i, i+m)^{\bar{m}} (\bar{i}, \bar{i} + W - m)^{\ll W} \quad (\text{avec } : W < m)$$

On peut alors dénombrer les distributions dont l'état intermédiaire l atteint au moins m.

(On a indiqué précédemment comment pouvait être établie la statistique des états intermédiaires l dans une distribution quelconque (y, Z).

6/ Minima intermédiaires

On peut développer une méthode générale de dénombrement des distributions classées suivant leurs minima intermédiaires m. Le résultat le plus remarquable est le suivant :

Considérons les chaînes (y y)^o relatives au cas géométrique. L'élément de la ligne (y - 1 - m) et de diagonale f dénombre les distributions ayant f minima de niveau m.

Par exemple les 42 distributions (5,5)^o se décomposent en 28 de minimum 0

dont 14 avec la fréquence 1

9 " " " 2

etc.

9 de minimum 1, dont 5 avec la fréquence 1.

1/ Observations sur le calcul des probabilités d'inclusion dans le cas 'ℱ uniforme sur y'.

a) Supposons la durée de sortie égale à une constante b.

Soit n défini par $nb \leq y < (n+1)b$

$$F_y(0) = \sum_0^n P_j(\lambda y) \left(\frac{y-j}{y} \right) = \mathfrak{F}_n(\lambda y) - \lambda \mathfrak{F}_{(n-1)}(\lambda y)$$

où $\mathfrak{F}_n(\lambda y)$ désigne la F.R. de la loi de Poisson.

b) Loi de masse quelconque

Considérons le cas courant d'une distribution "polygonale" de masse, telle qu'elle résulte d'un échantillon de mesures.

Une première méthode consiste à chercher toutes les partitions de z par rapport à l'ensemble des valeurs possibles de la masse ponctuelle et à sommer les probabilités correspondantes :

$$dH_y(z) = e^{-\lambda y} \sum (\lambda y)^n \prod \frac{(p_\alpha)^{r_\alpha}}{r_\alpha!}$$

où les r_α sont les solutions entières (+) de

$$\sum \alpha r_\alpha = z \quad \sum r_\alpha = n$$

Exemple : 3 masses possibles 4, 7, 9

$$dH_y(28) = e^{-\lambda y} \left\{ (\lambda y)^4 \frac{p_7^4}{4!} + (\lambda y)^5 \frac{p_9 p_7 p_4^3}{3!} + (\lambda y)^7 \frac{p_4^7}{7!} \right\}$$

On peut aussi effectuer le calcul des $dH_y(Z)$ pour de petites valeurs de z et procéder ensuite par composition, par exemple si $t = 30$.

On calculera successivement $dH_3(z)$, $dH_6(z)$, $dH_{12}(z)$, $dH_{18}(z)$, $dH_{30}(z)$.

Une 3ème méthode consistera à utiliser la F.G. de la distribution de z.

$$G_y(s) = e^{-\lambda y + \lambda f(s)}$$

où $f(s)$ est la F.G. de la distribution de la masse ponctuelle.

La formule donnant $F_y(0)$, appliquée au cas où la distribution de la masse ponctuelle est une exponentielle négative : $dB(z) = e^{-\mu z} dz$, aboutit (au prix de calculs élémentaires non reproduits ici, donnés dans le N° 20 de la revue Française de Recherche Opérationnelle) au résultat suivant :

$$F(0) = e^{-(\lambda + \mu)y} \left\{ B_0(2\sqrt{\lambda\mu y}) + \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} B_1(2\sqrt{\lambda\mu y}) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_2^\infty \left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right)^n B_n(2\sqrt{\lambda\mu y}) \right\}$$

où B_n désigne la fonction de Bessel modifiée de 1ère espèce à argument

imaginaire. La complication rapidement croissante des calculs relatifs aux cas précédents incite à rechercher des expressions asymptotiques pour $F_y(0)$.

L'étude de ce problème (abordé également dans la note citée ci-dessus en référence) conduit à l'expression :

$$F_y(0) \sim (1 - \rho) \left[\Pi(\theta_z) + \frac{f(\theta_z)}{\theta_z} \right] \quad \text{si } \rho < 1$$

où θ_z est la variable réduite $\theta_z = \frac{z - E.M.(z)}{\sigma_z}$, $f(\theta_z)$ est l'ordonnée de la loi normale, $\Pi(\theta_z)$ sa F.R. Si $\rho > 1$ (divergence du processus), la même formule s'applique au prix d'une légère adaptation (cf. N° 20 revue R.O). L'usage de développements limités permet d'améliorer la précision des calculs.

2/ Formules explicites des $F_{y,z}(k)$

a) Distribution de Pascal

Nous avons vu que l'on pouvait écrire

$$(yz)^{\leq W} = \Gamma_y^z - \Gamma_{y+W+1}^{z-W-1} = C_{y+z-1}^z - C_{y+z-1}^{z-W-1}$$

Il en résulte que

$$F_{y,z}(> W) = \frac{C_{y+z-1}^{z-W-1}}{C_{y+z-1}^z} = \frac{z(z-1) \dots (z-W)}{y(y+1) \dots (y+W)}$$

Expression d'une remarquable simplicité en particulier à la limite

$$F_y(> W) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \rho^{W+1}$$

b) Distribution binomiale

La définition de $E_{yz}^{\leq W}$ donnée en IIème partie fournit l'expression suivante

$$F(W) = \sum_{i \leq W} (-1)^i \frac{V}{y+W-i} \frac{C_{(W-1)s}^i C_{(y+W-1)s}^{z-i}}{C_{ys}^z}$$

L'expression de $F(W)$ est donc liée au système de probabilités hypergéométriques.

On montre facilement que

$$F(W) \longrightarrow (1 - \rho) \sum_{i \leq W} C_{(W-1)s}^i e^{\rho(W-i)} \left(\frac{-\rho}{s-\rho} \right)^i$$

si s augmente indéfiniment $(-s)^{-i} C_{(W-1)s}^i \longrightarrow \frac{(i-W)!}{i!}$ et il en résulte que

$$F(W) \longrightarrow (1 - \rho) \sum_{i \leq W} \frac{[\rho(i-W)]^i}{i!} e^{\rho(W-i)}$$

expression identique à celle, classique, relative à des arrivées suivant un processus de Poisson simple

c) Distribution de Poisson

La définition "intersection" de $E_{yz}^{\leq W}$ donnée en IIème partie permet d'écrire

$$E_{yz}^{\leq W} = \sum_{i \leq W} (i - W)^i C_z^i I_{z-i, y+W-i}$$

Explicitant les I et introduisant $y + W - z = V$

$$E_{yz}^{\leq W} = V \sum_{i \leq W} C_z^i (i - W)^i (y + w - i)^{z-i-1}$$

finalemt

$$F_{y,z}(W) = \frac{E_{yz}^{\leq W}}{E_{yz}} = \frac{V}{y} \sum_{i \leq W} C_z^i \left(\frac{i - W}{y}\right)^i \left(1 + \frac{W - i}{y}\right)^{z-i-1}$$

Remarque : Si l'on fait $W = z$, on obtient l'identité remarquable :

$$1 = \sum_{i \leq W} C_z^i \left(\frac{i - z}{y}\right)^i \left(1 + \frac{z - i}{y}\right)^{z-i-1}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$1 = \sum_{i \leq z} C_z^i \left(\frac{-i}{y}\right)^{z-i} \left(1 + \frac{i}{y}\right)^{i-1}$$

Expression limite pour : $y, z \rightarrow \infty$ et $\frac{W}{y} \rightarrow 1 - \rho$

$$C_z^i \rightarrow \frac{z^i}{i!}, \left(1 + \frac{W - i}{y}\right)^{z-i-1} \rightarrow e^{\frac{W-i}{y} (z-i-1)} \rightarrow e^{\rho(W-i)}$$

en sorte que

$$F_{\infty}(W) \rightarrow (1 - \rho) \sum_{i \leq W} \frac{[\rho(i - W)]^i}{i!} e^{\rho(W-i)}$$

résultat classique.

Remarque : Si $W \rightarrow \infty$, $F_{\infty}(W) \rightarrow 1$, l'identité de Jensen ainsi obtenue apparaît comme le cas limite à l'infini de l'identité plus générale établie plus haut.

d) Généralisation

Considérons le cas plus général d'une distribution (α, p_{α}) de la masse impact.

Une partition de z peut être définie par un ensemble d'entiers $\{\alpha_{\alpha}\}$ de somme n vérifiant

$$\sum \alpha_{\alpha} = z \tag{1}$$

Une "sous partition" d'un tel ensemble de somme $W - i \leq z$ sera définie par un ensemble d'entiers $\{r_\alpha \leq n_\alpha\}$ de somme r vérifiant

$$\sum \alpha r_\alpha = W - i \quad (2)$$

r_α impacts de masses α sur $(W - i)$ peuvent être pris de $C_{n_\alpha}^{r_\alpha}$ façons distinctes en sorte que l'on peut écrire :

$$\bar{F}_{\{n_\alpha\}}(W) = \sum_{i \leq W} \sum_r \left(\frac{-i}{y}\right)^r \left(1 + \frac{i}{y}\right)^{n-r} \frac{V}{y+i} \sum_{\{r_\alpha\}} C_{n_\alpha}^{r_\alpha} C_{n_\beta}^{r_\beta} \dots$$

Cette expression n'est utilisable en pratique que dans le cas d'un très petit nombre de solutions de (1) et (2).

Recherchons l'expression limite pour $y \rightarrow \infty$

$$y^{-r} \prod C_{n_\alpha}^{r_\alpha} \rightarrow \prod \frac{(n_\alpha/y)^{r_\alpha}}{r_\alpha!} \rightarrow \lambda^r \prod \frac{(\rho_\alpha)^{r_\alpha}}{r_\alpha!}$$

$$\left(\frac{y+i}{y}\right)^{n-r} \rightarrow e^{\lambda i}, \quad \frac{V}{y+i} \rightarrow 1 - \rho$$

Finalement :

$$F_\infty(W) = (1 - \rho) \sum_{i \leq W} (-\lambda i)^r e^{\lambda i} \prod \frac{(\rho_\alpha)^{r_\alpha}}{r_\alpha!}$$

On en déduit facilement l'expression générale de $F_\infty(W)$, dans l'hypothèse la plus générale d'une loi (α_ρ) , discrète, continue ou mixte.

Considérons les F.R. : $F_1(z)$, $F_r(z)$ probabilités conditionnelles à r impacts d'une masse $\leq Z$.

$$F_\infty(W) = (1 - \rho) \sum_{i \leq W} \int \frac{(-\lambda i)^r}{r!} e^{\lambda i} dF_r(W - i)$$

On vérifie facilement que cette expression couvre bien le cas "constant".

En effet

$$\text{si } \alpha = C^{te} \quad F_r(W - i) = 0 \quad \text{pour } i \neq W - r$$

$$= 1 \quad \text{pour } i = W - r$$

L'utilisation de cette formule est grandement facilitée par l'emploi de tables de $\frac{m^r}{r!} e^m$.

e) Méthode "Matricielle"

Nous ne rappellerons pas les formules classiques basées sur l'emploi de la matrice "de passage" ou de transition.

L'analyse faite en IIème partie, qui peut être d'ailleurs considérablement développée met à la disposition de l'utilisateur un ensemble de formules dont la plus intéressante semble être la suivante :

$$\|F_y(0) \dots F_y(W)\| = \|I_y \dots I_{y+W}\| \begin{vmatrix} I_0^0 & I_1^0 & \dots & I_k^0 \\ I_1^1 & \dots & I_k^1 & \\ \dots & & & \\ \dots & & & I_W^W \end{vmatrix}^{-1}$$

Si $y \rightarrow \infty$, $I_y \dots I_{y+W} \rightarrow (1 - \rho)$

Si $\rho < 1$, le calcul des $F(W)$ se ramène à l'inversion d'une matrice carrée d'éléments I obtenus au moyen du théorème d'inclusion dans le cas \mathcal{Q} uniforme sur y .

Il est naturellement nécessaire à l'application de la formule précédente que la fermeture à droite de y soit un point régénératif.

La méthode précédente semble particulièrement bien adaptée aux calculs effectués sur ordinateurs.

3/ Limitation des niveaux intermédiaires

On a vu que cette condition intervient plus particulièrement dans le problème dit de la "ruine du joueur" qui va être abordé ici plus en détail.

Soit W l'avoir initial de B .

Une partie de $y + z = n$ coups se terminant sur la ruine de B , est représentée par une distribution dense (de chronologie inverse notée \leftarrow)

$$\overleftarrow{([y], z - 1)}$$

d'état intermédiaire $< m - 1$.

Rappelons d'abord pour mémoire, la forme classique du résultat relatif à l'absence de limite intermédiaire (joueur A "infiniment riche").

$$([y], z - 1) = ([z - 1], y) = (z, y) = \frac{W}{z} \Gamma_z^y = \frac{W}{z} C_{y+z-1}^y = \frac{W}{y+z} C_{y+z}^y$$

$$\text{Prob}\{\text{ruine de } A\} = \frac{W}{n} C_n^{\frac{n-W}{2}} q^{\frac{n+W}{2}} p^{\frac{n-W}{2}}$$

Introduisons maintenant la condition $l < m - 1$.

Plusieurs voies de recherche sont possibles pour obtenir des dénombrements explicites dans ce cas.

La méthode plus simple utilisée mais non reproduite ici consiste, à partir du tableau de construction des éléments, à étudier comment l'introduction d'une "diagonale d'absorption" modifie le calcul des éléments du tableau de base.

Une deuxième méthode d'application plus difficile consisterait à utiliser la définition "intersection" suivante :

$$(D_{y,z-1}^{l < m-1}) = (D_{y,z-1}) \cap E_{y,z-1}^{\leftarrow W < m-1}$$

On se contentera ici d'indiquer les résultats d'une remarquable simplicité obtenus par la première méthode appliquée au cas (a) (jeu de "pile ou face")

$$(y, z - 1) = \sum_{r \geq 0}^{l < m-1} \{(y - rm, z - 1 + rm) - (y - V - rm, z - 1 + V + rm)\}$$

Il suffit donc de compter sur la deuxième sous diagonale de l'élément $([y], z - 1)$:

en (+) : l'élément $([y], z - 1)$ et les suivants d'ordre m

en (-) : l'élément $([y - V], z - 1 + V)$ " " "

Exemple : $V = W = 3$, $n = 15$

$$\longrightarrow y = 6 \quad z = 9$$

(Les distributions denses correspondantes, caractérisées par un état final égal à $3 - 1 = 2$, et un état intermédiaire ≤ 4 , ont été dénombrées plus haut par la méthode d'itération)

$$\begin{aligned} (6, 8) &= (6, 8) + (0, 14) - (3, 11) \\ &= 1001 + 1 - 273 = 729. \end{aligned}$$

(résultat conforme à celui trouvé par itération).

En l'absence du tableau des éléments (y, z) on utilisera une définition explicite de ces derniers aboutissant à l'expression suivante :

$$p\{\text{ruine B}\} = \frac{p^y q^z}{n} \sum_{r \geq 0} \{(W + 2rm) C_n^{y-rm} - (W + 2rm + 2V) C_n^{y-rm-V}\}$$

où V, W, n ont la signification précédente.

Cette expression, est de calcul plus simple et rapide que celle classique, remontant à Lagrange et exposée par exemple dans le Tome I (pages 291, 292) du traité de probabilités de Feller.

Des expressions asymptotiques non reproduites ici peuvent être dérivées de la formule précédente.