

G. PILÉ

Esquisse d'une théorie générale des systèmes entrée-sortie (hypothèse de conservation des flux)

Revue de statistique appliquée, tome 15, n° 3 (1967), p. 51-80

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1967__15_3_51_0

© Société française de statistique, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESQUISSE D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES ENTRÉE-SORTIE (HYPOTHÈSE DE CONSERVATION DES FLUX)

G. PILÉ

Ancien Élève de l'École Polytechnique

INTRODUCTION

Une classe très générale de processus stochastiques ou séquentiels est réductible au cadre suivant :

Un "système entrées-sorties" est alimenté par des "flux" de nature quelconque, vis-à-vis desquels il exerce un rôle de régulation et d'échange suivant des modalités opératoires définies.

C'est à l'étude de tels systèmes qu'est consacrée la présente analyse divisée en 4 parties (1), les 3 premières consacrées aux structures, la quatrième à des exemples d'application.

Tout système Entrées-Sorties résulte de la superposition des trois structures suivantes:

I - UN ENSEMBLE OPERATIONNEL \mathcal{E} d'entrées et de sorties dont les états "ouvert" et "fermé" sont décrits par des variables Booléennes. L'application d'un ensemble de variables de décision dans l'ensemble \mathcal{E} des états logiques possibles, régit de façon précise le fonctionnement du système et préside à l'évolution du processus.

Cette approche initiale, d'application très générale, fournit un cadre directeur commode pour identifier les cas concrets extrêmement divers rencontrés et mettre en lumière ce qui les unit et les distingue. Elle constitue par ailleurs, une introduction naturelle à l'application des méthodes de simulation.

II - UN ENSEMBLE α DE VARIABLES de mesure des flux d'entrée et de sortie ainsi que de contenu du système (variables "d'état" ou "d'écart") en évolution compatible avec deux hypothèses de base :

a) Conservation des flux.

b) Composition de flux de sortie invariable pendant la durée d'observation du processus.

(1) La troisième et la quatrième partie seront publiées dans le prochain numéro de la Revue.

Une attention spéciale est portée au cas 2/1 (deux flux d'entrée, un de sortie) en raison de l'importance et de la diversité de ses applications ; il comporte plusieurs variantes de fonctionnement liées les unes aux autres par des propriétés de dualité permettant, par la suite, de concentrer l'étude sur un très petit nombre de cas de base.

III - L'APPLICATION D'UNE PROBABILITE \mathcal{Q} dans l'algèbre précédente place les systèmes étudiés dans leur contexte aléatoire.

Ce troisième constituant \mathcal{Q} est ici défini dans le cadre de la théorie classique des événements récurrents, laquelle rend compte aisément des propriétés essentielles des systèmes.

Tel est l'objet de la IIIème partie où l'on s'est efforcé de préciser de façon aussi simple que possible :

- les structures de \mathcal{A} subsistant en probabilité.
- les liens unissant les propriétés finies (régime transitoire du système) et les propriétés à l'infini, à la fois dans le cas stationnaire et dans le cas divergent. Le théorème du cas limite central (loi "arc sinus") y apparaît incidemment comme une application particulière de la présente théorie.
- une méthode de résolution pratique du cas transitoire 2/1 (lois d'intervalle et de masse quelconques).

IV - Il est montré en IVème partie que la connaissance précise des propriétés du triplet (\mathcal{P} , \mathcal{A} , \mathcal{Q}) met à la disposition de la recherche appliquée un ensemble cohérent de méthodes de résolution : méthodes par itération, formules explicites, calcul matriciel.

En dépit de leur intérêt, les méthodes utilisant le calcul symbolique n'ont pas été décrites. Ces dernières devraient en effet être revues dans le cadre de la théorie des distributions en son état actuel et nécessiteraient une étude particulière à entreprendre.

Il importe de préciser les objectifs poursuivis dans ce travail.

Parmi les domaines les plus vivants de la Recherche fondamentale, susceptibles de fournir de nouveaux apports au présent sujet, on peut citer plus particulièrement :

1/ La théorie des processus évolutifs en général (VÖGEL) et plus spécialement des chaînes de MARKOV (CHILOV et divers auteurs).

2/ La théorie des graphes en plein essor, plus spécialement aux U.S.A., mais également en FRANCE (BERGE, BARBUT, ...).

3/ La théorie des Distributions (de SCHWARTZ), laquelle se révèle de plus en plus comme un outil de calcul très efficace dans les domaines d'application les plus variés.

Or, l'assimilation de ces travaux par la recherche appliquée ne saurait être rapide quand on prend conscience de tous les éléments retardateurs qui interviennent.

Il est de moins en moins fréquent en premier lieu, que les mêmes auteurs s'appliquent à la fois à la recherche fondamentale et à la recherche appliquée. Les praticiens de la seconde préfèrent en général utiliser les outils qu'ils ont en mains, plutôt que de se livrer à une analyse systématique des apports nouveaux. On ne saurait les en blâmer quand on sait la somme de temps et d'esprit d'adaptation que cette tâche exige.

Les exposés didactiques, eux-mêmes, hésitent, non sans raisons d'ailleurs, à reconsidérer des modes d'exposé patiemment mis au point et ayant rendu de grands services.

Il est par exemple peu contestable que, parallèlement à la recherche fondamentale, les analyses les plus complètes (Morse, Kaufmann, Legall, ...) consacrées depuis une quinzaine d'années aux applications de la théorie des processus stochastiques, à ce que l'on a proposé d'appeler la "théorie du temps perdu" se réfèrent à une optique traditionnelle de ces problèmes.

Cependant, quels que soient les services rendus par la théorie classique en cette matière, celle-ci n'en est pas moins assujettie à de trop strictes limitations.

- L'emploi d'opérateurs infinitésimaux, s'il met clairement en lumière les propriétés analytiques des systèmes (liés à la solution d'équations différentielles ou aux différences finies bien identifiées), n'apporte réellement de solution pratique que dans le cas ergodique, au demeurant essentiel mais insuffisant, non seulement dans de nombreuses applications mais aussi pour développer une méthode de traitement numérique suffisamment générale et souple.

En effet, les propriétés algébriques essentielles, génératrices d'unité de la famille des systèmes considérés ne sont clairement mises en évidence que dans l'étude du cas transitoire.

- Les exposés classiques négligent les simplifications considérables qu'apporte la séparation de toute distribution en deux composantes nommées ici "incluse" et "dense", qui semble pourtant devoir être à la base de toute théorie générale.

- Il devrait surtout être possible de ne plus consacrer des exposés autonomes à des sujets aussi apparentés les uns aux autres que l'analyse séquentielle, la "marche au hasard", les théories attente-stock, la théorie classique de la diffusion, certains jeux dichotomiques, etc...

Ces divers problèmes attendent d'être exposés au sein d'une théorie suffisamment générale, susceptible de les assimiler et de conduire aux méthodes de résolution les mieux adaptées à chaque cas.

Le besoin d'une synthèse ne saurait être mis en doute quand on prend conscience de l'"incredibly voluminous literature devoted to a variety of problems connected with servers, storage facilities, waiting times, etc... the abundance of small variants obscures the view, so that it is difficult to see the forest for the trees. The power of new and general methods is still underrated..."(1).

Ces convictions, pleinement partagées, ont encouragé la présente tentative de synthèse, basée sur le concept de systèmes "entrée-sortie",

(1) FELLER - Tome II, page 193 de son "Introduction".

cadre particulièrement intuitif et bien adapté à l'étude des systèmes évolutifs, dans un immense domaine d'applications courantes.

En son état actuel, le présent travail ne saurait être considéré que comme une ébauche, requérant des formulations plus concises et rigoureuses, ainsi que des explorations plus approfondies de sa valeur d'application.

Il y aurait lieu, par exemple, de développer des méthodes générales de résolution numérique pour les cas suivants :

- Systèmes stock ou attente, sans dispositif d'attente de la demande (dont la théorie a été seulement esquissée).
- Montage en parallèle de systèmes 2/1.
- Montage en série de systèmes 2/1.

Devraient être précisées davantage des transpositions à effectuer pour appliquer la théorie actuelle à celles :

- des test séquentiels ;
- de la "marche au hasard" ;
- de la diffusion ;
- des treillis modulaires ;
- de la programmation dynamique .

On peut souhaiter que ce travail attire l'attention sur l'importance des recherches à poursuivre dans un domaine où il reste beaucoup plus à faire qu'on ne l'admet généralement.

IÈRE PARTIE

LOGIQUE DES SYSTEMES ENTREE-SORTIE

I - GENERALITES ET PRINCIPES

1/ Considérons tout d'abord le cas élémentaire 1/1 (un flux d'entrée, un flux de sortie)

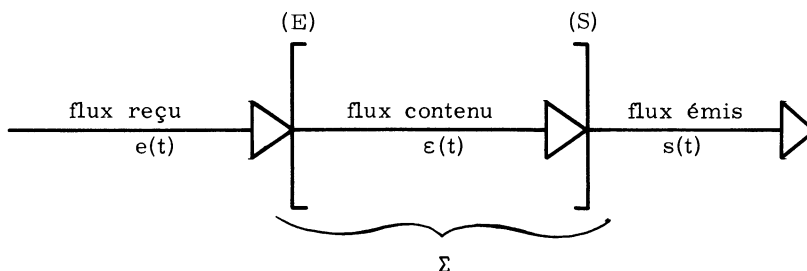


Fig. 1.1

A l'instant t , un système Σ traversé par un flux de nature quelconque (dont le concept sera précisé par la suite) a reçu la quantité $e(t)$, émis $s(t)$ et retenu $\varepsilon(t)$.

Un tel système est défini à chaque instant par :

a) son état logique $\rho(t)$ ensemble des caractères "ouvert" ou fermé de son entrée (E) et de sa sortie (S) ("fermé étant noté par une barre : (\bar{E}) , (\bar{S}));

b) son état évolutif $\alpha(t)$ ensemble des valeurs prises par les fonctions $e(t)$, $s(t)$, d'une part (états "externes" ou "périphériques"), $\varepsilon(t)$ d'autre part (état interne).

La 1ère démarche, lorsque l'on réduit un système concret, à un modèle "entrée-sortie" consiste à définir les états (E), (\bar{E}) ... en fonction des objectifs de l'analyse.

Cet aspect préalable sera illustré sur un exemple : soit le système constitué par une écluse traversée par un flux de bateaux vers l'aval.

Du point de vue de l'opérateur, responsable de son fonctionnement, l'évolution est faite de suites enchaînées, séparées par des espaces "vides", de cycles actifs à quatre phases correspondants aux états opérationnels successifs suivants des vantaux amont et aval :

- (1) (E \bar{S}) : accès au sas ;
- (2) $(\bar{E} \bar{S})$: vidage du sas ;
- (3) $(\bar{E} S)$: sortie du sas ;
- (4) $(\bar{E} \bar{S})$: remplissage du sas.

Du point de vue de l'utilisateur c'est essentiellement le temps de traversée de Σ qui compte.

Pour observer ce dernier, un modèle plus conventionnel et simple va être imaginé.

- L'état (E) signifiera "admission" dans Σ ce qui revient à reporter fictivement l'entrée en arrière du dernier bateau arrivé dans le bief amont.

- L'état (S) signifiera service "actif" (cycle en cours).

- L'état interne de Σ sera défini par la variable continue w : temps d'achèvement du cycle en cours, majoré d'autant de cycles que d'unités en attente. On en déduira le temps total de traversée par adjonction du temps de service, correspondant aux phases (1) + (2) + (3) (l'existence d'un temps de remise en état du système après chaque service est fréquente dans les applications).

2/ Venons-en à une formulation plus générale et précise : le fonctionnement d'un système Σ est basé sur le principe d'autonomie, Σ trouvant dans $\varepsilon(t)$ (étendue aux fermetures E et S de façon à connaître $d\varepsilon(t)$) toute l'information nécessaire à son fonctionnement.

Ce qui équivaut à définir $\rho(t) = f(\varepsilon(t), d\varepsilon(t))$.

Exemples -

a) "Calibrage" du flux de sortie.

On vide Σ de son contenu, dès que celui-ci atteint un seuil donné w_0 dit "module" de sortie.

L'application est ici la suivante :

$$w < w_0 \longrightarrow (E \bar{S}) \quad \text{phase "admission"}$$

$$w = w_0 \longrightarrow (\bar{E} S) \quad \text{phase "émission"}$$

Remarquons que le fonctionnement implique ici l'incomptabilité des états E et S exprimée par la condition logique "ou exclusif" notée $E \oplus S$ qui se traduit de façon concrète par un montage "en bascule" des entrées et sortie. Sous cette condition on peut se limiter à l'une ou l'autre des applications ci-dessus et un état initial $(E \bar{S})$.

b) Des cartes à jouer extraites d'un paquet sont présentées à l'entrée d'un système 1/1, l'état de décision étant défini par la valeur w_n de la dernière carte entrée de rang n, comparée à w_{n-1} .

On adopte la règle opérationnelle suivante :

$$w_n \geq w_{n-1} \longrightarrow (E \bar{S})$$

$$w_n < w_{n-1} \longrightarrow (\bar{E} S)$$

Σ vidé de son contenu passe à l'état 0, s'ouvre de nouveau et un nouveau cycle recommence (la distribution générale obtenue, de piles de cartes rangées par ordre non décroissant est prise comme objet de spéculation dans le problème de Newcomb).

c) Revenons au cas d'un poste distributeur de service en raison de l'intérêt qui lui sera porté par la suite. On est tenté a priori de l'assimiler à un système 1/1 à débit de sortie : constant, si son contenu w est > 0 et nul, si $w = 0$.

Une telle interprétation ne permet cependant pas de rendre compte dans leur ensemble des propriétés du système et des situations possibles. En effet :

- L'état logique $(E \bar{S})$ associé à $(w = 0)$ (l'inactivité de Σ en état d'offre), est générateur de temps perdu pour le serveur, dont "l'accumulation" affecte l'économie de fonctionnement et peut même avoir une incidence de décision (\bar{E}) . Or, dans un schéma 1/1, Σ n'est pas informé de ce temps perdu.

- Les états logiques $(\bar{E} S)$ et $(E \bar{S})$ ne sont pas les seuls états associés à des situations concrètes possibles. C'est ainsi que :

$(E \bar{S}), w \geq 0$: le service est "ouvert" mais inactif. Il y a attente.

Exemple - des cargos arrivent pour décharger dans un port un jour chômé, feu rouge à un carrefour, etc...

$(\bar{E} S), w > 0$: le service est fermé et actif.

Exemple - il y a saturation de la capacité d'attente (définie en nombre d'usagers). On sert les usagers en instance mais on refuse les nouveaux arrivants.

$(\bar{E} \bar{S}), w > 0$: le service, bien qu'occupé, est fermé et inactif ; par suite d'une panne par exemple.

Il y a lieu d'adjoindre un deuxième flux "offre" non "déstockable" muni éventuellement d'une loi d'annulation de nature périodique ou aléatoire.

Le cas d'un poste distributeur de service sera de ce fait considéré comme relevant d'un schéma 2/1 abordé par la suite.

3/ Fonction caractéristiques de fonctionnement.

Pour opérer la liaison entre états interne et logique, il sera souvent commode, d'utiliser d'une fonction caractéristique φ : application de l'ensemble des variables de décision sur un ensemble de variables de Boole, les valeurs 0 et 1 correspondant respectivement aux valeurs < 0 et > 0 des variables de décision.

C'est ainsi que dans l'exemple b) la variable de décision est :

$$\Delta w_n = w_{n-1} - w_n \quad \varphi_{\Delta w} = 1 \quad \text{si } \Delta w > 0$$

$$\varphi_{\Delta w} = 0 \quad \text{si } w \leq 0$$

Faisons observer que les asservissements logiques à réaliser lors de la simulation de processus entrée-sortie, soit sur ordinateurs, soit sur appareils analogiques, résulteront de formulations telles que les suivantes :

- Pour avoir un signal +1 dans le cas d'états simultanés 0, on fera intervenir la condition "ni" appliquée aux états +1 des caractéristiques.

- Pour avoir un signal +1 si $\varphi = 0$, on usera du complément logique $\bar{\varphi} = 1 - \varphi$, etc...

II - SYSTEMES A DEUX ENTREES

1/ Généralités.

Il a déjà été fait observer sur l'exemple "service" que le schéma 1/n est insuffisant dans le cas de processus où entrées et sorties peuvent être commandées par des événements extérieurs au système, observation générale s'appliquant aux systèmes où la sortie d'un premier flux est totalement tributaire d'un deuxième flux.

Par exemple, le tiroir d'évacuation d'une trémie ne saurait s'ouvrir que sur un véhicule-benne à remplir, une marchandise, sortir d'un entrepôt qu'en échange d'un ordre de livraison, être mise à la consommation que si elle trouve acheteur à la valeur d'échange qu'est son prix, etc...

Un système opérationnel sera dit réductible à un schéma à double entrée si, d'une manière générale, il opère un échange ou un mélange en proportions définies⁽¹⁾ de deux flux d'entrée $y(t)$ et $z(t)$ en un flux de sortie.

Exemples -

- L'assemblage de deux pièces dans un processus de fabrication. L'interaction de deux agents chimiques ou biochimiques.

(1) Si le rapport d'échange est fonction du temps, un changement d'horloge sur l'un des flux, ramène à ce cas.

- Les mouvements entrée-sortie d'un stock, d'une caisse, de l'avoir d'un joueur...
- La vente d'un produit à un prix donné.
- La distribution d'un service quelconque, etc...

Par un choix convenable des unités de mesure des deux flux d'entrée y et z, il sera toujours possible d'admettre un rapport unité d'échange ou de mélange, invariable par hypothèse pendant la durée d'observation du processus.

Il y a lieu de mentionner le cas non abordé ici en détail où les flux d'entrée sont constitués par une suite rangée d'objets ou une chronologie d'événements vis-à-vis desquels le système va exercer une fonction d'assortiment ou de contrôle.

Une règle d'assortiment va se définir par une application d'un ensemble quotient des éléments du premier flux dans un ensemble quotient des éléments du deuxième flux (plus, éventuellement, l'ensemble vide).

Les considérations logiques développées par la suite pourront alors se généraliser à ce cas en substituant à la notion d'intersection au sens topologique sur la droite numérique celle d'intersection au sens de la théorie des ensembles.

2/ Description et classification des cas.

On fait implicitement l'hypothèse de liberté d'accès dans le système des deux flux composants, lesquels s'y fondent en un flux de sortie dans la mesure des disponibilités existant dans le système.

L'inventaire logique des cas de base est le suivant :

Types →	I	II	III	Ibis	IIbis
Etat logique "actif"	(S)	(S \bar{V})	(S \bar{V} \bar{W})	(SW)	(S \bar{V} W)
Etat interne correspondant					
d v	0	0	0	0	0
d w	<0	<0	0	<0	<0
Nbre de "lignes d'attente"	2	1	0	1	0
flux "non déstockables"	0	1	2	1	2
Appellation	"Stock"	"Service"	"Intersection" ou "contrôle"	"Stock" "Service" sans attente de la demande	

Il est commode de se représenter les montages logiques correspondants, en s'aidant des graphismes suivants :

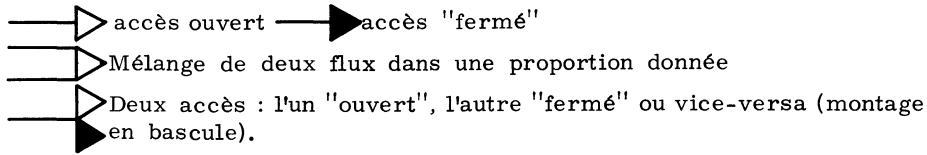
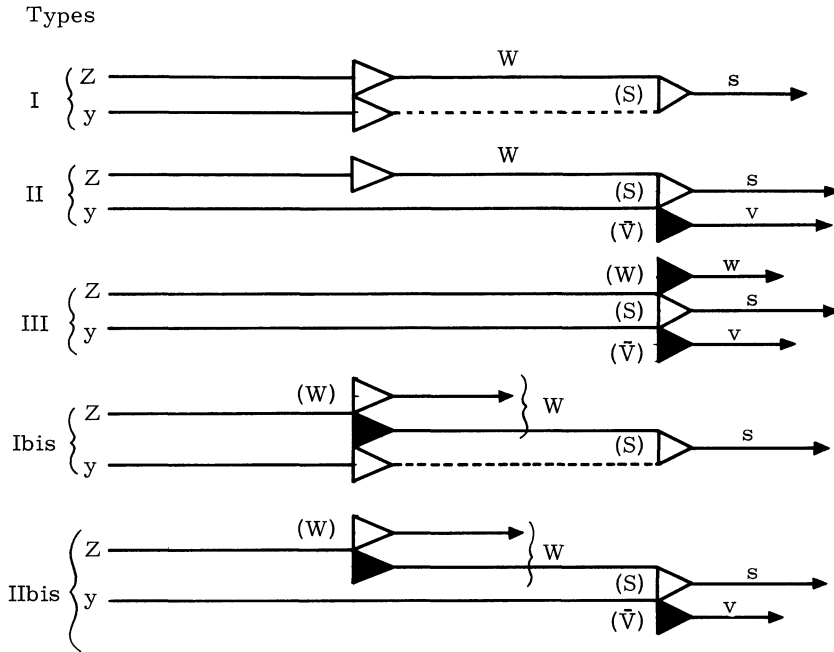


Fig. 1.2



- Le type I s'applique fondamentalement aux mouvements entrée-sortie d'un stock physique quelconque ou fictif (compte courant).

On suppose que toute demande dz est satisfaite instantanément dans la mesure des disponibilités, il en résulte que le système est soit à l'état $v > 0$ (attente de l'offre) soit à l'état $w > 0$ (attente de la demande)

- Le type II s'applique aux systèmes où l'un des flux ($y(t)$ par convention) n'est pas "déstockable".

Le cas pratique le plus important est celui d'un poste distributeur de service, lequel, s'il peut se libérer d'un état d'attente w , ne peut en revanche récupérer son temps d'inactivité v , définitivement perdu.

Appartiennent également à ce type les processus "à la demande" (celle-ci portant sur des temps de fabrication au futur).

Dans le type III tout flux en excès est stocké mais ne peut être déstocké. Le système opère l'intersection des deux flux.

Une application particulière est la suivante : soit deux flux d'objets se présentant par paires dans le système : le premier $y(t)$, d'objets témoins référencés 1, le second $z(t)$ d'objets à tester, référencés 1 si conformes, 0 dans le cas contraire.

On réalise un système "contrôle" caractérisé par $w = 0$ et où $v(t)$ dénombre à tout instant les unités refusées.

Types I bis et II bis - Il est fréquent en pratique que soit exclue la possibilité de mettre en attente les demandes trouvant le système occupé. Cela peut tenir à la nature de l'offre ou à la conception même du système comme dans le cas d'appels d'un numéro de téléphone. Cela peut tenir aussi à la nature de la demande qui ne peut attendre (besoin d'urgence par exemple). De tels systèmes de type I bis et II bis seront dits sans dispositifs d'attente de la demande.

On remarquera que le fonctionnement du type I bis redevient symétrique si l'on supprime également l'éventualité de l'attente du flux offre $y(t)$. Ce modèle a été omis dans l'inventaire précédent n'ayant pas (à première vue du moins) d'application pratique.

Très souvent dans les applications intervient également une limitation de la capacité d'attente : au-delà d'un certain seuil w_0 , toute entrée nouvelle dz doit être considérée comme non déstockable et il y a transition de fonctionnement de $I \rightarrow I$ bis et de $II \rightarrow II$ bis ou vice-versa.

3/ Systèmes dérivés du cas 2/1.

1) Considérons s systèmes 2/1 assurant le même échange entre deux flux de nature donnée, assurant par exemple le même service, chacun avec son débit propre.

Opérons leur réunion "périphérique" en fondant ensemble respectivement leur flux d'entrée et leurs flux de sortie, tout en laissant disjoints leurs dispositifs internes (ce qui de façon plus précise revient à ranger en parallèle les s postes avec leurs lignes d'accès de telle sorte qu'une unité engagée sur une ligne ne puisse être transférée sur une autre ligne).

On constitue ce que l'on appelle un système à s postes parallèles

- soit "banalisés", si de même débit,
- soit individualisés dans le cas contraire et éventuellement ordonnés, si un ordre préférentiel d'utilisation leur est appliqué (par débits décroissants par exemple).

La réunion des flux d'entrée implique que rien ne distingue les uns des autres les arrivants admis à être servis dans leur ordre d'arrivée (règle : 1er arrivé, 1er servi).

Un tel système offre les particularités suivantes de fonctionnement

a) le débit de sortie, variable, est lié à la composition des postes actifs.

On a $c_s^1 + c_s^2 + \dots + c_s^s = 2^s - 1$ débits possibles non nuls au maximum et s au minimum (si les débits des constituants sont identiques, ou si les postes sont complètement ordonnés).

b) en cas d'absence d'ordre a priori d'utilisation des postes, une règle d'affectation des nouveaux arrivants à l'une des s lignes doit être définie.

Nota - v signifie ici "vide" (absence de flux de sortie), w est la notation la plus usuelle de l'attente ("Waiting time") (la primauté du type II dans l'étude actuelle a conduit à accorder la préférence aux notations les mieux adaptées à ce cas).

La plus simple consiste à affecter l'arrivant à une ligne de moindre attente w_n :

$$w_n = \inf \{w_i\} \quad i \in 1' \dots s \quad \left(\text{ou} : w_n = \bigcap_1^s w_i \right)$$

(ce qui revient à ouvrir les accès de répartition interne (w_i) sous la condition $w_1 = w_n = 0$).

Observons incidemment que, dans le cas général de postes à débits différents, la règle précédente n'assure pas le débit optimum du système (pour obtenir ce dernier il faut résoudre un problème d'affectation qui sort du cadre de la présente analyse).

Un cas théorique intéressant est celui de postes banalisés en nombre infini, l'attente est alors nulle, le flux de sortie $ds(t)$ se définit sur la suite N_0, m (N_0 : entiers positifs $+ 0$, m : module de sortie).

c) au cours de périodes de débit uniforme, en particulier de débit maximum, l'évolution du contenu est identique à celle du système 2/1 de même débit.

De nombreux systèmes relèvent du schéma précédent :

- des usagers connectés à un même standard téléphonique disposant de s lignes d'appel,
- guichets fournisseurs (ou percepteurs) d'un même service,
- postes à quai de chargement et déchargement dans un port,
- serveurs dans un restaurant, vendeurs dans un magasin...
- certains problèmes d'ordonnancement industriel.

.....

Observons que la réunion effectuée peut aussi bien porter sur des systèmes : soit de type I comme dans le problème du stockage de produits à plusieurs stades (pouvant aller du simple stock de l'utilisateur jusqu'à la réserve centrale).

Soit le type II bis comme dans l'exploitation d'un hôtel à s chambres : à chaque admission ou réservation s'associe une durée d'immobilisation prévue d'une chambre, matérialisée par un lignage horizontal sur le tableau de charge, véritable fonction caractéristique de $\varepsilon(t)$.

La condition généralisée "et" d'occupation de l'ensemble des chambres à une date d'interrogation donnée entraîne le refus d'admission (état logique : $S \bar{V} W$).

Soit de types composites II et II bis, par exemple dans le cas d'un standard téléphonique (la standardiste peut mettre éventuellement en attente les demandes d'appel reçues de l'intérieur, contrairement aux appels en provenance de l'extérieur trouvant les s lignes occupées).

2) Restreignons la réunion périphérique à l'un des flux d'entrée, le flux "offre" par exemple, et définissons un ordre ou tout au moins un préordre sur l'autre flux.

On constitue un système avec "priorités" : on dispose en série les s postes de telle sorte que le flux "offre" v , inutilisé par une catégorie serve de flux offre à la catégorie suivante dans l'ordre de priorité.

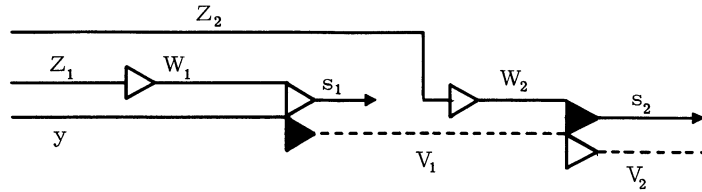


Figure 1.3

Un tel modèle s'applique en particulier en fonctionnement d'un système "service" à un poste alimenté par s classes prioritaires d'utilisateurs (la séparation des s postes sur le schéma n'est qu'un artifice de représentation puisque, par construction, le système est assujéti à la condition logique :

$$d s_1(t) > 0 \otimes d v_1(t) > 0 \quad \forall_i, t$$

entraînant l'exclusion deux à deux à tout instant des conditions $d s_1(t) > 0$.

Si la réunion périphérique est restreinte au flux "demande" avec disposition en série des s postes, on constitue un système à s postes enchaînés, ou "en cascade", dans lequel les flux de sortie intermédiaires servent de flux demande à l'entrée des postes suivants.

Un tel modèle s'applique notamment

- au fonctionnement d'une chaîne de fabrication considérée comme une suite ordonnée de temps opérationnels en cascade,
- à l'écoulement d'un flot de voitures à travers des feux de signalisation en série (il faut faire quelques hypothèses supplémentaires concernant notamment les temps θ_i de franchissement des intervalles entre feux successifs $e_{i+1}(t) = s_1(t - \theta_i)$).

Il est facile de voir que ces cas sont étroitement apparentés aux précédents (systèmes avec priorités) du fait de la complémentarité à tout moment des flux $s(t)$ et $v(t)$ par rapport à $y(t)$.

3) Systèmes 1/2.

Faisons fonctionner "à l'envers" un système 2/1, ce qui revient à effectuer une substitution générale $E \longleftrightarrow S$ et à inverser la chronologie du processus.

On obtient un système assurant la décomposition en deux constituants d'un flux homogène ainsi que leur stockage éventuel avant émission.

L'état final du système initial devient l'état initial du nouveau système tandis qu'à un flux déstockable du premier correspond un flux non stockable du second et vice versa.

De tels systèmes, ainsi définis l'un par rapport à l'autre, seront dits "totalement complémentaires". En ce sens qu'à tout instant intermédiaire θ d'une évolution de 0 à t , l'ensemble des états évolutifs de 0 à θ du système initial, et celui de t à θ de son complémentaire sont disjoints et ont une somme constante (ensemble de 0 à t).

Ces systèmes s'appliquent à l'observation de nombreux processus physiques ou chimiques de démontage, "éclatement", séparation, fil-

trage, décomposition... d'un flux en deux constituants inclus en proportion constante.

III - GENERALISATION

1/ Systèmes $n/1$ et $1/n$.

L'activité, c'est-à-dire l'état (S) du système, est subordonnée à la condition "et" généralisée de disponibilité de tous les constituants.

Exemples -

- Une réaction chimique entre plus de deux constituants.
- La production d'un mélange ternaire... de composition définie (alliages, engrais composés, etc...).
- L'assemblage des éléments d'un objet.
- La constitution d'un assortiment de pièces, d'un "dossier", d'équipes ou d'unités opérationnelles de composition définie.
- Un contrôle multiple, etc...

Il importe d'observer que la condition "et" considérée ici n'implique à priori aucun ordre ou préordre, elle est de caractère instantané.

A chaque instant, le contenu du système est défini par rapport aux n constituants pris isolément et non combinés les uns aux autres comme dans le cas déjà considéré de n systèmes $2/1$ montés en série que l'on peut appeler "système $n/1$ ordonné" (la condition de sortie étant identique).

De même que pour les systèmes $1/2$, les systèmes $1/n$ se définissent par complémentarité vis-à-vis des systèmes $n/1$.

2/ Systèmes n/n' .

On peut d'abord les considérer comme réunions soit des entrées de systèmes $p \leq n/1$ (sorties en parallèle), soit des sorties de systèmes $1/p \leq n$ (entrées en parallèle).

Les applications de tels modèles sont extrêmement nombreuses dans des domaines variés d'observation.

Signalons seulement à titre d'exemples les modèles économiques "input, output".

Dans le premier cas, on opère sur un ensemble donné de ressources que l'on affecte à la réalisation d'un certain nombre de produits.

Dans le second cas, on opère sur un ensemble donné de besoins que l'on affecte à un certain nombre de moyens en amont ; unités ou procédés de fabrication, ensemble de ressources...

La programmation des coupes dans l'Industrie Papetière constitue une illustration typique, de ce dernier cas, donnée ici à titre d'exemple.

Les constituants $(1/p)_i$ correspondent à des plans de coupe (i) de bobines-mères en $(p - 1)$ "laizes" prises dans l'ensemble des largeurs demandées + une laize irrécupérable, dite "chute de coupe".

On doit opérer, parmi les plans de coupe possibles, une sélection

permettant de satisfaire à la fois, à la demande et à des impératifs d'économie d'exploitation.

Dans un premier temps on recherche en général la solution "stationnaire" (égalité entre flux d'entrée et de sortie) satisfaisant aux commandes et minimisant le flux de sortie "chutes de coupe" (solution d'un programme linéaire).

Dans un deuxième temps, on ordonnance ces plans de coupe de façon à respecter au mieux les délais. Souvent, il apparaîtra préférable d'admettre des excès w_i ou manques dy_i dans certaines largeurs.

Nous n'avons fait ci-dessus qu'esquisser une méthode générale d'identification et de classement des systèmes entrée sortie.

Il apparaît dès maintenant que de nombreuses propriétés de dualité existent entre familles de cas, reliées notamment entre elles par les transformations suivantes :

- (a) Inversion de la chronologie du processus.
- (b) Substitution générale $(E) \longleftrightarrow (S)$.
- (c) Transposition de deux entrées (c'est-à-dire de deux flux d'entrée).

Nous avons vu que deux systèmes déduits l'un de l'autre par le produit de transformations (a) \times (b) sont complémentaires.

Nous appellerons "conjugués" 2 systèmes 2/1 déduits l'un de l'autre par (a) \times (c).

Nous ferons en deuxième partie un usage courant de ces transformations.

IIème PARTIE

ALGÈBRE DES SYSTÈMES ENTRÉE-SORTIE

(Systèmes à taux d'échange constant)

A - DEFINITIONS

1/ Trois fonctions doivent être prises en considération

d'entrée : d'état ou d'écart : de sortie :

$$e(t) \longrightarrow \varepsilon(t) \longrightarrow s(t)$$

Elles prennent leurs valeurs dans un espace n dimensionnel à coordonnées toutes (+) (n : nombre de flux d'entrée).

$\varepsilon(t)$ est constituée ici d'un ensemble de s éléments (autant que de canaux de sortie).

Une décomposition analogue de $s(t)$ n'offre pas d'intérêt, lorsque, seule compte l'émission globale du système.

L'hypothèse de conservation des flux par le système va entraîner la condition(1)

$$e(t) - \sum_1^s \varepsilon_i(t) = s(t)$$

Considérons le cas d'un seul canal de sortie. L'invariance de la composition du flux de sortie va se traduire, si l'on choisit convenablement les unités, par l'égalité des coordonnées de $s(t)$

$$y - v = z - w = \dots$$

ou plus simplement dans le cas 2/1 :

$y + w = z + v$

égalité s'écrivant pour s lignes d'attente

$$y + \sum_1^s w_i = z + v$$

Le cas 2/1 va être abordé en détail : les valeurs y, z, v, w étant d'abord définies sur l'ensemble N_0 des entiers naturels +0.

Dans la plupart des applications, l'un des flux d'entrée au moins, que nous supposerons être $z(t)$ est "à impulsions", $z(t)$ est alors représentée par une courbe "en escalier" dont les sauts dz correspondront à des quantités livrées des temps requis de service, des pertes subies par un joueur après chaque "coup", etc...

Considérons l'exemple usuel d'un système offre-demande (de biens ou de services). Du point de vue de la demande il faut observer l'état du système aux instants précédant immédiatement une demande nouvelle z_i . Il y aura donc lieu d'associer à la demande z_{i+1} l'offre globale y_{i+1} entre les instants $(i - 1)$ et (i) , pour rendre compte de la variation de l'offre entre ces instants.

Du point de vue de l'offre c'est l'état du système après satisfaction de l'offre qui est plutôt à considérer. On associera de ce fait la demande z_i à l'offre y_{i+1} .

Parmi diverses variantes plus ou moins fréquentes citons le cas de "groupages" d'utilisateurs en "grappes" (Terminologie anglaise : "batches").

Si le service, par exemple ne fonctionne que par grappe de s utilisateurs, les y_i doivent être définis comme les intervalles séparant les utilisateurs de rang $0, s, 2s \dots$

Dans un premier temps, on ne s'intéresse qu'à l'attente W_0 du dernier usager de chaque grappe. Dans un deuxième temps, on compose W_0 avec l'attente supplémentaire W_r de l'utilisateur de rang d'arrivée r dans sa grappe (intervalle entre $(s-r)$ arrivées consécutives).

 (1) Les formulations qui suivent sont donc inapplicables aux systèmes non conservatifs dont le plus typique est le processus de vie et de mort.

Si ce sont les arrivées qui ont lieu par grappes et que le service fonctionne par unité, il faut effectuer une décomposition analogue avec les masses z_i .

Ces exemples montrent que la définition préalable de la distribution $\{y_i, z_i\}$ doit être adaptée à chaque cas et au but d'observation cherché.

Faisons observer que la variable temps du processus sera souvent introduite explicitement, s'identifiant avec la variable de base y, z étant mesurée par ailleurs avec la même unité (il sera commode par exemple de raisonner en journées de production ou de consommation, l'unité étant un débit moyen de l'une ou de l'autre au cours de la période d'observation).

2/ Tout ensemble ordonné de couples $e_i = (y_i, z_i)$, application particulière de la suite des entiers naturels dans le produit cartésien YZ des deux ensembles de variables y et z , sera noté :

$$d_n = \{e_i\} \text{ et appelé distribution d'entrée et}$$

l'ensemble $x_n = \{y_i - z_i\}$: distribution des écarts.

La fonction d'état $\varepsilon(t)$ doit être considérée comme une fonction de l'ensemble de ses valeurs $\{\varepsilon_i\}$ sera appelé distribution des états.

3/ Désignons par E l'ensemble le plus général des distributions d . Le sous-ensemble correspondant à des valeurs définies y, z, v, w (liées par $y + w = z + v$), autrement dit le sous-ensemble des images réciproques dans E d'un élément défini sur le produit cartésien $YZVW$ sera noté E_{yz}^{vw} .

De la même manière, on définira des sous-ensembles à deux ou un paramètre indépendants tels que :

$$E_y^w, E_{yz}, E^{vw}, \dots, E^v, E^w \dots$$

B - ETUDE COMPARATIVE DES DIVERS SYSTEMES 2/1

1/ L'unité entre les trois types de base I, II et III résulte de la possibilité de définir l'état interne $\varepsilon = (v, w)$ en fonction de la seule distribution des écarts $\{x_i\}$.

On établit en effet facilement les relations de définition suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_I &= (v_I, w_I) = \left\{ \left(\sum x_i \right)^+, - \left(\sum x_i \right)^- \right\} \\ \varepsilon_{II} &= (v_{II}, w_{II}) = \left\{ \sup \left(\sum_1^1 x_j, 0 \right), \sup \left(- \sum_n^n x_j, 0 \right) \right\} \\ \varepsilon_{III} &= (v_{III}, w_{III}) = \left\{ \sum x_i^+, - \sum x_i^- \right\} \end{aligned}$$

ε_I ayant une définition soit $(v, 0)$ soit $(0, w)$ est uniforme sur le corps des réels.

Faisons le choix d'une variable de base y en fonction de laquelle va se définir ε . Portons les v_i en ordonnées (+) et les w_i en ordonnées (-). Pour avoir une courbe continue nous supposons que dans les systèmes I et II le flux $y(t)$ est contenu et uniforme.

On obtient les représentations suivantes (fig. 2.1 à 2.3) d'une même distribution d'entrée donnée à titre d'exemple

$$\text{suite } \begin{cases} y_1 : 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & y = 14 \\ z_1 : 2 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & z = 13 \\ x_1 : 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 & x = 1 \end{cases}$$

Système I "Stock"

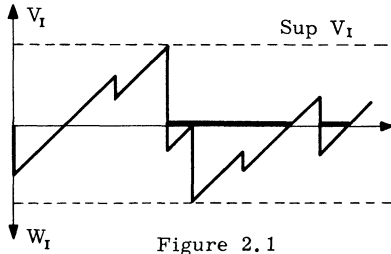


Figure 2.1

Système II "Service"

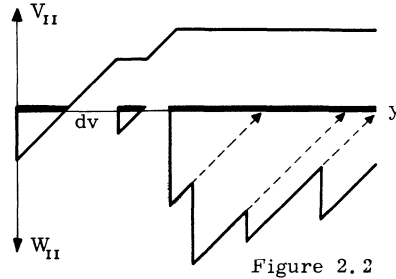


Figure 2.2

Système III "Intersection"

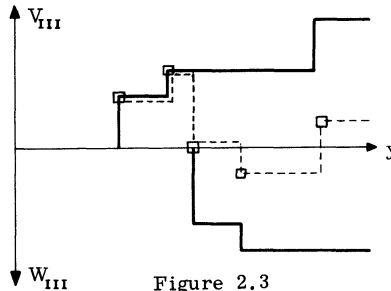


Figure 2.3

Dans le Système I "Stock", la construction ci-dessous permet de passer du point figuratif $(i - 1)$ au point (i) .

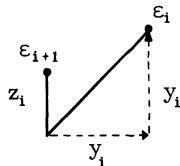


Figure 2.4

Le flux de sortie est "à impulsions" si le système est à l'état v et continu (trait fort) s'il est à l'état w .

Le système II est actif (flux de sortie si : $dw < 0 \longrightarrow \epsilon = (v, w > 0)$).

Le flux de sortie est représenté par un trait fort sur le graphique ci-contre et on peut omettre de figurer v_{II} explicité par les espaces vides dv (traits fins). On notera que dans les cas I et II :

$$\left\{ \frac{ds(t)}{dt} \right. = \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } w > 0 \\ 0 & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

ϵ_{III} peut être simplement représentée par la courbe à créneaux $(v_{III} - w_{III})$ puisqu'il est toujours possible de séparer cette dernière en ses composantes v_{III} (sauts x_1^+) et w_{III} (sauts x_1^-).

Les points d'aboutissement des sauts s'identifient avec les points initiaux des sauts dans le système I.

Dans le cas III le flux de sortie est à impulsions $\text{Inf}(y_1, z_1)$ aux instants : $y_1, y_1 + y_2 \dots$

Il y a lieu d'observer que le flux de sortie d'un système de type II peut être interprété par le schéma géométrique suivant : des "masses ponctuelles" z_1 sont projetées sur un segment de longueur y et "étalées" vers la droite (par exemple) en disjoignant et juxtaposant de proche en proche les masses en intersection (ce qui revient comme le montre la représentation graphique ci-dessus à effectuer une projection sur y de la courbe w_{II}).

2/ Systèmes sans dispositif d'attente.

Nous considérons seulement à titre d'exemple le cas d'un système service.

Celui-ci n'est actif que si :

$$dv = 0 \longleftrightarrow dw < 0 \quad (\text{conditions liées})$$

ε ne peut plus être défini en fonction de $\{x_1\}$ mais en fonction de $\{e_1\}$.

On peut omettre ici également de figurer v_{II} , explicité par les paliers dv .

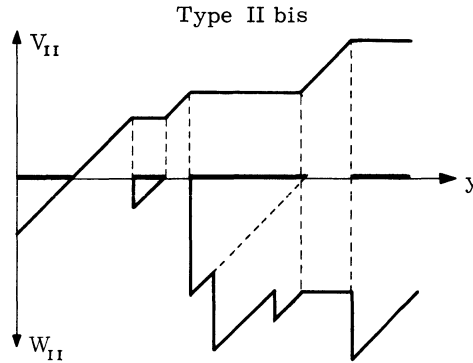


Figure 2.5

L'interprétation géométrique du flux de sortie diffère de celle du cas II : tous les impacts recouverts par la 1ère masse étalée sont annulés, on étale ensuite la masse du 1er impact suivant non recouvert... ainsi que le montre le schéma ci-dessous.

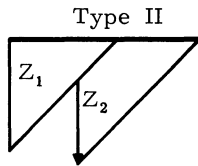


Figure 2.6

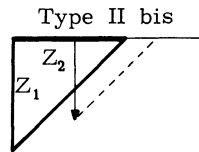


Figure 2.7.

Il est intéressant d'observer qu'avec cette notion d'étalement de masses la généralisation d'un système II : réunion d'un nombre infini de systèmes service (considérée en 1ère partie) correspond au mode d'éta-

lement à droite (le flux de sortie correspond à la réunion des masses projetées).

3/ Relations entre les trois systèmes de base.

On a en tout état de cause la relation générale, valable pour tous les systèmes considérés (y compris les cas "bis")

$$v_I - w_I = v_{II} - w_{II} = v_{III} - w_{III} = y - z = x$$

cette égalité ne se produisant pour III qu'aux instants d'impact ($t_1 - 0$) des z_1 .

On établit aisément les relations résumées dans le tableau suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_I = (v_{II} - w_{II})^+ = (v_{III} - w_{III})^+ \\ w_I = (v_{II} - w_{II})^- = (v_{III} - w_{III})^- \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{II} = \text{Sup } v_I \\ w_{II} = \text{Sup } v_I - x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{III} = v_{II} - \Sigma \Delta w_{II}^- \\ w_{III} = \Sigma \Delta w_{II}^+ \end{array} \right.$$

Etablissons à titre d'exemple les secondes relations (lesquelles peuvent être d'ailleurs intuitivement comprises sur les diagrammes d'état).

La première valeur v_1 est identique dans les cas I et II. Si par la suite $v_I \leq v_1$ (les nouvelles demandes cumulées sont au moins égales aux offres), le système II est actif.

Si v_I croissant dépasse v_1 , les systèmes I et II sont de nouveau en phase v , il en résulte finalement que $v_{II} = \text{Sup } v_I$ et w_{II} est déduit de : $v_{II} - w_{II} = v_I - w_I$.

D'autres relations de correspondance peuvent être obtenues à travers diverses transformations telles que :

(a) transposition des flux d'entrée : $y_1 \longleftrightarrow z_1$;

(b) inversion de la chronologie, équivalant à effectuer la substitution

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & n \\ n & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Par exemple (b) conduit à de nouveaux systèmes I' et II' liés au système I par :

$$v'_{II} = \text{Sup } v'_I = w + \text{Sup } w_I$$

$$w'_{II} = \text{Sup } v'_I - x = \text{Sup } w_I$$

L'attention doit être attirée dès à présent sur les nombreuses applications pratiques et conséquences de ces divers résultats.

Exemples : problèmes "stocks".

La gestion de systèmes de stocks, le contrôle d'une partie entre deux joueurs posent essentiellement des problèmes d'observation d'écarts minima ou maxima.

On désire par exemple que le déficit de production W par rapport aux livraisons, au cours d'une période donnée ne dépasse pas le stock initial W_0 avec un seuil donné de probabilité.

Cette condition correspond dans le système II' (système "service" sur distribution I inversée) à une probabilité d'un état final $W' \leq W_0$.

Si l'excédent de production ne doit pas dépasser un seuil W_0 , la distribution d'entrée interprétation II doit comporter un espace vide $\leq W_0$.

Problème de la ruine du joueur.

Soit v_0 l'avoir initial de A ;

w_0 l'avoir initial de B .

Supposons que le résultat de chaque coup soit (± 1)

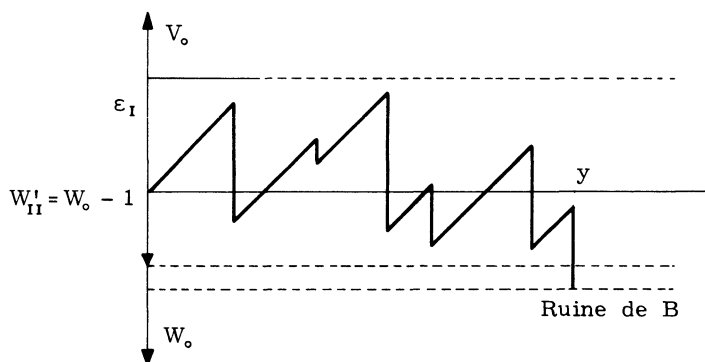


Figure 2.8

Une partie de $n = (y + z)$ coups se terminera par la ruine de B si :

$$1) \epsilon_I = (y - z) = -W_0 \longrightarrow y = \frac{n - W_0}{2}$$

(l'état W_0 devant être atteint pour la première fois).

2) $\text{Sup } \epsilon_I < V_0$ (sinon A aurait gagné dans l'intervalle).

A toute distribution de type I satisfaisant à ces conditions correspond une distribution de type II de masse $y + w - 1$

dans le sens (\longrightarrow) $V_{II} < W_0$

dans le sens inverse (\longleftarrow) $W'_{II} = W_0 - 1$

Les distributions cherchées correspondent donc à l'intersection des sous-ensembles définis ci-dessus.

4/ Graphes d'application.

La présente recherche étant dominée par des considérations de combinatoire et d'ordre, on se propose ici de l'aborder également en termes de graphes, langage le plus apte, à traduire ces deux niveaux de signification.

Considérons le produit cartésien de deux ensembles, totalement ordonnés par des relations S et S' (Se = "suivant" de l'élément e) de y + 1 et z + 1 objets respectivement.

Le treillis correspondant I est distributif, il admet un minorant universel 0 et un majorant universel U.

A toute distribution d'état du système I correspond une chaîne de 0 à U de longueur invariable, propriété propre aux treillis distributifs en général et liée, comme il est facile de s'en rendre compte, dans le cas actuel, à l'existence de y + z + 1 niveaux de 0 inclus (niveau zéro) à U inclus (niveau y + z figuré ci-dessous).

Les opérations infimum : \wedge et Supremum : \vee , définissent un treillis identique, dual du précédent, admettant les minorant et majorant universels 0' et U' :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0' = 0 \wedge U \\ U' = 0 \vee U \end{array} \right.$$

Ce treillis admet y + z + 1 niveaux de 0' et U' se décomposant en :

z niveaux de rangs W étagés de 0' à 0
1 niveau 0
y niveaux de rangs V étagés de 0 à U'

A chaque chaîne de 0 à U correspond de façon biunivoque une distribution des z objets ordonnés sans (y + 1) cases (figurés ci-dessous par exemple par les (y + 1) points de 0 à U'.

Les chaînes distinctes possibles sont donc en nombre :

$$\Gamma_{y+1}^z = C_{y+z}^z$$

Passage de la chaîne I à la chaîne II.

On peut utiliser le "demi cycle supérieur" (arcs fléchés) : partant de 0, on passe au sommet de moindre niveau et ainsi de proche en proche jusqu'en U (ou vice versa de U \rightarrow 0 par les sommets de plus haut niveau).

Si un élément ou "point" e du graphe I a deux suivants notés Se et S'e (figure page suivante) son voisin le plus proche de même niveau v ou w est l'élément

$$SS'e = Se \vee S'e$$

Dans les systèmes de type II, une relation d'absorption doit être définie au niveau 0 (l'opération infimum \wedge n'est plus ici définie : par exemple sur la figure ci-contre Se qui serait l'infimum de e et SS'e n'existe plus). Le graphe d'application se limite dans ce cas à un demi treillis.

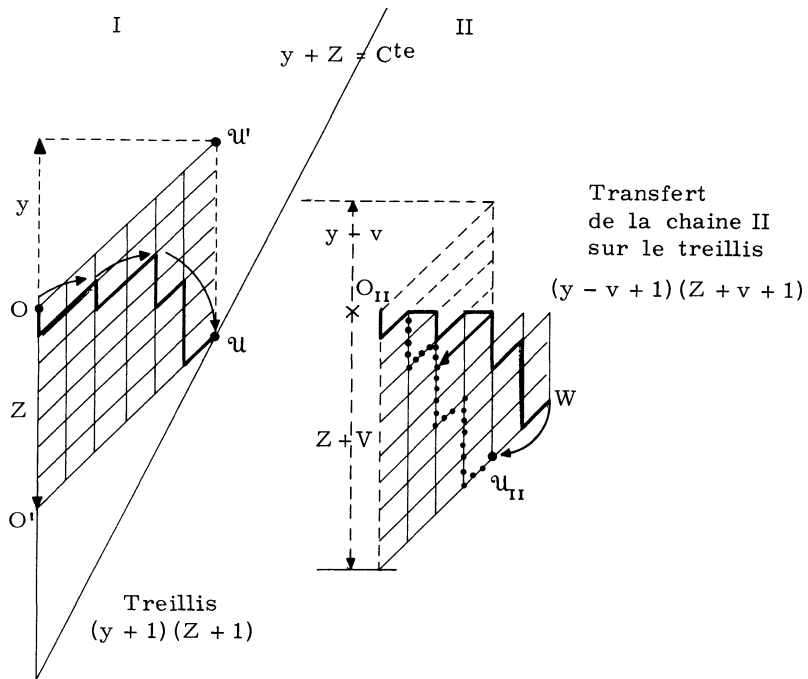


Figure 2.9

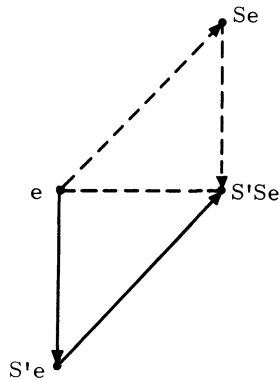


Figure 2.10

Examinons à quelles conditions subsistent les effets de la dualité. A toute opération ($e \longrightarrow Se$) supprimée, substituons ($e \longrightarrow S'e$), nous n'altérons pas les propriétés combinatoires et d'ordre du système.

La nouvelle chaîne obtenue est incluse sur le treillis défini à partir de deux ensembles totalement ordonnés de $(y - V + 1)$ et $(z + V + 1)$ objets.

Elle est par ailleurs du type I limité au sous-ensemble de chaînes de 0 à \mathcal{U} entièrement localisées au-dessous du niveau 0, c'est-à-dire limité aux chaînes assujetties à la condition monotone

$$z(r) \geq y(r) \forall r \in 1 \dots n .$$

Ce qui précède permet de prévoir une propriété essentielle de l'ensemble E (la démonstration purement algébrique sera donnée plus loin) : l'ensemble E à 3 paramètres indépendants est dénombrable sur le sous ensemble particulier à deux paramètres indépendants ($V = 0$).

Il est possible par extension de ces méthodes d'atteindre toutes les propriétés de structure mises en évidence par la suite.

La méthode de transposition sur treillis géométriques peut rendre de très utiles services pour traiter des problèmes comme celui dit jeu de "Pile ou face" que l'on représente en général sur le treillis ci-dessous d'une lecture plus facile.

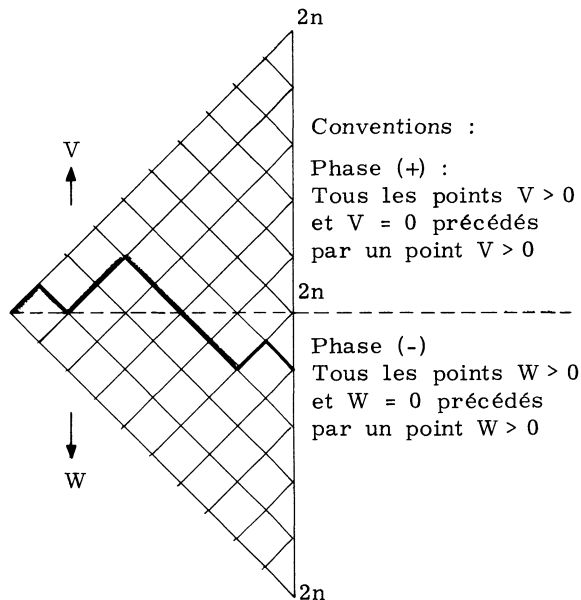


Figure 2.11

Une partie comportera $2n'$ coups, c'est-à-dire n séquences de 2 coups, condition nécessaire à une formulation symétrique (les changements de phase ne peuvent en effet avoir lieu qu'à des coups de rang impair et le rétablissement de l'équilibre à des coups pairs).

Indiquons qu'il est possible de définir sur le treillis précédent un certain nombre de transformations bijectives permettant en particulier la séparation complète des phases (+) et (-) et d'évaluer par ce moyen les temps où chaque joueur a l'avantage.

C - STRUCTURE DE E PAR RAPPORT AUX SYSTEMES DE TYPE II

1/ Les propriétés de dualité mises précédemment en évidence permettent de se limiter à l'étude d'un seul type.

Le plus intéressant à cet égard semble être le type II.

Toute distribution de E d'interprétation II est en effet toujours décomposable d'une seule manière en deux distributions d'un type plus simple :

- à gauche une distribution d'état final $W_1 = 0$,
- à droite une distribution "enchaînée" caractérisée par $V_2 = 0$.

Le point de contact des deux distributions précédentes est le dernier point libre à droite, celui-ci pouvant s'identifier avec l'une des extrémités de l'intervalle, il y a lieu d'adjoindre à chacun des sous-ensembles de distribution caractérisé par $(W = 0)$, $(V = 0)$ l'ensemble vide \emptyset .

Le sous-ensemble caractérisé par $w = 0$ sera dit "inclus" et noté I. La masse z projetée est en effet entièrement incluse dans l'intervalle y .

Symboliquement : $z \subset y$ et $V = y - z$.

Le sous-ensemble $(v = 0)$ sera dit "dense" et noté D. La masse z recouvre l'intervalle dans sa totalité.

Symboliquement : $y \subset z$ et $w = z - y$.

En transposant les y_1 et z_1 et inversant la distribution on établit une correspondance bijective :

$$I \leftarrow \circ \rightarrow D$$

Les ensembles I et D seront dits conjugués l'un par rapport à l'autre. A toute propriété définie sur I, correspondra par dualité une propriété définie sur D et vice versa. I et D ont pour pivot commun le sous-ensemble C des chaînes "complètes" ($V = W = 0$).

2/ Produit de distributions.

En superposant deux distributions d_1 , d_2 par une réunion convexe de leurs intervalles, on définit une nouvelle distribution d_3 produit de d_2 par d_1 liée au couple des points origines des intervalles.

Le cas pratique le plus intéressant est celui où les deux intervalles sont juxtaposés, la fermeture à droite de d_1 coïncidant avec la fermeture à gauche de d_2 . Nous dirons dans ce cas que nous effectuons le produit à droite de d_1 par d_2 .

Il y a additivité des y et z respectivement, en sorte que l'application sur le plan yz de l'ensemble E, muni de la relation d'équivalence :

$$(E_{yz}) R (E_{y_1 z_1}) \leftarrow \circ \rightarrow (y, z) = y_1 z_1 \quad (\text{égalité de vecteurs})$$

est un isomorphisme.

Cette propriété définit le couple (v_3, w_3) , puisque d'une manière générale les couples (v, w) se définissent en fonction des (y, z) par les relations

$$v = y' - z'$$

$$w = \bar{z}' - \bar{y}'$$

où $(y' z')$ et $(\bar{y}' \bar{z}')$ sont les images respectives des composantes, incluse à gauche, dense à droite.

Toute distribution d définie sur le produit cartésien d'ensembles I, D a pour image dans le plan yz un couple de points, situés respectivement au-dessous et au-dessus de la diagonale principale, et auquel correspond le couple de vecteurs (\vec{I}_n, \vec{D}_n) .

Le produit d'une suite de distributions s'obtient en considérant la suite de tous les couples ordonnés (\vec{I}_n, \vec{D}_n) et en leur substituant leurs résultantes dans tous les cas : I non suivi par D (un tel couple étant par définition indécomposable).

L'opération est associative et non commutative. Le point image du résultat est obtenu par les additions vectorielles correspondantes.

Soit par exemple : $(\vec{I}_1, \vec{D}_1) + (\vec{I}_2, \vec{D}_2) + \dots$

Selon que $\vec{D}_1 + \vec{I}_2$ appartient à I ou D on l'ajoute à I_1 ou D_2 , de sorte qu'il ne reste plus qu'un couple \vec{I}, \vec{D} égal :

- dans le 1er cas à : $(\vec{I}_1 + \vec{D}_2 + \vec{I}_2, \vec{D}_2)$;
- dans le second à : $(\vec{I}_1, \vec{D}_1 + \vec{I}_2 + \vec{D}_2)$.

V et W prennent les valeurs respectives suivantes qui étaient d'ailleurs prévisibles :

$$(V_1 - W_1 + V_2, W_2)$$

$$(V_1, W_1 - V_2 + W_2)$$

(dans le 1er cas, il y a "absorption" complète de W_1 par V_2 , dans le second cas il y a report sur W_2 de la masse non absorbée $(W_1 - V_2)$).

a) Munissons $E = ID$ de la relation d'équivalence R_1 :

$$(I, D) R_1 (I', D') \iff (V, W) = (V', W')$$

L'ensemble quotient ID/R_1 constitue un *groupe multiplicatif non commutatif*, pour la loi produit, d'élément neutre (VV) .

Tout élément (VW) a pour symétrique (WV) , puisque

$$(VW)(WV) = (VV)$$

b) Munissons ID de la relation d'équivalence R_2

$$(ID) R_2 (I' D') \iff V - W = V' - W'$$

L'ensemble quotient ID/R_2 constitue un *groupe additif* pour la loi produit considérée. L'élément neutre est 0 donc identique à celui du cas précédent (l'ensemble E a donc pour noyau $E^{V,V}$).

Il y a lieu de noter que les éléments duals dans les systèmes de type I seront définis par la relation d'équivalence

$$(E_{yz}) R_2 (E_{y',z'}) \iff (y - Z) = (y' - Z')$$

L'élément neutre (y, y) correspond aux chaînes alternées complètes c'est-à-dire comprises entre deux états extrêmes 0.

3/ Composition.

L'opération "produit", associant à tout couple rangé de distributions de E , une distribution du même ensemble entraîne l'existence d'une loi de composition :

$$d_3 = d_1^* d_2$$

s'explicitant de différentes façons selon les paramètres laissés libres et le domaine d'application.

Exemples -

a) Le plus simple résulte de la définition de toute distribution sur l'ensemble $E = I D$

$$E_y^{v, w} = I_{\bar{y}_1}^v \cdot D_{\bar{y}_1}^w$$

b) On se donne une partition $y_1 + \bar{y}_1 = y$ et on décompose les distributions E_y^w suivant l'état w_1 en y_1

$$E_y^w = E_{y_1}^{w_1} \cdot E_{\bar{y}_1 \bar{z}_1}^w + E_{y_1}^{w_1} \cdot E_{\bar{y}_1 \bar{z}_1}^{\leq w}$$

(nécessité de distinguer deux cas, selon qu'il y a ou non enchaînement sur \bar{y}_1).

La décomposition de $E_y^{\leq w}$ est plus simple :

$$E_y^{\leq w} = E_{y_1}^{w_1} \cdot E_{\bar{y}_1 \bar{z}_1}^{\leq w}$$

c) Notons $D_{y_1}^m$ le sous ensemble de distributions denses de supports y_1 atteignant m pour la première fois en $y_1 \leq y$.

Considérons par ailleurs D_y^m .

L'état m est atteint pour la première fois en l'un des points $0, \dots, i \dots, y$, les distributions complémentaires à droite de y_1 étant constituées du sous-ensemble $E_{\bar{y}_1 \bar{y}_1}^{\leq m}$, en sorte que l'on peut écrire

$$D_y^m = D_{y_1}^m \cdot E_{\bar{y}_1 \bar{y}_1}^{\leq m}$$

Relation intéressante liant les sous-ensembles

$$D_y^m \text{ et } D_{y_1}^m.$$

On obtient de même

$$C_y^{\text{sup. } w \geq m} = D_{y_1}^m \cdot I_{\bar{y}_2}^m$$

(on doit avoir $0 \leq y_1 \leq y - m$)

a) Composition interne sur I.

On peut écrire :

$$I^v = I^{v_1} * I^{v_2}$$

$$v_1 + v_2 = v$$

En d'autres termes à tout couple ordonné (v_1, v_2) d'éléments de I^v correspond l'élément $(v_1 + v_2)$ du même ensemble :

$$v_1 * v_2 = v_1 + v_2$$

La loi $*$ est associative et commutative, tout élément est régulier et il existe un élément unité.

I constitue un sous-ensemble stable ou "fermé" pour la loi de composition.

Il en résulte que l'ensemble I muni de la loi d'équivalence V (même valeur v) constitue un semi-groupe commutatif pour la loi $*$.

L'ensemble D du fait de sa dualité avec I jouit d'une propriété analogue.

Conséquences : considérons le sous-ensemble

$$I_{y_1 z_1}^v D_{y_2 z_2}^w$$

Substituons aux distributions D leurs homologues de I ; on établit la bijection :

$$I_{y_1 z_1}^v D_{y_2 z_2}^w \leftrightarrow I_{y_1 z_1}^v I_{z_2 y_2}^w$$

qui par sommation dans le domaine défini par :

$$y_1 + y_2 = y \quad \text{ou} \quad z_1 + z_2 = z$$

devient

$$E_{yz}^{vw} \leftrightarrow I_{y+w, z-w}^{v+w} = I_{z+v, y-v}^{v+w}$$

(des expressions équivalentes peuvent être obtenues avec les D).

Il apparaît, entre autres conséquences, que :

- les ensembles E et I "paramétrisés" par (x, y, v, w) sont dénombrables l'un par l'autre.

b) Opérations externes sur I et D.

On peut écrire :

$$I_{y+w} = \sum_{v \leq w} E_{y, v}^{v+w} I_v^v$$

(partition selon la portion de v de l'intervalle w), ou

$$I_{y+w} = \sum_{w_1 \leq w} E_{y, w_1}^{w_1} I_w^{y+w_1}$$

(partition selon l'état w_1 au point y).

Utilisant les notations matricielles :

$$\begin{aligned} \| I_y \dots I_{y+w} \| &= \| E_y^{\circ} \dots E_y^{\leq w} \| \begin{vmatrix} I_0^{\circ} & \dots & I_w^{\circ} \\ I_1^1 & \dots & I_w^1 \\ \dots & & \dots \\ & & I_w^w \end{vmatrix} \\ &= \| E_y^{\circ} \dots E_y^w \| \begin{vmatrix} I_0^{\circ} & \dots & I_w^{\geq 0} \\ I_1^1 & \dots & I_w^{\geq 1} \\ \dots & & \dots \\ & & I_w^w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que pour passer des $E^{\leq w}$ aux E^w il faut substituer aux I^v les $I^{\geq v}$.

Il est intéressant d'observer qu'en considérant dans le premier membre des distributions C (chafnes complètes). Le premier facteur du second membre est constitué de distributions D (denses).

Inversement, on définit de façon analogue des relations externes sur D .

On pose : $y = i + w$, w étant donné, on fait varier i . On obtient des relations telles que :

$$\| C_w \dots C_{2w} \| = \| I_w^{\circ} \dots I_w^w \| \begin{vmatrix} D_0^{\circ} & \dots & D_w^{\circ} \\ \dots & & \dots \\ \dots & & \dots \\ D_0^w & \dots & D_w^w \end{vmatrix}$$

4/ Intersection de distributions.

Les sous-ensembles de distributions de E les plus usuels dans les applications se définissent commodément par l'intersection de sous-ensembles simples.

On a en particulier la relation suivante :

$$E_{y,z}^{\leq w} I_{w,0} = E_{y,z} I_{w,0} \cap I_{y+w,z} = I_{y+w,z} - \bar{E}_{yz}$$

Pour simplifier ce qui suit, faisons abstraction des intervalles vides à droite $I_{w,0}$ intervenant comme facteurs constants.

\bar{E}_{yz} est formé des distributions de $I_{y+w,z}$ ayant au moins un impact sur la portion w de l'intervalle $y + w$. Le sous-ensemble de \bar{E}_{yz} correspondant à un dernier impact de masse α_1 est inclus dans (1) :

(1) Mise en coïncidence des fermetures à droite de $E_{w-\alpha}$ et $I_{y+w-\alpha}$.

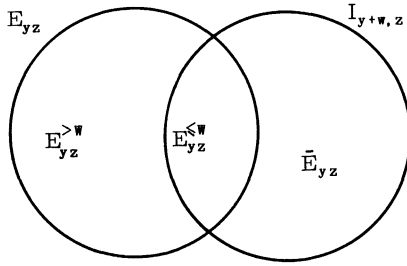


Figure 2.13

$$S_{\alpha_1} = E_{w-\alpha_1, \alpha_1} \times I_{y+w-\alpha_1, z-\alpha_1}$$

en sorte que :

$$\bar{E}_{yz} = \bigcup S_{\alpha_1}$$

Un raisonnement analogue à celui conduisant à la condition généralisée "ou" conduit à l'expression :

$$E_{yz}^{<=w} = S_0 - S_1 + S_2 \dots$$

où l'on pose :

$$S_0 = I_{y+w, z}$$

$$S_1 = \sum S_{\alpha}$$

$$S_2 = \sum S_{\alpha, \beta}$$

.....

La vérification du résultat précédent est la suivante : considérons une distribution de \bar{E}_{yz} incluse dans un sous-ensemble tel que $S_{\alpha, \beta \dots}$.

Réunissons aux masses $\alpha, \beta \dots$ les autres masses impacts sur w prises une à une dans l'ordre des impacts de droite à gauche tant que le segment terminal ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$) est libre d'impacts.

Le sous-ensemble d'ordre maximum ($\dots \alpha \dots \beta$) ainsi élargi comprend :

- l'ensemble minimum $\alpha_1 \dots \alpha_q$ incluant $\alpha, \beta \dots$
- +
- éventuellement les masses $\alpha_r \dots$

On vérifie aisément que la distribution initiale est comprise :

une fois dans	$S_{\alpha_r \dots}$	
C_p^1	" "	$S_{\alpha_1, \alpha_r \dots}$
C_p^2	" "	$S_{\alpha_1 \alpha_j, \alpha_r \dots}$
.....
C_p^p	fois dans	$S_{\alpha_1 \dots \alpha_q, \alpha_r \dots}$

$$i, j \dots \in 1 \dots p$$

Ce qui conduit à un bilan $(1 - 1)^a = 0$ dans le second membre de (1).

Nous aurons également à considérer les intersections de distributions projetées à droite et projetées à gauche. Les distributions denses d'état final w atteint pour la première fois étant notées :

$$D^{\#}$$

leurs inverses sont nécessairement denses et d'état final égal à w .

Le sous-ensemble des distributions $D^{\#}$ est ainsi caractérisé par la propriété d'un état final indépendant du sens de proportion des masses.

$$D_y^{\#} = D_y^{\#} \cap D_y^{\#}$$

5/ Structures des systèmes sans dispositif d'attente.

Ces systèmes "bis" constituent un ensemble cohérent lié par des propriétés de dualité analogues à celles des cas I, II et III.

Etant donné le moindre intérêt de ces systèmes dans les applications, nous n'en développerons pas ici l'analyse (d'ailleurs plus sommaire), nous limitant aux remarques suivantes :

a) Le contenu w à tout instant d'un système sans dispositif d'attente (cas II bis par exemple) est à deux composantes :

w_1 : temps d'achèvement du service en cours,

w_2 : temps correspondant aux arrivées perdues par le système.

Si l'état du système est seulement observé du point de vue de l'arrivant, c'est-à-dire aux instants d'arrivée, on peut admettre que deux états sont seulement à considérer : "libre" et "actif".

b) On appliquera les mêmes principes de décomposition, toujours possible de toute distribution, en une distribution incluse à gauche ($w_1 = 0$), dense à droite ($v = 0$).

c) Contrairement aux autres cas on ne peut définir le "Produit" de deux distributions de façon simple, autrement que dans l'hypothèse de distributions incluses pour lequel existe une loi de composition interne.

Il n'existe pas par ailleurs de propriétés de dualité entre distributions I et D.