REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

MARIUSZ J. WASILEWSKI

Sur certaines propriétés de la distribution gamma généralisée

Revue de statistique appliquée, tome 15, nº 1 (1967), p. 95-105
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1967__15_1_95_0>

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DE LA DISTRIBUTION GAMMA GÉNÉRALISÉE

Mariusz J. WASILEWSKI
(Université technique de Lodz)

1 - INTRODUCTION

Au cours des dernières années on a publié plusieurs travaux concernant l'estimation des paramètres des mélanges de deux distributions de même type à un paramètre. Ce sont entre autres les travaux de P. Rider, [I], [II] pour la distribution exponentielle et celle de Weibull, de W. Krysichi [III] pour la distribution de Rayleigh, et de Wasilewski [IV] pour la distribution de Maxwell. Dans tous ces travaux à l'estimation des trois paramètres inconnus, on a appliqué la méthode des moments. On peut obtenir des résultats identiques comme cas particuliers des estimateurs des paramètres d'un mélange de deux distributions gamma généralisées dont la densité est de la forme :

$$(1.1) \quad f(x\ ,\ a\ ,\ \alpha,\ \beta) = \frac{\alpha}{a^{\beta/\alpha}\,\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\ x^{\beta-1}\exp\left(-\frac{x^{\alpha}}{a}\right) \qquad \text{pour } x > 0$$

avec $a > 0$, α et β étant des nombres positifs quelconques.

Le mélange des deux distributions (1.1) dans la proportion $p:(1-p)$ $0 < p < 1$, les valeurs α et β étant déterminées, à la densité

$$(1.2) \quad g(x\ ,\ p\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \alpha\ ,\ \beta) = p\cdot f(x\ ,\ a_1\ ,\ \alpha\ ,\beta\ ) + (1-p)\cdot f(x\ ,\ a_2\ ,\ \alpha\ ,\beta)$$

où $x > 0$, tandis que a_1 et a_2 sont des constantes positives arbitrairement choisies.

En adoptant dans la formule (1.2) pour α et β des valeurs convenables, nous obtenons les cas particuliers suivants :

(1.3) $g(x\ ,\ p\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ 1\ ,\ \beta)$ - densité d'un mélange de deux distributions gamma,

(1.4) $g(x\ ,\ p\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \alpha\ ,\ \alpha)$ - densité d'un mélange de deux distributions de Weibull, (fig. 1, 2, 3)

(1.5) $g(x\ ,\ p\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ 1\ ,\ 1)$ - densité d'un mélange de deux distributions exponentielles,

(1.6) $g(x\ ,\ p\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ 2\ ,\ 2)$ - densité d'un mélange de deux distributions de Rayleigh, (fig. 4)

(1.7) $g(x\ ,\ p\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ 2\ ,\ 3)$ - densité d'un mélange de deux distributions de Maxwell, (fig. 5)

(1.8) $g(x\ ,\ p\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ 2\ ,\ 1)$ - densité d'un mélange de deux distributions normales unilatéralement tronquées (à gauche) au point zéro $N\left(O, \sqrt{\frac{a_1}{2}}\right)$ et $N\left(O, \sqrt{\frac{a_2}{2}}\right)$.

2 - ESTIMATION DES PARAMETRES p, a_1, a_2 D'UN MELANGE DE DEUX DISTRIBUTIONS GAMMA GENERALISEES.

Pour rechercher les estimateurs $\hat{p}$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ des paramètres p, a_1, et a_2 nous appliquerons la méthode des moments. Le moment d'ordre k du mélange (1.2) s'exprime par la formule

$$(2.1) \qquad m_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \left[p\, a_1^{k/\alpha} + (1-p)\, a_2^{k/\alpha} \right] \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots$$

Comme nous estimons trois paramètres, nous nous servirons des trois premiers moments m_1, m_2, m_3. De la population formée du mélange de deux distributions gamma généralisées nous prenons un échantillon aléatoire de n éléments x_1, x_2, ... x_n et sur cette base nous calculons les trois premiers moments

$$(2.2) \qquad m'_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad m'_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad m'_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3$$

En comparant maintenant $m'_i = m_i$ pour $i = 1, 2, 3$ nous obtenons un système de trois équations à trois inconnues $\hat{p}$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$.

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} m'_1 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1+\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \left[\hat{p}\, \hat{a}_1^{1/\alpha} + (1-\hat{p})\, \hat{a}_2^{1/\alpha}\right] \\ m'_2 &= \frac{\Gamma\left(\frac{2+\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \left[\hat{p}\, \hat{a}_1^{2/\alpha} + (1-\hat{p})\, \hat{a}_2^{2/\alpha}\right] \\ m'_3 &= \frac{\Gamma\left(\frac{3+\beta}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} \left[\hat{p}\, \hat{a}_1^{3/\alpha} + (1-\hat{p})\, \hat{a}_2^{3/\alpha}\right] \end{aligned}$$

Introduisons les notations :

$$(2.4) \qquad \hat{a}_i^{1/\alpha} = b_i,\ i = 1, 2. \quad \text{Ainsi que } c_k = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) m'_k}{\Gamma\left(\frac{k+\beta}{\alpha}\right)} \quad \text{pour } k = 1, 2, 3.$$

Le système d'équations (2.3) prendra maintenant la forme

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} c_1 - b_2 &= \hat{p}(b_1 - b_2) \\ c_2 - b_2^2 &= \hat{p}(b_1^2 - b_2^2) \\ c_3 - b_2^3 &= \hat{p}(b_1^3 - b_2^3) \end{aligned}$$

En divisant membre à membre la deuxième et la troisième équation par la première nous obtenons après quelques petites transformations

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} & c_1(b_1 + b_2) - b_1b_2 - c_2 = 0 \\ & c_1(b_1 + b_2)^2 - (b_1 + b_2)\, b_1b_2 - c_1b_1b_2 - c_3 = 0 \end{aligned}$$

Des équations ci-dessus nous calculons

$$(2.7)\qquad b_1 + b_2 = \frac{c_3 - c_1c_2}{c_2 - c_1^2} \qquad b_1b_2 = \frac{c_1c_3 - c_2^2}{c_2 - c_1^2}$$

à condition que $c_2 - c_1^2 \neq 0$. Donc b_1 et b_2 sont les racines de l'équation

$$(2.8)\qquad (c_2 - c_1^2)\, b^2 + (c_1c_2 - c_3)\, b + (c_1c_3 - c_2^2) = 0$$

Le discriminant de l'équation (2.8) a pour valeur :

$$\Delta = 4\, c_1^3c_3 + 4\, c_2^3 + c_3^2 - 3\, c_1^2c_2^2 - 6\, c_1c_2c_3$$

D'où

$$(2.9)\qquad b' = \frac{c_3 - c_1c_2 + \sqrt{\Delta}}{2(c_2 - c_1^2)} \qquad \text{ainsi que} \qquad b'' = \frac{c_3 - c_1c_2 - \sqrt{\Delta}}{2(c_2 - c_1^2)}$$

De la première équation du système (2.5) nous pouvons déterminer l'estimateur $\hat{p}$ du paramètre p

$$(2.10)\qquad \hat{p} = \frac{c_1 - b_2}{b_1 - b_2} = \frac{c_1 - \sqrt[\alpha]{\hat{a}_2}}{\sqrt[\alpha]{\hat{a}_1} - \sqrt[\alpha]{\hat{a}_2}}$$

Il faut encore répondre à la question : laquelle des expressions $(b')^\alpha$, $(b'')^\alpha$ doit être considérée comme l'estimateur $\hat{a}_1$, et laquelle comme l'estimateur $\hat{a}_2$? Remarquons que si dans la formule (2.9) nous remplaçons $\hat{a}_1$ par $\hat{a}_2$ et $\hat{a}_2$ par $\hat{a}_1$ nous obtiendrons alors l'estimation $1-\hat{p}$. On doit en conclure que, par exemple, on peut choisir $(b')^\alpha$ pour l'estimateur $\hat{a}_1$, et $(b'')^\alpha$ pour $\hat{a}_2$ ou inversement.

Les estimateurs obtenus sont fonctions des moments de l'échantillon aléatoire, il peut donc arriver que tous ou certains ne remplissent pas les conditions posées ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $0 < p < 1$). Cela peut arriver lorsque l'échantillon est trop petit et donc ne donne pas une estimation valable, ou dans le cas où l'hypothèse que l'échantillon aléatoire examiné provient d'un mélange de deux distributions gamma généralisées est fausse. Il faudrait donc augmenter l'échantillon et procéder à nouveau à l'estimation des paramètres inconnus. Si dans ce cas également les estimations obtenues ne remplissent pas les conditions données il faut admettre que l'hypothèse concernant le mélange de deux distributions gamma généralisées est fausse.

Examinons comment se comportent les estimations (2.9) et (2.10) pour $n \longrightarrow \infty$, lorsque l'hypothèse du mélange de deux distributions gamma généralisées est vraie. Comme on le sait, pour $n \longrightarrow \infty$ les moments de l'échantillon convergent en probabilité vers les moments correspondants de la population générale, $m_i' \longrightarrow m_i$.

Ainsi donc, lorsque $n \longrightarrow \infty$

$$c_k \longrightarrow p\ a_1^{k/\alpha} + (1-p)\ a_2^{k/\alpha} \qquad\qquad \text{pour } k = 1, 2, 3.$$

et le discriminant de l'équation (2. 8), après quelques calculs se réduit à :

$$\Delta \longrightarrow p^2(1-p)^2\ (a_1^{1/\alpha} - a_2^{1/\alpha})^6$$

De là ainsi que de (2. 9) nous avons $b' \longrightarrow a_1^{1/\alpha}$, et $b'' \longrightarrow a_2^{1/\alpha}$. Donc, lorsque $n \longrightarrow \infty, \hat{a}_1 \longrightarrow a_1,\ \hat{a}_2 \longrightarrow a_2,\ \hat{p} \longrightarrow p$.

Les estimateurs donnés sont donc convergents.

Occupons-nous encore du cas où $a_1 = a_2$ et où l'hypothèse du mélange de 2 distributions généralisées gamma est vraie. Lorsque la taille de l'échantillon $n \longrightarrow \infty$, $m_1' \longrightarrow m_1$

Pour $n \longrightarrow \infty$, $c_k \longrightarrow a^{k/\alpha}$

d'où

$$\begin{aligned} c_2 - c_1^2 &\longrightarrow 0 \\ c_1 c_2 - c_3 &\longrightarrow 0 \\ c_1 c_3 - c_2^2 &\longrightarrow 0\ , \end{aligned}$$

c'est-à-dire que tous les coefficients de l'équation (2. 8) tendent vers zéro.

Si donc en pratique les coefficients de l'équation (2. 8) égalent zéro ou sont proches de zéro, on peut supposer (en prenant en considération la grandeur de l'échantillon) que l'échantillon prélevé provient d'un mélange de deux populations soit identiques soit se distinguant à peine d'une distribution gamma généralisée.

Pratiquement il est rare que nous sachions si l'échantillon examiné provient d'une population homogène ou d'un mélange de deux populations d'un même type. C'est pourquoi dans un cas douteux il faudrait d'abord poser l'hypothèse H_1, que la population est homogène et, se basant sur l'échantillon prélevé, procéder à l'estimation d'un paramètre, ensuite vérifier la validité de l'ajustement p. ex. à l'aide du test χ^2 de Pearson ou λ de Kolmogorow. Dans le cas où l'hypothèse H_1 a été rejetée on peut, le cas échéant, augmenter l'échantillon et l'examiner à nouveau. Il ne faudrait poser l'hypothèse H_2 concernant un mélange qu'après avoir eu à rejeter la précédente. Cependant il faut souligner ici que dans le cas où a_1 et a_2 diffèrent imperceptiblement il peut être difficile de décider si l'échantillon provient d'une distribution simple ou d'un mélange.

Considérons maintenant l'exemple suivant :

Exemple 2. 1. La caractéristique X d'un lot de marchandises est soumise au mélange de deux distributions de Maxwell. Pour estimer les paramètres a_1, a_2, et p, on a pris un échantillon de 500 éléments et l'on a obtenu les résultats suivants :

x	0 – 0,1	0,1 – 0,2	0,2 – 0,3	0,3 – 0,4	0,4 – 0,5	0,5 – 0,6	0,6 – 0,7	0,7 – 0,8	0,8 – 0,9	0,9 – 1,0	1,0 – 1,1	1,1 – 1,2	1,2 – 1,3	1,3 – 1,4
n_i	21	72	57	56	67	64	55	42	30	18	10	5	2	1

Se basant sur l'échantillon prélevé et profitant des estimateurs (2. 9) et (2. 10) on a obtenu les estimations suivantes :

$$\hat{a}_1 = 0,0092 \qquad \hat{a}_2 = 0,1250 \qquad \hat{p} = 0,1978$$

Vérifions maintenant à l'aide du test χ^2 l'hypothèse H que l'échantillon étudié provient d'un mélange de deux distributions de Maxwell dont les paramètres sont $a_1 = 0,01$ $a_2 = 0,125$ $p = 0,2$.

Le tableau suivant présente les résultats des calculs :

N° d'ordre	classe	n_i	Π_i	$n\Pi_i$	$n_i - n\Pi_i$	$(n_i - n\Pi_i)^2$	$\frac{(n_i - n\Pi_i)^2}{n\Pi_i}$
1	0,0 - 0,1	21	0,0445	22,25	- 1,25	1,5625	0,0702
2	0,1 - 0,2	72	0,1383	69,15	2,85	8,1225	0,1175
3	0,2 - 0,3	57	0,1166	58,30	- 1,30	1,6900	0,0290
4	0,3 - 0,4	56	0,1133	56,65	- 0,65	0,4225	0,0075
5	0,4 - 0,5	67	0,1294	64,70	2,30	5,2900	0,0818
6	0,5 - 0,6	64	0,1295	64,75	- 0,75	0,5625	0,0087
7	0,6 - 0,7	55	0,1122	56,10	- 1,10	1,2100	0,0216
8	0,7 - 0,8	42	0,0856	42,80	- 0,80	0,6400	0,0150
9	0,8 - 0,9	30	0,0582	29,10	0,90	0,8100	0,0278
10	0,9 - 1,0	18	0,0356	17,80	0,20	0,0400	0,0022
11	1,0 - 1,1	10	0,0196	9,80	0,20	0,0400	0,0041
12	1,1 - 1,2	5	0,0098	4,90	0,10	0,0100	0,0020
13	1,2 - 1,3	2	0,0045	2,25	- 0,25	0,0625	0,0278
14	1,3 - 1,4	1	0,0029	1,45	- 0,45	0,2025	0,1397

avec k = 10 degrés (14-1-3) de liberté, il n'y a pas de raison pour rejeter l'hypothèse même au niveau de confiance $\alpha = 0,99$

$$(\chi^2 0,99 \ ; \ 10 = 2,558)$$

Les résultats obtenus prouvent une très grande concordance avec l'hypothèse H. On pouvait prévoir ce résultat car l'échantillon avait été tiré d'une population artificiellement constituée et formée par le mélange de deux distributions de Maxwell de paramètres

$$a_1 = 0,1 \qquad a_2 = 0,125 \qquad \text{et} \qquad p = 0,2$$

3 - CONDITIONS DE L'UNI- ET DE LA BIMODALITE AINSI QUE DE L'AMODALITE DU MELANGE DE DEUX DISTRIBUTIONS GAMMA GENERALISEES.

Comme cela ne va pas contribuer à limiter nos considérations nous allons continuer à poser $0 < a_1 < a_2$.

Théorème 3.1. La densité $g(x, p, a_1, a_2, \alpha, \beta)$ déterminée par la formule (1.2) où $x > 0$, $p \in (0,1)$ et $0 < a_1 < a_2$ est amodale lorsque $0 < \beta < 1$ et seulement alors.

Théorème 3.2. La densité $g(x, p, a_1, a_2 \ \alpha, \beta)$ déterminée par la formule (1.2) où $x > 0$, $p \in (0,1)$ et $0 < a_1 < a_2$ est unimodale lorsque l'une des trois conditions suivantes est réalisée et seulement alors

$$1/ \quad a_2 \leqslant \frac{2\alpha + \beta - 1 + 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta - 1)}}{\beta - 1} a_1$$

pour une valeur arbitrairement choisie de $p \in (0,1)$

$$2/ \quad a_2 > \frac{2\alpha + \beta - 1 + 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta - 1)}}{\beta - 1} a_1 \quad \text{et} \quad p \leqslant \frac{m}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + m}$$

$$3/ \quad a_2 > \frac{2\alpha + \beta - 1 + 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta - 1)}}{\beta - 1} a_1 \quad \text{et} \quad p \geqslant \frac{M}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + M}$$

où m et M ont été déterminés par les formules (3.3) et la valeur modale appartient à l'intervale $\left(\sqrt[\alpha]{\frac{a_1(\beta - 1)}{\alpha}}, \sqrt[\alpha]{\frac{a_2(\beta - 1)}{\alpha}}\right)$.

Théorème 3.3. La densité $g(x, p, a_1, a_2, \alpha, \beta)$ déterminée par la formule (1.2) où $x > 0$, $p \in (0,1)$, et $0 < a_1 < a_2$ ainsi que $\beta > 1$ est bimodale lorsque sont réalisées simultanément les conditions suivantes et seulement alors :

$$1/ \quad a_2 > \frac{2\alpha + \beta - 1 + 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta - 1)}}{\beta - 1} a_1$$

$$2/ \quad \frac{m}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + m} < p < \frac{M}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + M}$$

où m et M sont déterminés par les formules (3.3) et les valeurs modales appartiennent à l'intervalle $\left(\sqrt[\alpha]{\frac{a_1(\beta - 1)}{\alpha}}, \sqrt[\alpha]{\frac{a_2(\beta - 1)}{\alpha}}\right)$

M et m figurant dans les deux théorèmes sont des valeurs de la fonction

$$(3.1) \qquad \psi(x) = \frac{[\alpha x^\alpha - a_2(\beta - 1) \ \exp]\left[\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2}\right] x^\alpha}{a_1(\beta - 1) - \alpha x^\alpha}$$

aux points

$$x_1 = \sqrt[\alpha]{\frac{\beta - 1}{2\alpha}\left[a_2 + a_1 - \sqrt{a_2^2 - \frac{2(2\alpha + \beta - 1)}{\beta - 1}a_1a_2 + a_1^2}\right]}$$

(3. 2)

$$x_2 = \sqrt[\alpha]{\frac{\beta - 1}{2\alpha}\left[a_2 + a_1 + \sqrt{a_2^2 - \frac{2(2\alpha + \beta - 1)}{\beta - 1}a_1a_2 + a_1^2}\right]}$$

Donc

(3. 3) $$m = \psi(x_1) \qquad M = \psi(x_2)$$

Nous démontrerons en même temps tous les théorèmes exposés .

Démonstration : Pour trouver les extrêmes de la fonction $g(x, p, a_1, a_2, \alpha, \beta)$ nous allons étudier sa dérivée.

$$g'_x(x, p, a_1, a_2, \alpha, \beta) = \frac{p\,\alpha^2 x^{\beta-2}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) a_1^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}} \exp\left(-\frac{x^\alpha}{a_1}\right)\left[\frac{a_1(\beta - 1)}{\alpha} - x^\alpha\right] +$$

(3. 4)

$$+ \frac{(1-p)\,\alpha^2 x^{\beta-2}}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) a_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}} \exp\left(-\frac{x^\alpha}{a_2}\right)\left[\frac{a_2(\beta - 1)}{\alpha} - x^\alpha\right]$$

Les facteurs figurant dans les deux composantes devant les crochets sont positifs. Si $0 < \beta \leqslant 1$ alors, (étant donné que $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ et α 0), $g'_x(x, p, a_1, a_2, \alpha, \beta) < 0$ pour chaque $x > 0$. Dans ce cas la fonction $g(x, p, a_1, a_2, \alpha, \beta)$ est décroissante, donc amodale.

La condition nécessaire de l'existence d'un extrêmum de la fonction est que la première dérivée soit égale à zéro :

(3. 5) $$g'(x, p, a_1, a_2, \alpha, \beta) = 0$$

La condition (3. 5) ne peut être réalisée que lorsque $\beta > 1$. Ecrivons l'équation (3. 5) sous une autre forme :

$$\frac{(1-p)\,\alpha x^{\beta-2}[\alpha x^\alpha - a_1(\beta-1)]}{\Gamma\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) a_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \exp\left(-\frac{x^\alpha}{a_1}\right)} \left\{\frac{\alpha x^\alpha - a_2(\beta - 1)}{a_1(\beta-1) - \alpha x^\alpha} \exp\left(\frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} x^\alpha\right) - \frac{p}{1-p}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}\right\} = 0$$

(3. 6)

Le facteur devant l'accolade prend la valeur zéro pour $x = \sqrt[\alpha]{\frac{a_1(\beta-1)}{\alpha}}$, cependant cette valeur n'est pas la solution de l'équation (3. 5). Divisons l'équation (3. 6) par ce facteur et écrivons le résultat sous la forme

(3. 7) $$\varphi(p) \equiv \frac{p}{1 - p}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha x^\alpha - a_2(\beta - 1)}{a_1(\beta - 1) - \alpha x^\alpha} \exp\left(\frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} x^\alpha\right) \equiv \psi(x)$$

On ne peut pas résoudre effectivement l'équation (3. 7). Nous allons donc examiner son membre gauche et son membre droit.

La fonction $\varphi(p)$ est déterminée pour $p \in (0, 1)$ et dans cet intervalle elle est strictement croissante. Les valeurs de la fonction $\varphi(p)$ appartiennent à l'intervalle $(0, +\infty)$. (Fig. 6).

La fonction $\psi(x)$ est déterminée pour $x > 0$ à l'exception de $x = \sqrt[\alpha]{\frac{a_1(\beta - 1)}{\alpha}}$ et prend des valeurs positives pour :

$$\sqrt[\alpha]{\frac{a_1(\beta - 1)}{\alpha}} < x < \sqrt[\alpha]{\frac{a_2(\beta - 1)}{\alpha}}$$

Comme la fonction $\varphi(p)$ ne prend que des valeurs positives l'équation (3.7) ne peut être satisfaite que lorsque $\psi(x) > 0$. C'est à dire lorsque $x \in \left(\sqrt[\alpha]{\frac{a_1(\beta-1)}{\alpha}}, \sqrt[\alpha]{\frac{a_2(\beta-1)}{\alpha}}\right)$. Pour simplifier nous désignerons cet intervalle par J.

Examinons maintenant comment se comporte la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle J.

$$\lim_{x \to \sqrt[\alpha]{\frac{a_1(\beta-1)}{\alpha}}^+} \psi(x) = +\infty \qquad \psi\left(\sqrt[\alpha]{\frac{a_2(\beta - 1)}{\alpha}}\right) = 0 \tag{3.8}$$

$$\psi'(x) = \frac{\alpha^3 x^{\alpha+1}(a_2 - a_1)}{a_1 a_2 [a_1(\beta-1) - \alpha x^\alpha]^2} \exp\left(\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} x^\alpha\right) \left[- x^{2\alpha} + \frac{(a_1+a_2)(\beta-1)}{\alpha} x^\alpha - \frac{a_1 a_2 (\beta-1)(\alpha+\beta-1)}{\alpha^2}\right]$$

(3.9)

Dans l'intervalle J le premier facteur (3.9) est positif, donc le signe de $\psi'(x)$ dépend du signe de l'expression entre crochets. Trouvons donc son point zéro. Posons $x^\alpha = z$

$$z^2 - \frac{(a_1 + a_2)(\beta - 1)}{\alpha} z + \frac{a_1 a_2 (\beta - 1)(\alpha + \beta - 1)}{\alpha^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{(\beta - 1)^2}{\alpha^2} \left[a_2^2 - \frac{2(2\alpha + \beta - 1)}{\beta - 1} a_1 a_2 + a_1^2\right] \tag{3.10}$$

Examinons maintenant le comportement du discriminant (3.10). Il y a deux points zéro.

$$a_2' = \frac{2\alpha + \beta - 1 - 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta - 1)}}{\beta - 1} a_1 \quad ; \quad a_2'' = \frac{2\alpha + \beta - 1 + 2\sqrt{\alpha(\alpha + \beta - 1)}}{\beta - 1} a_1$$

dont le premier doit être rejeté, car par hypothèse nous avons $a_2 > a_1$. Le signe du discriminant (3.10) change de la façon suivante

I)	$\Delta < 0$	lorsque	$a_2 < a_2''$
II)	$\Delta = 0$	lorsque	$a_2 = a_2''$
III)	$\Delta > 0$	lorsque	$a_2 > a_2''$

Dans le cas I, (fig. 7), pour $x \in J$, $\psi'(x) < 0$

Dans le cas II, (fig. 8) pour $x \in J$, $\psi'(x) < 0$ à l'exception du point $x_0 = \sqrt[\alpha]{\frac{(a_1 + a_2)(\beta - 1)}{2\alpha}}$ où $\psi'(x_0) = 0$.

Dans le cas III, (fig. 9), $\psi'(x)$ possède dans l'intervalle J deux points zéro.

$$x_1 = \sqrt[\alpha]{\frac{(a_1 + a_2)(\beta - 1)}{2\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}$$

(3.11)

$$x_2 = \sqrt[\alpha]{\frac{(a_1 + a_2)(\beta - 1)}{2\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}}$$

où Δ est déterminé par la formule (3.10).

D'où

$\psi'(x) < 0$ pour $\sqrt[\alpha]{\frac{a_1(\beta - 1)}{\alpha}} < x < x_1$ ou $x_2 < x < \sqrt[\alpha]{\frac{a_2(\beta - 1)}{\alpha}}$

$\psi'(x) = 0$ pour $x = x_1$ ou $x = x_2$

$\psi'(x) > 0$ pour $x_1 < x < x_2$

La fonction $\psi(x)$ présente au point x_1 un minimum et au point x_2 un maximum. Introduisons $m = \psi(x_1)$, $M = \psi(x_2)$. Il n'est pas difficile de démontrer que les deux valeurs extrêmes m et M sont positives et $m < M$.

Revenons maintenant à l'équation (3.7). Pour chaque $k_0 \in (0, +\infty)$ (fig. 6) on peut choisir un $p_0 \in (0,1)$ tel que $\varphi(p_0) = k_0$. Dans le cas I et II la fonction $\psi(x)$ n'atteint la valeur k_0 que dans un seul point $x' \in J$. C'est-à-dire $\psi(x') = k_0$. Donc pour un $p_0 \in (0,1)$ déterminé d'avance il existe toujours exactement un point $x' \in J$ tel que $\varphi(p_0) = \psi(x')$). Il n'est pas difficile de démontrer qu'au point x' il existe un maximum.

Dans le cas III lorsque $k_0 \in (0, m >$ ou bien $k_0 \in < M, +\infty)$, la fonction $\psi(x)$ ne prend la valeur k_0 que dans un seul point $x' \in J$. Donc pour un $p_0 \in (0,1)$ déterminé tel que $\varphi(p_0) = k_0$ il n'existe qu'une seule valeur $x' \in J$ telle que $\varphi(p_0) = \psi(x')$. Il est facile de démontrer qu'au point x' il existe un maximum.

Si $k_0 \in (m, M)$ (fig. 9), la fonction $\psi(x)$ atteint la valeur k_0 dans trois points x', x'', x''' appartenant à J. Donc pour $p_0 \in (0,1)$ tel que $\varphi(p_0) \in (m, M)$ il existe trois points x', x'', x''' satisfaisant à l'équation (3.7). En x' et x''' il y a des maxima tandis que en x'' nous avons un minimum.

On peut écrire la condition $\varphi(p) \in (m, M)$ sous une autre forme

$$m < \varphi(p) < M$$

D'où

$$\frac{m}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + m} < p < \frac{M}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + M}$$

ce qui termine la démonstration.

On peut démontrer que les valeurs m et M déterminées par les formules (3.3) ne dépendent pas de la valeur de a_1 et a_2 mais de leur rapport

$$\frac{a_2}{a_1} = k$$

Le tableau 3.1 présente les intervalles pour $p(p_1, p_2)$ en fonction de k pour quelques paires choisies des valeurs α et β pour lesquelles la densité $g(x, p, a_1, a_2, \alpha, \beta)$ déterminée par la formule (1.2) est bimodale où

$$p_1 = \frac{m}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + m} \qquad p_2 = \frac{M}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + M}$$

BIBLIOGRAPHIE

[I] RIDER P. - The method of moments applied to a mixture of two exponential distributions. Annals of Math. of Statistics 1960.

[II] RIDER P. - Estimating the parametres of mixed Poisson, binomial and Weibull distributions by the method of moments. Bulletin de l'Institut international de Statistique, XXXIX, 2-e livraison, 225-232.

[III] KRYSICKI W. - Application de la méthode des moments a l'estimation des paramètres d'un mélange de deux distributions de Rayleigh. Revue de Statistique Appliquée. Paris 1963 - Vol. XI - N° 4.

[IV] WASILEWSKI M. J. - Uber gewisse Merkmale der Mischung von zwei Maxwellschen-Verteilungen. Zessyty Naukowe Politechniki Ledzkiej Wkekiennictwo.

Tableau 3. 1

	$\alpha = \beta = 2$ $k > 5+2\sqrt{6} \approx 9,8990$		$\alpha = \beta = 3$ $k > 4+\sqrt{15} \approx 7,8730$		$\alpha = \beta = 4$ $k > 1/3(11+4\sqrt{7}) \approx 7,1944$		$\alpha = m$ $\beta = m+1$ $k > 3+2\sqrt{2} \approx 5,8284$		$\alpha = 1$ $\beta = 3$ $k > 4+2\sqrt{3} \approx 7,4642$		$\alpha = 1$ $\beta = 4$ $k > 9$		$\alpha = 1$ $\beta = 5$ $k > 6+2\sqrt{5} \approx 10,4722$	
	p_1	p_2	p_1	p_2	p_1	p_2	p_1	p_2	p_1	p_2	p_1	p_2	p_1	p_2
6	-	-	-	-	-	-	0,078002	0,079628	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	0,069293	0,097905	-	-	-	-	-	-
8	-	-	0,176845	0,178008	0,217744	0,243672	0,059953	0,135958	0,041027	0,906031	-	-	-	-
9	-	-	0,177648	0,209058	0,214866	0,304408	0,051746	0,200018	0,031303	0,974225	0,013276	0,999877	-	-
10	0,106023	0,106375	0,174119	0,258529	0,209234	0,387984	0,044835	0,298048	0,024332	0,993761	0,009327	0,999988	-	-
11	0,105921	0,118790	0,169088	0,325908	0,202558	0,490156	0,039078	0,431450	0,019240	0,998595	0,006730	0,999999	0,002054	1,000000
12	0,103804	0,138758	0,163502	0,410287	0,195560	0,601604	0,034282	0,585521	0,015451	0,999699	0,004970	1,000000	0,001398	1,000000
13	0,100965	0,166351	0,157787	0,507593	0,188586	0,709248	0,030370	0,731106	0,012580	0,999938	0,003747	1,000000	0,000978	1,000000
14	0,097845	0,202533	0,152155	0,609993	0,181808	0,801285	0,026893	0,843281	0,010370	0,999988	0,002876	1,000000	0,000700	1,000000
15	0,094652	0,248352	0,146712	0,707646	0,175310	0,871719	0,024032	0,915990	0,008644	0,999998	0,002243	1,000000	0,000511	1,000000