REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

L. PROUZA

# Sur la théorie linéaire des régulateurs automatiques avec information incomplète

*Revue de statistique appliquée*, tome 14, n° 4 (1966), p. 75-82

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1966__14_4_75_0>

# SUR LA THÉORIE LINÉAIRE DES RÉGULATEURS AUTOMATIQUES AVEC INFORMATION IMCOMPLÈTE

L. PROUZA
Parduhice (Tchécoslovaquie)

*Dans ce second article, l'auteur développe et généralise des idées déjà présentées dans un précédent article (RSA, 1965 - n° 2).*

On considère une machine sur laquelle sont fabriqués cycliquement dans des intervalles de temps discrets des produits ayant une caractéristique de qualité mesurable.

Les variations de cette caractéristique pendant la production ont des causes aléatoires ou déterminées. On va considérer les causes aléatoires comme suites stationnaires et les causes déterminées comme "sauts".

On examine la structure d'un régulateur linéaire optimal (selon le critère d'erreur quadratique minimum) en supposant que le changement de l'organe de l'exécution de la machine se fait périodiquement après plusieurs cycles de la machine et que l'information est obtenue seulement par échantillons.

## 1 - REGULATEUR AUTOMATIQUE LINEAIRE AVEC INFORMATION INCOMPLETE

Dans l'article présent, nous généralisons des résultats de [L2] et [L3].

Nous supposons que :

a) dans le système, il y a un retard positif de plusieurs cycles,

b) l'appareil utilisé pour mesurer les produits de la machine est sujet à des écarts aléatoires,

c) pour des raisons pratiques, on ne mesure pas tous les produits. La mesure se fait périodiquement sur un échantillon de N produits consécutifs dans chaque groupe de K produits (K > N). Au commencement du groupe suivant (du même effectif K), la position de l'organe d'exécution de la machine s'ajuste et reste la même pendant tout le groupe.

Considérons les figures 1 et 2. Nous voyons la situation générale dans la figure 1. Le résultat de la mesure des N produits dans le premier groupe de K produits est appliqué avec un retard de $l + 1$ cycles pour modifier brusquement la position de l'organe exécutif de la machine. Cette position reste la même pour le groupe suivant de K produits, ...

Considérons maintenant le schéma de la figure 2. Le bloc avec fonction de transfert 1 représente la machine. $\{\eta(t)\}$ est la suite des produits successifs ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Le bloc avec fonction de transfert $z^{-m}$ ($m$ entier, $m \geqq 0$) représente le retard de $m$ cycles nécessaire pour passer le produit à l'instrument de mesure et pour le mesurer. La valeur mesurée est comparée avec une valeur normale, qui peut être supposée nulle, sans perte de généralité.

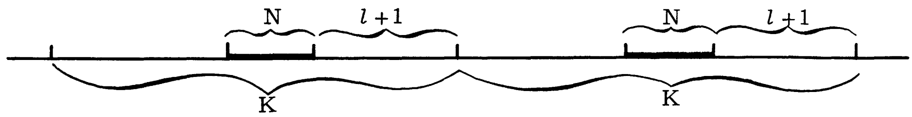


Figure 1

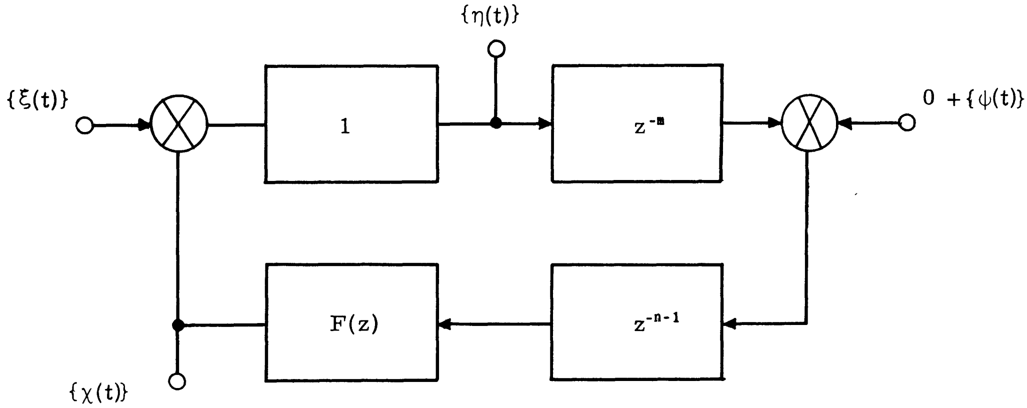


Figure 2

Nous supposons que l'opération de mesure est accompagnée par une erreur aléatoire additive $\{\psi(t)\}$. La différence résultant de la comparaison avance avec un retard de $n + 1$ cycles ($n \geqq 0$) sur un filtre avec la fonction de transfert $F(z)$.

Le signal $\{\chi(t)\}$ à la sortie de ce filtre représente la position de l'organe d'exécution de la machine, laquelle doit compenser des perturbations aléatories ou systématiques, qui dans la figure 2 sont considérées comme une suite aléatoire $\{\xi(t)\}$.

Pour la simplification des calculs, nous supposons que le changement de la position de l'organe d'exécution est suffisamment brusque pour être fini dans un seul cycle de la production. En pratique ce changement doit être rapide pour ne pas déprécier les résultats de la régulation.

Dans ce qui suit nous posons

$$m + n = l \geqq 0 , \tag{1}$$

$$N > 0 , \quad K > 0 , \quad N + l < K \tag{2}$$

## 2 - REGULATEUR OPTIMAL SELON KOLMOGOROV-WIENER

Nous supposons que $\{\xi(t)\}$ et $\{\psi(t)\}$ sont deux suites stationnaires qui ne sont pas corrélées mutuellement et que la suite $\{\psi(t)\}$ est "blanche", c'est-à-dire

$E[\psi(t)] = 0$ pour chaque $t$,

$E[\psi^2(t)] = \sigma_\psi^2 > 0$ pour chaque $t$,

$E[\psi(t) \, . \, \psi(S)] = 0$ pour chaque paire $t$, $s$ avec $t - s \neq 0$,

E étant le symbole de l'espérance mathématique. Nous écrivons $\psi^2(t)$ au lieu de $[\psi(t)]^2$.

La structure du régulateur est décrite par la formule

$$\eta(\tau + k) = \xi(\tau + k) - a_1 \xi(\tau - l - 1) - \dots - a_N \xi(\tau - l - N) -$$
$$- a_1 \psi(\tau - n - 1) - \dots - a_N \psi(\tau - n - N),$$
$$(k = 0, 1, \dots, K - 1) \tag{3}$$

Ici, $\tau$ est arbitraire mais fixe, module K, pendant tous les calculs. Il dépend du choix de "l'origine des temps".

Nous voyons aisément que la suite K-dimensionnelle à la sortie, dont les éléments sont :

$$H(\tau, 0) = \{\eta(\tau), \eta(\tau + 1), \dots, \eta(\tau + K - 1)\},$$
$$H(\tau, 1) = \{\eta(\tau + K), \eta(\tau + K + 1), \dots, \eta(\tau + 2K - 1)\},$$
$$\dots . \dots$$
$$\dots . \dots \tag{4}$$

est stationnaire.

Nous introduisons le critère de l'erreur quadratique minimum sous la forme

$$\frac{1}{K} E [\eta^2(\tau) + \eta^2(\tau + 1) + \dots + \eta^2(\tau + K - 1)] = \min. \tag{5}$$

De (3), nous obtenons pour $k = 0, 1, \dots, K - 1$ :

$$E[\eta^2(\tau + k)] = B_\xi(0) \, . \, (1 + a_1^2 + \dots + a_N^2) + B_\psi(0) \, . \, (a_N^2 + \dots + a_N^2) -$$
$$- 2 a_1 B_\xi(l + k + 1) - \dots - 2 a_N B_\xi(l + k + N) +$$
$$+ 2a_1 a_2 B_\xi(1) + \dots + 2a_1 a_N B_\xi(N - 1) + \dots + 2 a_{N-1} a_N B_\xi(1) \tag{6}$$

Ici, $B_\xi(t) = E[\xi(s) \, \xi(s + t)]$, $B_\psi(t) = E \, \psi(s)[\psi(s + t)]$ sont des fonctions de corrélation respectives. D'après la définition, on a $B_\psi(t) = 0$ pour $t \neq 0$, fait dont nous avons fait usage dans (6). Par le procédé usuel, nous obtenons de (5) et (6) comme condition nécessaire du minimum de (5) le système de N équations ci-après :

$$[B_\xi(0) + B_\psi(0)] \, a_1 + B_\xi(1) \, . \, a_2 + \dots + B_\xi(N - 1) \, . \, a_N =$$
$$= \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} B_\xi(l + 1 + k), \tag{7}$$
$$\vdots$$

$$B_\xi(N-1) \,.\, a_1 + B_\xi(N-2) \,.\, a_2 + \ldots + [B_\xi(0) + B_\psi(0)] \,.\, a_N = \tag{7}$$
$$= \frac{1}{K} \,.\, \sum_{k=0}^{K-1} B_\xi(l+N+k).$$

Il résulte de la forme de ce système que le théorème suivant est valable :

Chaque coefficient $a_1, a_2, \ldots, a_N$ dans la formule (3) satisfaisant la condition nécessaire pour le minimum de (5) est la moyenne arithmétique des K coefficients, qui donnent le filtrage optimal de la suite $\{\xi(t) + \psi(t)\}$ (selon Kolmogorov-Wiener) avec prédiction à

$$l+1 \;,\; l+2 \;, \ldots ,\; l+K$$

cycles.

Maintenant, il est clair que le système (7) donne aussi la condition suffisante pour satisfaire (5).

Pour $K = 1$, nous obtenons la filtration usuelle avec prédiction à $l+1$ cycles, parce que en déduisant (7), nous n'avons pas fait usage de l'hypothèse $N + l < K$.

Si de plus la suite $\{\xi(t)\}$ est "blanche", il résulte de (7) que :

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_N = 0 \;, \tag{8}$$

de sorte que, dans ce cas, la meilleure solution est de ne pas régler la production.

## 3 - REGULATEURS MODIFIES

On suppose maintenant que $\{\psi(t)\}$ est "blanche", et que :

$$\{\xi(t)\} = \{A.t + b + \xi(t)\} \;, \tag{9}$$

où A, b sont deux constantes arbitraires et que $\{\xi(t)\}$ est une suite "blanche" non corrélée avec $\{\psi(t)\}$.

Nous postulons (5) et une condition supplémentaire :

$$E[\eta(\tau) + \eta(\tau+1) + \ldots + \eta(\tau+K-1)] = 0 \tag{10}$$

Par substitutions de (9) dans (3) et (3) dans (10), les deux conditions supplémentaires en résultent par les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_N$ :

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_N = 1 \;, \tag{11}$$

$$a_1 + 2a_2 + \ldots + Na_N = -l - \frac{K-1}{2} \tag{12}$$

Pour $K=1$, $l=0$, nous obtenons les conditions (9) données dans [L3].

On démontre par la méthode des coefficients de Lagrange, que pour

$$A = 0 \tag{13}$$

(dans ce cas, on doit satisfaire seulement (11)), les coefficients qui rendent l'expression (5) minimum, sont

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_N = \frac{1}{N} \tag{14}$$

(indépendemment de $K$, $l$).

Il en résulte que :

$$\frac{1}{K} E\left[\sum_{k=o}^{K-1} \eta^2(\tau + k)\right] = \left(1 + \frac{1}{N}\right) \sigma_\xi^2 + \frac{1}{N} \sigma_\psi^2 \tag{15}$$

(où $\sigma_\xi^2 = \sigma_\zeta^2$, la suite $\{\zeta(t)\}$ étant "blanche" et $E[\xi(t)] = b$ pour $A = 0$).

Nous voyons que le régulateur se comporte pour la suite $\{\xi(t)\}$ comme le filtre passe-haut à moyenne mobile. Pour la suite $\{\psi(t)\}$, il se comporte comme le filtre passe-bas à moyenne mobile (voir [L1]).

Dans la pratique, nous cherchons à rendre petit le second terme à droite dans (15) par rapport au premier terme, par le choix de l'appareil de mesure précis et de N assez grand. Des restrictions pratiques s'imposent sur ce choix.

Nous appellerons le régulateur déduit de (14) "régulateur du premier type".

Supposons maintenant

$$A \neq 0 \tag{16}$$

Dans ce cas, nous devons satisfaire les conditions (11) et (12). Par la méthode des coefficients de Lagrange, nous obtenons pour les $a_j$, vérifiant la condition (5) :

$$a_j = \frac{4(N - 1) + 6(\ + 1) + 3(K - 1)}{N(N - 1)} - 6j. \frac{(N - 1) + 2(l + 1) + (K - 1)}{(N + 1) . N . (N - 1)}, \tag{17}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, N).$$

Avec ces constantes, (5) devient

$$\frac{1}{K} E\left[\sum_{k=o}^{K-1} \eta^2(\tau + k)\right] = A^2 . \frac{(K - 1) . (K + 1)}{12} +$$

$$+ \sigma_\xi^2 \left\{1 + \frac{1}{(N + 1) . N} \left[2(2N - 1) + 6V + \frac{3V^2}{N - 1}\right]\right\} +$$

$$+ \sigma_\psi^2 \frac{1}{(N + 1) . N} \left[2(2N - 1) + 6V + \frac{3V^2}{N - 1}\right], \tag{18}$$

où

$$V = 2l + K + 1 . \tag{19}$$

Pour $l = 0$, $K = 1$, $\sigma_\psi = 0$, nous obtenons de (17) la formule

$$a_j = \frac{4}{N} - \frac{6(j - 1)}{N(N - 1)}$$

C'est la formule (10) dans [L3]. De (18), nous obtenons la formule

$$E[\eta^2(\tau)] = \sigma_\varsigma^2 \left[1 + \frac{1}{N-1}\left(4 + \frac{2}{N}\right)\right].$$

C'est la formule (12) dans [L3]. Ces spécialisations sont possibles parce que nous n'avons pas fait usage de la condition $N + l < K$ dans le calcul.

Nous appellerons le régulateur déduit de (17), régulateur du second type".

## 4 - COMPARAISON DE DEUX REGULATEURS MODIFIES

Nous allons calculer encore l'expression (5) pour le régulateur du premier type en supposant $A \neq 0$. Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{K} E\left[\sum_{k=0}^{K-1} \eta^2(\tau + k)\right] = A^2 \left[\left(l + \frac{N+1}{2}\right)^2 + (K-1)\left(l + \frac{N+1}{2}\right) + \frac{(K-1)(2K-1)}{6}\right] + \sigma_\varsigma^2\left(1 + \frac{1}{N}\right) + \sigma_\psi^2 \cdot \frac{1}{N} \qquad (20)$$

Pour $A = 0$, on obtient de nouveau la formule (15). Pour

$$K = 1,\ l = 0,\ \sigma_\psi = 0,$$

nous obtenons la formule

$$E[\eta^2(\tau)] = A^2 \cdot \frac{(N+1)^2}{4} + \sigma_\varsigma^2 \frac{N+1}{N}.$$

C'est la formule (14) de [L3].

En comparant (18) et (20), K, , N, $\sigma_\varsigma$, $\sigma_\psi$ étant donnés, on obtient une borne pour $A/\sigma_\varsigma$, au-dessous de laquelle le régulateur du premier type est meilleur que celui du second type. En ce qui concerne $\sigma_\varsigma$ et $\sigma_\psi$, seul leur rapport est décisif, de sorte qu'on peut poser partout $\sigma_\varsigma = 1$ sans perte de généralité. Les expressions (18) et (20) nous donnent l'information de la contribution des erreurs systématique et aléatoire à l'entrée sur l'erreur totale (quadratique) à la sortie de la machine. Par exemple dans (18), le premier terme à droite :

$$A^2 \cdot \frac{(K-1)(K+1)}{12},$$

représente la composante systématique de l'erreur totale à la sortie de la machine. Cette composante ne dépend que des constantes A et K. Les deux autres termes dans (18) représentent la composante aléatoire de l'erreur totale à la sortie de la machine. Le premier d'entre eux représente l'influence des écarts des propriétés du matériel et l'imprécision de la machine, le second représente seulement l'influence des écarts de l'appareil utilisé pour mesurer les produits.

## 5 - EXEMPLE

Considérons $N = 4$, $l = 4$, $K = 50$, $\sigma_\xi^2 = \sigma_\psi^2 = 1$.

D'après (18), on obtient

$$\frac{1}{50} E\left[\sum_{k=o}^{49} \eta^2(\tau + k)\right] = 208,25\ A^2 + 385,90 \tag{21}$$

D'après (20), on a

$$\frac{1}{50} E\left[\sum_{k=o}^{49} \eta^2(\tau + k)\right] = 1\,169,25\ A^2 + 1,50 \tag{22}$$

Alors, le régulateur du premier type est meilleur pour

$$A < 0,632 \tag{23}$$

Du point de vue pratique, nous postulerions dans cet exemple qu'il faudrait que A soit beaucoup plus petit que 0,632 ($A = 0,04$ environs), pour que le premier terme du second membre de (22) soit du même ordre de grandeur que le second.

## 6 - REALISATION DU FILTRE DANS LE FEEDBACK DU REGULATEUR

Considérons (2), (3) et

$$\begin{aligned} &\eta(\tau + k) = \xi(\tau + k) - \chi(\tau) , \\ &(k = 0, 1, \ldots, k - 1) , \end{aligned} \tag{24}$$

où $\{\chi(t)\}$ (voir la figure 2) est la sortie du filtre, laquelle représente la position de l'organe d'exécution de la machine. D'après c), nous supposons cette position invariante pour le groupe entier de K produits.

De (24), on déduit :

$$\begin{aligned} \xi(\tau - l - 1) &= \eta(\tau - l - 1) + \chi(\tau - K) , \\ &\vdots \\ \xi(\tau - l - N) &= \eta(\tau - l - N) + \chi(\tau - K) . \end{aligned} \tag{25}$$

En substituant dans (3), on obtient

$$\chi(\tau) = \chi(\tau - K) . \sum_{j=1}^{N} a_j + \sum_{j=1}^{N} a_j\ [\eta(\tau - l - j) + \psi(\tau - n - j)] \tag{26}$$

Mais l'expression entre crochets dans le second membre, c'est l'entrée du filtre (voir la figure 2). Alors, la structure du filtre est très simple. En particulier pour les régulateurs modifiés, pour lesquels la relation (11) est vérifiée, on obtient la valeur "actuelle" à la sortie du filtre à partir de la valeur "précédente" par l'addition de la deuxième somme à droite dans (26). Pour le régulateur du premier type, il résulte de (14) que

$$\chi(\tau) = \chi(\tau - K) + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} [\eta(\tau - l - j) + \psi(\tau - n - j)] \quad ,$$

de sorte que nous obtenons dans ce cas le contrôle statistique par la moyenne arithmétique (linéarisé).

La formule (20) donne l'information détaillée de l'influence de K, N, $l$, $\sigma_\varsigma$, $\sigma_\psi$ sur l'erreur quadratique totale de la sortie de la machine en supposant que l'erreur systématique à l'entrée a la forme d'un "saut" (b dans (9)) ou "saut de vitesse" (A dans (9)).

## BIBLIOGRAPHIE


[L1] PROUZA L. - Quelques propriétés de deux simples filtres discrets (en tchèque), Stroje na zpracovani informaci, Sbornik VI, 1958, p. 71/82.

[L2] PROUZA L. - Sur la théorie linéaire des régulateurs automatiques (en russe), Aplikace Matematiky, F. 5, 1960, n° 3, p. 196/201.

[L3] PROUZA L. - Sur la théorie linéaire des régulateurs automatiques, Revue de statistique Appliquée, 1965, Vol. XIII, N° 2, p. 95-100.

[L4] REZNY Z. - Ein Problem der linearen Regulierung bei einer instationaren Störung von polynomischer Form. Colloque sur applications industrielles de la statistique mathématique, Budapest 31.8 - 4.9.1964.