

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

A. H. ZALUDOVA

Problèmes de durée de vie : applications à l'industrie automobile

Revue de statistique appliquée, tome 13, n° 4 (1965), p. 75-98

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_4_75_0

© Société française de statistique, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES DE DURÉE DE VIE. APPLICATIONS A L'INDUSTRIE AUTOMOBILE (1)

Mme A. H. ZALUDOVA

(Institut National de recherche technique de la Chaleur, Prague)

1 - INTRODUCTION

Au cours des vingt dernières années on a commencé à montrer extraordinairement de l'intérêt pour les études relatives aux propriétés de la durée de vie et de la fiabilité des parties de machines, ainsi que pour la déduction de modèles de probabilité convenables, tenant compte d'une part des conditions réelles dans lesquelles la pièce ou le produit travaillent, et d'autre part de la nature physique des processus en question qui mènent à la défaillance.

Il a été publié une littérature volumineuse concernant les modèles statistiques de la durée de vie des matériaux et des pièces, ainsi que les estimations des paramètres de ces modèles, à partir des résultats obtenus dans les essais de laboratoire ou à partir des enregistrements continus de l'usure et du taux de défaillance, au cours du fonctionnement des parties correspondantes [1, 2, 3, 4, 5]. On a ainsi établi les fondements théoriques pour l'élaboration d'une théorie plus parfaite de l'usure et du taux d'avarie et les techniciens ont exploité et exploitent ces résultats théoriques

a) pour choisir plus rationnellement des matériaux de construction destinés à des conditions de service données ;

b) pour perfectionner la construction et la technologie de la production ;

c) pour mettre en accord les caractéristiques de la durée de vie de différentes parties d'un ensemble, de façon à pouvoir utiliser autant que possible des réparations préventives d'ensembles entiers ;

d) pour préciser les calculs de résistance ;

e) pour rationaliser et préciser les techniques d'essai [6].

D'après la littérature spécialisée, les méthodes mathématiques et statistiques ont servi jusqu'à présent, dans l'industrie automobile, avant tout comme un moyen de perfectionnement des voitures dans les directions mentionnées plus haut [7, 8].

Le deuxième groupe de problèmes, qui a commencé à prendre de l'importance au cours de ces dernières années, concerne le volume optimal des stocks de pièces de rechange, le procédé d'entretien et les

(1) Conférence présentée aux réunions d'étude sur les applications de la statistique dans les entreprises.

réparations des installations complexes de façon que son efficacité soit maximale. La solution de ces problèmes à l'aide de la théorie des modèles de remplacement industriel, de la théorie des phénomènes d'attente et de la théorie des stocks, est traitée dans la littérature de recherche opérationnelle (voir p.e. [9, 10]). A une échelle réduite, on a utilisé cependant les informations concernant la durée de vie, l'usure et le taux d'avaries des pièces mécaniques, au planning du volume de la production de pièces de rechange.

Jusqu'à présent, la prédiction de la quantité de pièces de rechange nécessaire était en général fondée sur des considérations subjectives ou sur des méthodes statistiques moins fécondes, comme l'analyse des séries chronologiques, la régression, etc. Certaines études [11, 12] nous montrent que la prédiction de la consommation de pièces de rechange, fondée sur la connaissance de la production dernière et sur les caractéristiques statistiques de la durée de vie des pièces étudiées, sera plus exacte que les estimations résultant d'une application des méthodes mentionnées plus haut.

On trouvera ci-après un exposé sur les nouveaux résultats obtenus lors de mes recherches sur la durée de vie des pièces d'automobile.

2 - QUELQUES MODELES COURANTS DE LA DUREE DE VIE ET DE LA FIABILITE DES PIECES MECANQUES

Sous la notion "durée de vie" on comprend le plus souvent le temps (nombre de cycles, de kilomètres, etc.) pendant lequel la pièce peut remplir la fonction exigée dans des conditions de fonctionnement données, jusqu'à défaillance.

Parler de la durée de vie d'un certain type n'a de sens que pour une population de pièces fabriquées dans des conditions de production analogues et soumises à des conditions de fonctionnement à peu près égales. La durée de vie ξ est une variable aléatoire que l'on peut caractériser par une des quatre fonctions de probabilité, utilisées dans les problèmes de fiabilité : $F(x)$, $R(x)$, $f(x)$ ou $\mu(x)$:

$$F(x) = P(\xi \leq x)$$

fonction de distribution

$$F(0) = 0, \quad F(\infty) = 1$$

où probabilité d'apparition d'une défaillance dans l'intervalle $0, x$.

$$R(x) = 1 - F(x) = P(\xi > x)$$

fonction de fiabilité (appelée aussi fonction de mortalité ou de survie).

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

densité de probabilité au point x d'où $f(x) dx = P(x < \xi \leq x + dx)$

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$

taux d'avarie ou probabilité conditionnelle de défaillance au point x ;
on a :

$$\mu(x) dx = \frac{P(x < \xi \leq x + dx)}{P(\xi > x)}$$

Il résulte de ces rapports de définition que :

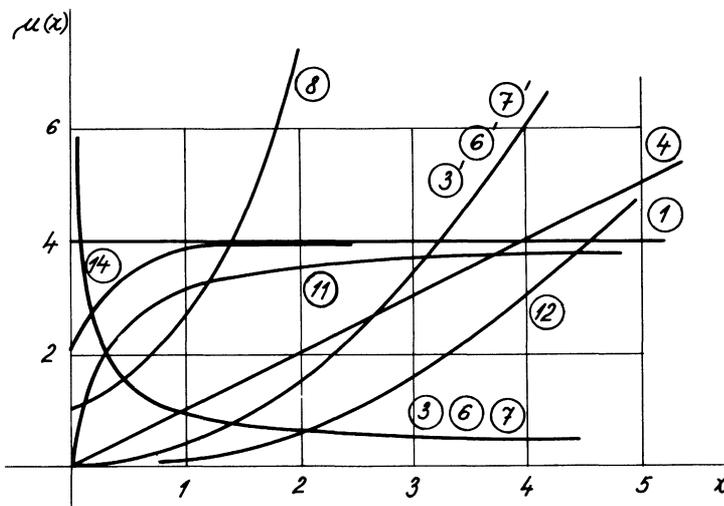
$$F(x) = \int_0^x f(u) du$$

$$\mu(x) = - \frac{1}{R(x)} \frac{d R(x)}{dx}$$

$$R(x) = 1 - F(x) = e^{-\int_0^x \mu(v) dv}, \quad x \geq 0$$

Cela signifie qu'en connaissant une des fonctions $F(x)$, $R(x)$, $f(x)$ ou $\mu(x)$, on en peut déterminer facilement les trois autres.

La plus grande importance s'attache au taux d'avarie $\mu(x)$ qui indique la vitesse relative de la défaillance des parties, en unités de la durée de vie, au cours de son fonctionnement. Il est ainsi possible de retenir non seulement le caractère statistique du phénomène, mais aussi le mécanisme physique de la défaillance. Les différents modèles de la durée de vie dépendent de la nature du taux d'avarie $\mu(x)$, par exemple, s'il est constant, s'il est une fonction du temps croissante selon une parabole, selon une courbe exponentielle ou s'il est d'une forme plus compliquée (voir Tab. 1 et Fig. 1).



- | | |
|---|----------------------------------|
| ① Exponentielle $\lambda = 4$ | ⑧ Valeurs extrêmes |
| ③ ⑥ ⑦ Weibull $\beta = 0,5, \delta = 0,25$ | ⑪ Gamma $\beta = 2, \lambda = 4$ |
| ③' ⑥' ⑦' Weibull $\beta = 3, \delta = 2$ | ⑫ Normale |
| ④ Weibull $\beta = 2, \delta = \sqrt{2}, \lambda = 1$ | ⑭ Logistiques |

Fig. 1 - Représentation graphique de différentes allures du taux d'avarie $\mu(x)$ (voir tabl. 1).

Tableau 1

Expression analytique de principaux types de la durée de vie

La distribution		Le taux d'avarie $\mu(x)$	La fonction de fiabilité $R(x)$	La fonction de distribution $F(x)$	La densité de probabilité $f(x)$	Remarques
Exponentielle	(1)	λ	$e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$
	(2)	λ	$e^{-\lambda(x-x_0)}$	$1 - e^{-\lambda(x-x_0)}$	$\lambda e^{-\lambda(x-x_0)}$	$x \geq x_0$
Weibull	(3)	$\frac{\beta x^{\beta-1}}{\delta \beta}$	$e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta}$	$1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta}$	$\frac{\beta x^{\beta-1}}{\delta \beta} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^\beta}$	$x \geq 0$
	$\beta = 2$ (4) $\lambda = \frac{2}{\delta^2}$	λx	$e^{-\frac{\lambda}{2} x^2}$	$1 - e^{-\frac{\lambda}{2} x^2}$	$\lambda x e^{-\frac{\lambda}{2} x^2}$	Loi de Maxwell ou Rayleigh $x \geq 0$
Freudenthal et Gumbel	(5)	$\frac{\beta(x-x_0)^{\beta-1}}{(\delta-x_0)^\beta}$	$e^{-\left(\frac{x-x_0}{\delta-x_0}\right)^\beta}$	$1 - e^{-\left(\frac{x-x_0}{\delta-x_0}\right)^\beta}$	$\frac{\beta(x-x_0)^{\beta-1}}{(\delta-x_0)^\beta} \cdot e^{-\left(\frac{x-x_0}{\delta-x_0}\right)^\beta}$	$x \geq 0$
	(6)	e^y	e^{-e^y}	$1 - e^{-e^y}$	$e^y e^{-e^y}$	Se déduit du modèle (5) par la transformation $\ln\left(\frac{x-x_0}{\delta-x_0}\right)^\beta = y = \beta(z-u)$
Valeurs extrêmes	(7)	$\beta e^{\beta(z-u)}$	$e^{-e^{\beta(z-u)}}$	$1 - e^{-e^{\beta(z-u)}}$	$\beta e^{\beta(z-u)} e^{-e^{\beta(z-u)}}$	$z = \ln(x-x_0)$ $u = \ln(\delta-x_0)$
	(8)	$\lambda \beta e^{\beta x}$	$e^{-\lambda(e^{\beta x}-1)}$	$1 - e^{-\lambda(e^{\beta x}-1)}$	$\lambda \beta e^{\beta x} e^{-\lambda(e^{\beta x}-1)}$	

Tableau 1 (suite)

La distribu- tion	Le taux d'avarie $\mu(x)$	La fonction de fiabilité $R(x)$	La fonction de distribution $F(x)$	La densité de probabilité $f(x)$	Remarques
Gamma	(9)	$\frac{f(x)}{R(x)}$	$\int_x^\infty \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} v^{\beta-1} e^{-\lambda v} dv$	$\frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\lambda x}$	En posant $2\lambda x = \chi^2$, on obtient la loi de χ^2 avec 2β degrés de liberté
	(10)	$\frac{\lambda^\beta x^{\beta-1}}{(\beta-1)! \sum_{j=0}^{\beta-1} \frac{(\lambda x)^j}{j!}}$	$\sum_{j=0}^{\beta-1} e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^j}{j!}$	$\frac{\lambda^\beta}{(\beta-1)!} x^{\beta-1} e^{-\lambda x}$	$x \geq 0$
	$\beta = 2$ (11)	$\frac{\lambda^2 x}{1 + \lambda x}$	$(1 + \lambda x) e^{-\lambda x}$	$1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}$	$\lambda^2 x e^{-\lambda x}$
Normale	(12)	$\frac{\frac{1}{\delta} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$	$1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \varphi(v) dv =$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{v^2}{2}} dv$
Log. normale	(13)	$\frac{0,4343}{x\sigma_z} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)}$	$1 - \Phi\left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)$	$\frac{0,4343}{x\sigma_z} \varphi\left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)$	$x = \log_{10} x$
Logistique	(14)	$\frac{\beta [1 - \delta R(x)]}{\beta > 0}$ $1 \geq \delta > 0$	$\frac{(1-\delta)(1-e^{-\beta x})}{1-\delta(1-e^{-\beta x})}$	$\frac{\beta(1-\delta)e^{-\beta x}}{[1-\delta(1-e^{-\beta x})]^2}$	$x \geq 0$

Dans le tableau 1 on trouve les caractéristiques pour les modèles principaux de la durée de vie, que l'on a mentionnés plus haut. La distribution exponentielle de la durée de vie [modèles (1), (2)] correspond à de telles conditions de service, dans lesquelles les valeurs de pointe ou critiques (par exemple la charge), qui sont toujours liées à une avarie des éléments, se produisent aléatoirement selon une distribution de Poisson à intensité constante (c'est-à-dire indépendamment du temps) [13].

Un autre groupe de modèles [(3) jusqu'à (8)] représente une généralisation du modèle exponentiel, en ce qui concerne la forme de la fonction exprimant le taux d'avarie, et par conséquent l'interprétation physique plus complexe de l'avarie. La probabilité $\mu(x)$ contient dans ces cas les informations concernant d'une part la probabilité de la présence des états critiques de l'ambiance, d'autre part l'action réciproque de l'ambiance sur l'élément au cours de la vie.

Ces modèles sont connus sous les noms de lois de Weibull, Freudenthal et Gumbel, et loi de distribution des valeurs minimales d'échantillons [14, 15, 16]. Ils expriment des phénomènes physiques tels que fatigue du matériel, usure, pitting, corrosion, etc., dont le taux d'avarie est une fonction de la durée de vie x de forme :

$$\mu(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha}$$

$$\mu(x) = \frac{\beta x^{\beta-1}}{\delta^\beta}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \infty \\ \alpha > 0, \beta > 0 \\ \delta > 0 \end{array}$$

Le troisième groupe de modèles [(9) jusqu'à (11), tableau 1] est formé par la distribution dite gamma et par sa forme asymptotique, la distribution normale [modèle (12)]. Ces distributions sont typiques pour de tels processus menant à l'avarie, dans lesquels un élément du système a une avarie après avoir été soumis à l'influence de $\beta \geq 1$ causes élémentaires dont chacune contribue à la détérioration d'un certain mais constant degré de la fonction de vitalité de la pièce (par exemple l'usure de la pièce provoquée par le frottement etc.).

Il y a enfin deux distributions qui entrent parfois en considération, c'est-à-dire la distribution logarithmique normale et la distribution logistiquie [modèles (13) et (14), tab. 1]. Quoique certaines grandeurs (par exemple l'étendue du dommage à l'endroit de la concentration de la contrainte par charge alternative) aient une distribution logarithmique normale, l'analyse plus poussée nous montre que cette distribution n'intervient pas comme modèle indépendant de la durée de vie, mais qu'elle est utilisée pour la plupart comme une approximation d'autres distributions, dont la forme réelle établie par la physique est la distribution de Weibull ou gamma.

La distribution logistiquie est typique plutôt pour les populations biologiques formées par les éléments vivants, où le taux d'avarie (la mort) $\mu(x)$ est une fonction de temps croissante et cela en fonction de la fiabilité (voir tableau 1). Nous en faisons mention afin que cet exposé soit complet.

Pour les pièces d'automobile on discerne deux lois de probabilité. La première se rapporte à la durée de vie exprimée en kilomètres, c'est-à-dire au nombre de kilomètres parcourus depuis la mise en service de la voiture jusqu'à la défaillance de la pièce considérée. La deuxième distribution de la durée de vie se rapporte à la probabilité d'avarie d'une pièce en temps physique, c'est-à-dire en temps qui s'est écoulé à partir de la mise en service de la voiture jusqu'à la défaillance de la pièce en question. La distribution de la durée de vie, exprimée en kilomètres, est une caractéristique naturelle de la durée de vie des pièces d'automobile et elle sera décrite dans ce travail par les caractéristiques $F(x)$, $R(x)$, $f(x)$ et $\mu(x)$ mentionnées plus haut. La distribution de la durée de vie exprimée en temps est dans un certain rapport (mais non déterministique) avec la distribution de la durée de vie exprimée en kilomètres. Ce rapport dépend des conditions de service, par exemple du kilométrage par mois, et on en discutera de manière plus détaillée au paragraphe 3.

Les courbes empiriques de la durée de vie exprimée en kilomètres ont été élaborées, à partir des données issues des ateliers de réparation du parc de voiture du service de taxis à Prague, pour 18 pièces de la voiture de tourisme Skoda 1200. Dans les figures 2 et 3 on reproduit ces courbes pour deux pièces, c'est-à-dire pour le pignon de renvoi de la boîte de vitesse (marqué par J) et pour le pignon conique de la boîte de différentiel (marqué par T). Ces courbes nous montrent une propriété générale : la distribution de la durée de vie avant la première révision générale est différents de la distribution après cette révision générale. En outre, pour une pièce, dont la cause prépondérante de l'avarie est l'usure par frottement, il convient bien, avant la première révision générale, de prendre la distribution théorique normale, et cela comme distribution limite de Γ . Après la première révision générale, où il y a, outre l'usure, une sollicitation dynamique plus grande, due à l'augmentation des jeux, il convient bien de prendre comme la distribution théorique le modèle de Weibull.

3 - DEDUCTION DE LA DISTRIBUTION DE LA DUREE DE VIE EXPRIMEE EN UNITES DE TEMPS A PARTIR DE LA DISTRIBUTION DE LA DUREE DE VIE EXPRIMEE EN KILOMETRES POUR LES PIECES D'AUTOMOBILE

On a vérifié chez certains groupes de voitures de tourisme en conditions de service différentes, que les accroissements $u(t)$ du kilométrage en unités de temps (par exemple un mois, un trimestre) sont des grandeurs aléatoires mutuellement indépendantes, non négatives, ayant une distribution normale, la valeur moyenne $a(t)$ et la variance $\sigma(t)$, étant en général des fonctions du temps. Dans les cas étudiés, la variance $\sigma_u^2(t) = \sigma_u^2$ était pratiquement constante, tandis que $a(t)$ ne l'était en aucun cas (voir la fig. 4a). Il résulte de cette hypothèse, que la distribution du parcours kilométrique total (c'est-à-dire du nombre de kilomètres parcourus)

$$x(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

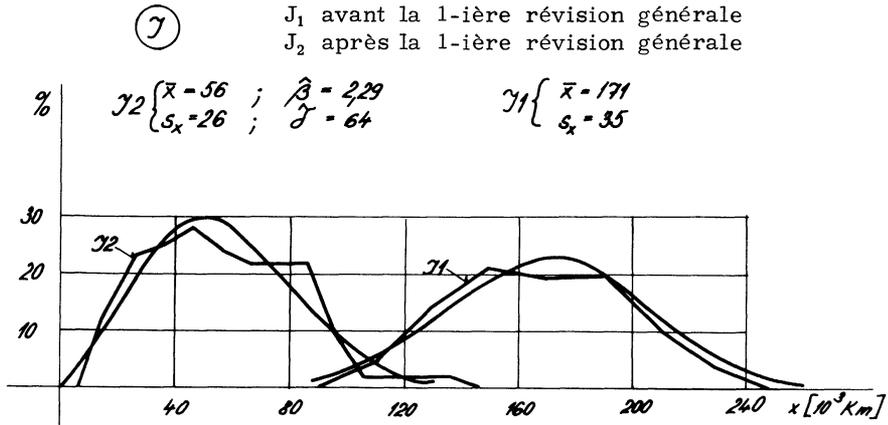


Fig. 2 - Distributions empiriques et théoriques de la durée de vie exprimée en kilomètres pour la pièce J.

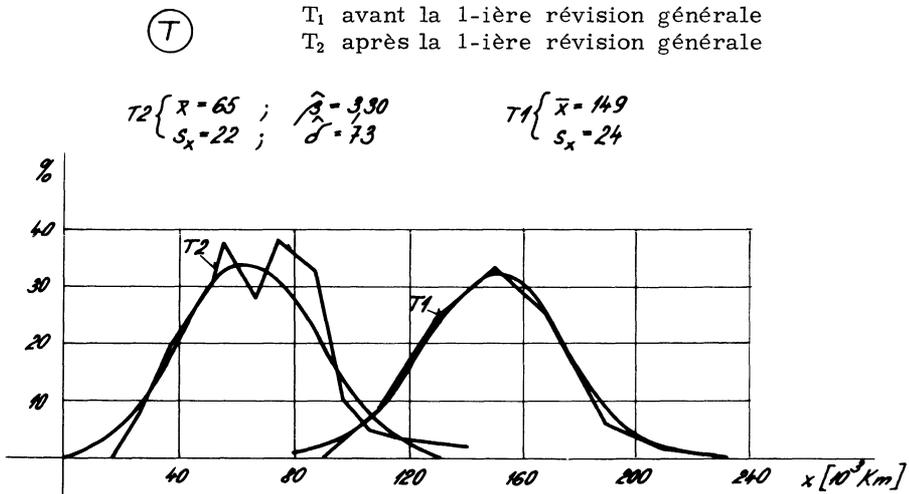


Fig. 3 - Distributions empiriques et théoriques de la durée de vie exprimée en kilomètres pour la pièce T.

dans un temps t peut être exprimée par la densité de probabilité :

$$f(x | t) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi B(0, t)}} e^{-\frac{(x - m(0, t))^2}{4 B(0, t)}} \quad (3.2)$$

où
$$m(0, t) = E\{x(t)\} = \int_0^t a(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

et
$$B(0, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_u^2(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \sigma_u^2 t \quad (3.4)$$

Ce résultat se déduit, pour le cas des états continus et du temps continu, de la solution de l'équation différentielle de deuxième espèce de Kolmogoroff pour les probabilités absolues $f(x|t)$, en supposant que $x(t)$

soit un processus de Markov additif (c'est-à-dire, avec accroissements indépendants) et non-homogène en temps, dans le cas général. Il en résulte l'équation

$$-\frac{\partial}{\partial t} f(x|t) + a(t) \frac{\partial}{\partial x} f(x|t) - \frac{1}{2} \sigma_u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x|t) = 0$$

dont la solution est l'expression (3.2).

Pour le temps discret, on obtient le même résultat en écrivant

$$f(x|n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z|n-1) f^{(1)}(x-z|z, n-1) dz, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où $f^{(1)}(x-z|z, n-1)$ désigne la densité de probabilité de passage de l'état z à l'instant $n-1$ à l'état x à l'instant n ,

$$f(x|1) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_u^2}}$$

$$x_n = x_{n-1} + u_n = \sum_{j=1}^n u_j,$$

$$E(u_j) = a_j$$

$$D^2(u_j) = \sigma_u^2 \quad \text{pour tous les } j,$$

avec la seule différence que

$$\left. \begin{aligned} m(0, t) &= m(0, n) = \sum_{j=1}^n a_j \\ B(0, t) &= B(0, n) = \frac{1}{2} \sigma_u^2 n \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Le rapport correspondant à (3.2) pour la fonction de distribution est :

$$F(x|t) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\{v-m(0,t)\}^2}{2\sigma_u^2 t}} dv \quad (3.6)$$

Par une inversion du processus $x(t)$ on peut déterminer la probabilité que le temps t nécessaire pour arriver à un certain nombre x_1 de kilomètres sera moindre ou tout au plus égal à la valeur t_1 . Cette probabilité est la même que la probabilité pour que le kilométrage $x(t_1)$ dans un temps t_1 soit plus grand que x_1 (voir fig. 4b). Pour cela, on obtient les relations

$$\begin{aligned} P(t_1|x_1) &= P(\tau \leq t_1|x_1) \\ &= 1 - F(x_1|t_1) \\ &= \Phi \left\{ \frac{m(0, t_1) - x_1}{\sigma_u \sqrt{t_1}} \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

où
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

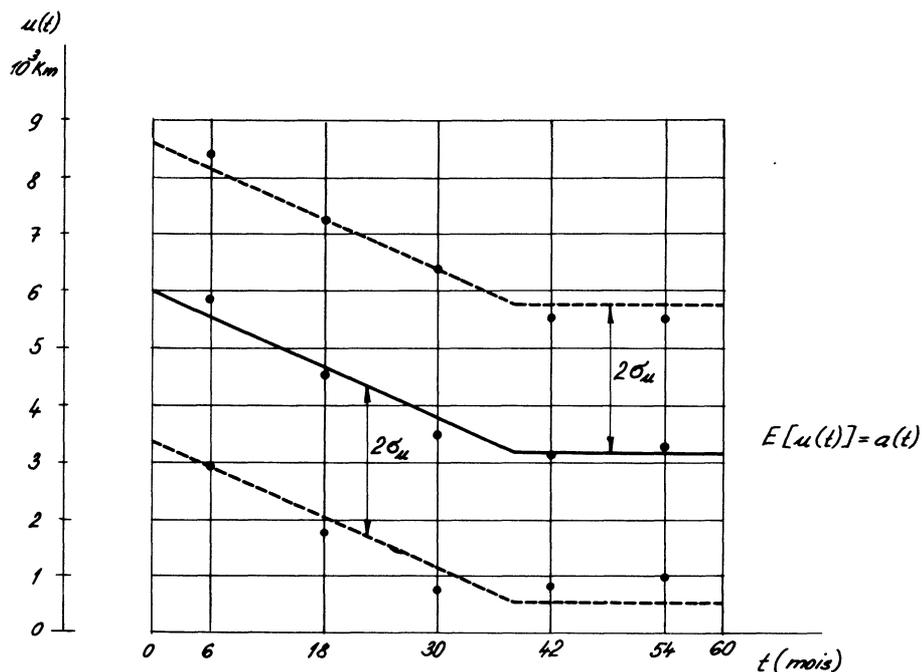


Fig. 4a - Allures des kilométrages moyens mensuels $a(t)$ et des limites $a(t) \pm 2\sigma_u$.

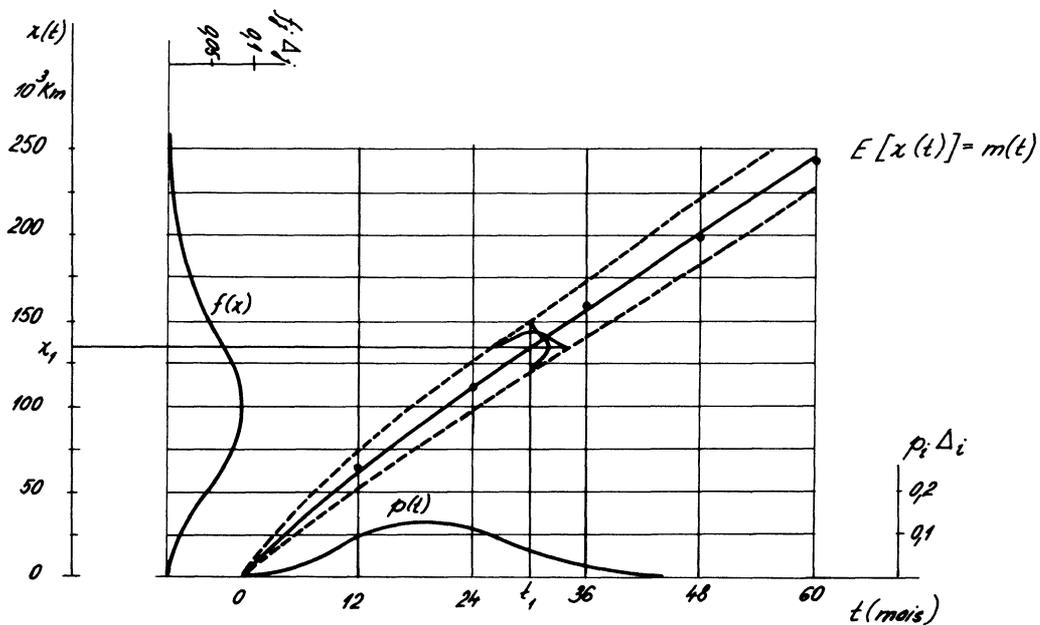


Fig. 4b - Représentation graphique du calcul de la distribution de la durée de vie p_i , exprimée en unités de temps, à partir de la durée de vie f_j exprimée en kilomètres.

En utilisant connaissance de la distribution $f(x)$ de la durée de vie exprimée en kilomètres on peut voir que la probabilité d'une avarie d'une pièce dans l'intervalle (t_{i-1}, t_i) sera

$$P(t_{i-1} < \tau \leq t_i) = \int_0^{\infty} P_i | x f(x) dx, \quad (3.8)$$

où $P_i | x_i = P(t_i | x_i) - P(t_{i-1} | x_i)$, $i = 1, 2, \dots$

représente la probabilité pour que la voiture parcoure justement x_i Km dans l'intervalle de temps (t_{i-1}, t_i) , soit $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1$ pour tout i .

Pour des calculs concrets on considère en kilomètres les distances discrètes équidistantes parcourues x_j de façon que l'expression (3.8) prenne la forme :

$$P_i = \sum_{j=1}^{\infty} P_{i,j} f_j \Delta_j, \quad (3.9)$$

où

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= P_i | x_j \\ f_j \Delta_j &= f(x_j) \Delta x_j \\ &= R(x_{j-\frac{1}{2}}) - R(x_{j+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pour l'allure $m(0, t)$ réelle caractérisant les conditions de fonctionnement d'un certain assemblage de voitures on peut dénombrer, en utilisant les équations (3.9), les probabilités p_i de la durée de vie exprimée en unités de temps, de différentes pièces pour une distribution particulière $R(x)$ de la durée de vie en kilomètres de la pièce en question.

Si on envisage, exemple $a(t) = a$, $\sigma_u(t) = \sigma_u$ pour un processus linéaire homogène. On a alors (voir fig. 5) :

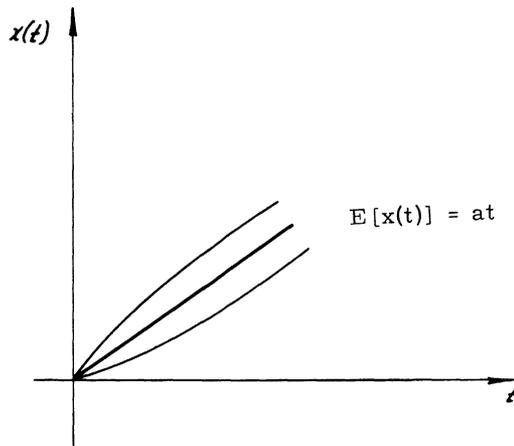


Fig. 5 - Représentation graphique du processus homogène linéaire $x(t)$ pour a , σ_u constants.

$$m(0, t_1) = at_1$$

$$B(0, t_1) = \frac{\sigma_u^2}{2} t_1$$

$$P(\tau \leq t_1 | x_1) = \Phi \left(\frac{at_1 - x_1}{\sigma_u \sqrt{t_1}} \right)$$

4 - PREVISION DE LA CONSOMMATION MOYENNE DE PIECES DE RECHANGE ET SON CALCUL APPROXIMATIF

Supposons que la loi de la probabilité de la durée de vie soit invariable dans le temps et qu'un seul rechange de la pièce considérée ait lieu dans la vie en service de la voiture, le nombre moyen de pièces détériorées d'un certain type dans le r ième intervalle de temps (r mesuré à partir d'un intervalle arbitraire) sera :

$$F_r = \sum_{i=1}^{i_m} Q_{r-1} p_i, \quad i_m = \min(r-1, i_v), \quad (4.1)$$

où Q_k - nombre de pièces de même type montées dans les voitures, fabriquées dans le k ième intervalle de temps et mises en service au commencement du $(k+1)$ ième intervalle.

p_i - probabilité de l'avarie d'une pièce de même type dans le i ième intervalle de temps de la vie.

i_v - borne supérieure exprimant la vie de service totale de la voiture entière jusqu'à la mise hors de service.

Pour un cas plus important, dans lequel la pièce en question peut être réparée à plusieurs reprises durant la vie de service de la voiture, l'expression (4.1) prendra la forme :

$$F_r^* = \sum_{i=1}^{i_m} Q_{r-1} p_i^*, \quad (4.2)$$

où $p_i^* = p_i + \sum_{k=1}^{i-1} p_k p_{i-k} +$

$$+ \sum_{l=2}^{i-1} \left\{ \sum_{k=1}^{l-1} p_k p_{l-k} \right\} p_{i-l} + \quad (4.3)$$

$$+ \sum_{s=3}^{i-1} \left[\sum_{l=2}^{s-1} \left\{ \sum_{k=1}^{l-1} p_k p_{l-k} \right\} p_{s-l} \right] p_{i-s} +$$

+

La probabilité composée p_i^* de rechange dans l' i ième intervalle est la somme des probabilités pour que la 1ère, la 2ème, ... ou la i ème rechange aient lieu dans la i ème intervalle. Par exemple :

$$p_1^* = p_1$$

$$p_2^* = p_2 + p_1^2$$

$$p_3^* = p_3 + 2 p_1 p_2 + p_1^3$$

On peut voir le calcul successif de l'expression générale dans le tableau 2 qui nous indique les contributions de la $j^{\text{ième}}$ rechange à valeur de la probabilité p_i^* .

Pour calculer respectivement (4.1) et (4.2) avec des valeurs Q_{r-1} connues du nombre de pièces mises en service à la fin de l'intervalle $(r - i)$, on doit connaître les probabilités p_i , c'est-à-dire les probabilités que la pièce fera défaut dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle de temps après la mise en service (voir § 3), (et les probabilités p_i^* pour 4.2).

Il est important dans la pratique que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i^* = \frac{1}{E(\tau)} \quad (4.4)$$

où $E(\tau)$ est la valeur moyenne de la durée de vie temporelle. On peut démontrer cette relation à l'aide de certains théorèmes de la théorie du remplacement industriel (voir par exemple (9)). Pour une population d'étendue initiale Q_0 , $Q_0 p_i^*$ est le nombre moyen de pièces que l'on doit remplacer dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle de temps indépendamment de l'ordre de la répartition. On obtient aussi ce nombre en résolvant l'équation différentielle-intégrale.

$$Q(t) = Q_0 R(t) + \int_0^t G'(u) R(t - u) du \quad (4.5)$$

pour le taux d'approvisionnement

$$G'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow \infty} \frac{G(u + \Delta u) - G(u)}{\Delta u} \quad (4.6)$$

où $G(t)$ représente la valeur moyenne du nombre total de remplacements (ou de pièces de rechange) dans l'intervalle $(0, t)$, $R(t)$ désignant la fonction de la fiabilité dans le temps et $Q(t)$ étant le nombre total de pièces de type donné en service au moment t . Pour le cas $Q(t) = Q_0$ et pour le cas discret, la consommation moyenne dans le $i^{\text{ième}}$ intervalle de temps $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1$ est donnée par l'expression :

$$\begin{aligned} g(t_i) &= G'(t_i) \Delta t \\ &= G(t_i) - G(t_{i-1}) = Q_0 p_i^* \end{aligned} \quad (4.7)$$

D'où :

$$\lim_{t_i \rightarrow \infty} \frac{G'(t_i)}{Q} = \frac{1}{\int_0^\infty R(t) dt} = \frac{1}{RE(\tau)} \quad (4.8)$$

Il en résulte la relation (4.4).

Exemple : On a effectué un calcul de la consommation de pièces de rechange H , palier à roulement, pour les conditions réelles de service des automobiles Skoda 1200 dans le service de taxis à Prague. En utilisant les formules (2.5) et (3.10) pour la distribution de Weibull, on a calculé d'abord les éléments $f_j \Delta_j$ de la durée de vie en kilomètres pour $x_j = 5, 10, \dots, 30$ (en 10^3 Km). Ensuite, on a évalué, à l'aide de la méthode des moindres carrés, les paramètres de la fonction $a(t)$ de la forme :

Tableau 2
Contribution du j^{ème} remplacement à p_i^*
j...rang du remplacement, i... rang des intervalles

j \ i	1	2	3	4	5	6	7
1	P_1						
2	P_2	p_1^2					
3	P_3	$2p_1p_2$	p_1^3				
4	P_4	$2p_1p_3 + p_2^2$	$3p_1^2p_2$	p_1^4			
5	P_5	$2p_1p_4 + 2p_2p_3$	$3p_1^2p_3 + 3p_1p_2^2$	$4p_1^3p_2$	p_1^5		
6	P_6	$2p_1p_5 + 2p_2p_4 + p_3^2$	$3p_1^2p_4 + 6p_1p_2p_2 + p_2^3$	$4p_1^3p_3 + 6p_1^2p_2^2$	$5p_1^4p_2$	p_1^6	
7	P_7	$2p_1p_6 + 2p_2p_5 + 2p_3p_4$	$3p_1^2p_5 + 6p_1p_2p_4 + 3p_2^2p_3 + 3p_3p_2^2$	$4p_1^3p_4 + 12p_1^2p_2p_3 + 4p_1p_2^3$	$5p_1^4p_3 + 10p_1^3p_2^2$	$6p_1^5p_2$	p_1^7
i	P_i	$\sum_{k=1}^{i-1} p_k p_{i-k}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'expr. en col. 2} \\ \text{et en ligne (i-1)} \end{array} \right\} + p_2 + \dots + (i-2) + p_1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'expr. en col. 3} \\ \text{et en ligne (i-1)} \end{array} \right\} + p_2 + \dots + (i-1) + p_1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'expr. en col. 4} \\ \text{et en ligne (i-1)} \end{array} \right\} + p_2 + \dots + (i-2) + p_1$	etc.	etc.

$$a(t) = \hat{c}_0 + \hat{d}_0 t, \quad 0 < t < t_1$$

$$= \hat{c}_0 + \hat{d}_0 t_1, \quad t > t_1$$

(voir fig. 4a), ensuite σ_u et $m(0, t)$ d'après (3.3) (voir fig. 4b) en se servant de (3.9), on a calculé ensuite les éléments de la probabilité p_i pour $t_i = 1, 2, \dots, 75$; enfin on a dénombré les valeurs p_i^* d'après le tableau 2 et la valeur moyenne $E(\tau)$ de la distribution p_i . Les résultats et les comparaisons avec des fréquences empiriques sont reproduits dans le tableau 3 et la figure 6. Le résultat

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p_i^* = \frac{1}{E(\tau)} = 0,1410$$

se trouve en bon accord avec les valeurs théoriquement calculées en colonne (4) Tableau 3.

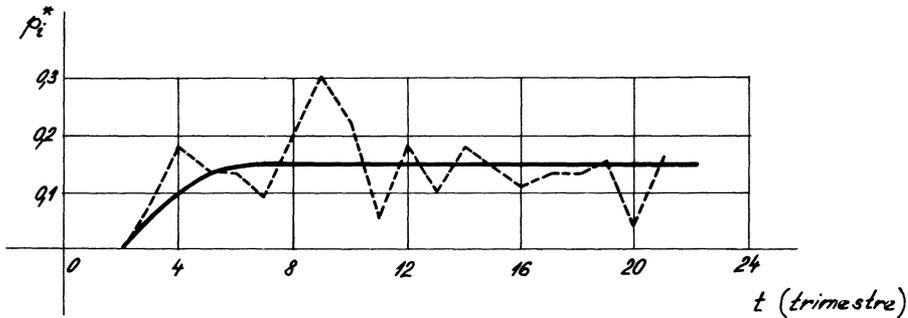


Fig. 6 - Allure empirique et théorique de la consommation de pièces de rechange de la partie H en unités de temps.

A cause de cela, on peut remplacer pour les conditions stationnaires, les formules (4.2) par l'équation :

$$F_r^* = \sum_{i=1}^{i_m} Q_{r-i} / E(\tau) = \sum_{i=1}^{i_m} Q_{r-i} / \sum_{i=1}^{\infty} t_i p_i \quad (4.9)$$

5 - ESTIMATION DES PARAMETRES DE WEIBULL POUR LES POPULATIONS ET ECHANTILLONS TRONQUES

Pour l'évaluation de la durée de vie et de la fiabilité des produits en service chez les consommateurs ou pendant les essais effectués dans les conditions de laboratoire, il n'est pas souvent économiquement avantageux d'attendre jusqu'au moment où tous les produits observés auront une défaillance, mais il est désirable d'estimer les paramètres du modèle théorique correspondant à l'aide des essais encore non achevés. On peut diviser ces essais en deux groupes principaux sous le nom de l'essai d'une population tronquée ou de l'essai à l'aide d'un échantillon tronqué.

Pour certains types de lois de distribution on peut exprimer explicitement les estimateurs des paramètres calculés sur la base des essais non achevés. Mais dans le cas de la distribution de Weibull dont la fonction de distribution est de la forme :

Tableau 3

Valeurs p_i et p_i^* empiriques et théoriques pour la pièce H

i	p_i	(Emp.) $\frac{N_i}{N}$	p_i^*	(Emp.) $\frac{g(t)}{Q_0}$
1	0,0042	0,000	0,0042	0,000
2	0,0310	0,014	0,0310	0,000
3	0,0695	0,063	0,0698	0,068
4	0,1049	0,146	0,1064	0,175
5	0,1282	0,167	0,1334	0,136
6	0,1356	0,167	0,1481	0,126
7	0,1279	0,132	0,1519	0,087
8	0,1101	0,087	0,1495	0,146
9	0,0879	0,115	0,1451	0,291
10	0,0658	0,052	0,1414	0,223
11	0,0467	0,014	0,1395	0,048
12	0,0317	0,035	0,1391	0,175
13	0,0209	0,007	0,1398	0,107
14	0,0139	0,000	0,1410	0,184
15	0,0091		0,1416	0,146
16	0,0057		0,1417	0,107
17	0,0033		0,1413	0,136
18	0,0019		0,1412	0,136
19	0,0011		0,1412	0,165
20	0,0005		0,1410	0,048
21	0,0003		0,1412	0,116
22	0,0001			0,126

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^\beta}{\alpha}}, \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (5.1)$$

$$\alpha, \beta > 0$$

une telle solution explicite n'est pas possible (voir par exemple 17). Néanmoins, il n'est pas trop difficile aujourd'hui de déterminer les estimateurs des paramètres α et β à l'aide d'un calculateur.

On obtient d'une population tronquée des informations concernant la durée de vie (en heures, kilomètres) chez r produits étudiés qui ont donné une défaillance avant le temps choisi x_p . Ensuite les estimateurs $\hat{\alpha}$ (respectivement $\hat{\delta} = \hat{\alpha}^{1/\hat{\beta}}$), et $\hat{\beta}$ correspondant au maximum de vraisemblance sur la base de r observations x_i , $i = 1, 2, \dots, r$, seront estimés à l'aide de la fonction de vraisemblance :

$$\begin{aligned}
L_r(\alpha, \beta) = & -r \lg(1 - e^{-\frac{x_p^\beta}{\alpha}}) + r(\lg \beta - \lg \alpha) \\
& + (\beta - 1)(r \lg x_p + \sum_{i=1}^r \lg y_i) \\
& - \frac{1}{\alpha} e^{\beta \lg x_p} \sum_{i=1}^r e^{\beta \lg y_i}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

où on a posé

$$y_i = x_i/x_p \tag{5.3}$$

En posant $\frac{\partial}{\partial \alpha} L_r(\alpha, \beta) = 0$, $\frac{\partial}{\partial \beta} L_r(\alpha, \beta) = 0$, on obtient les estimateurs correspondant au maximum de vraisemblance, qui doivent vérifier les conditions :

$$1 - \frac{1}{\hat{\alpha} r} \sum_{i=1}^r e^{\hat{\beta} \lg y_i} = \frac{1}{\hat{\beta}} \frac{f(x_p)}{F(x_p)} \tag{5.4}$$

et

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta} e^{\hat{\beta} \lg x_p} \sum_{i=1}^r \lg y_i e^{\hat{\beta} \lg y_i}}{r + \hat{\beta} \sum_{i=1}^r \lg y_i} \tag{5.5}$$

où $f(x_p)$ est la densité de probabilité de la fonction de distribution en question (5.1).

Dans le cas d'un échantillon tronqué de taille n on n'obtient des informations relatives à la durée de vie que pour r produits, et on sait seulement en ce qui concerne les produits restants, qu'ils ont dépassé le niveau x_p .

Ensuite, les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ du maximum de vraisemblance sur la base de r observations x_i , $i = 1, 2, \dots, r$ seront déduits de la fonction :

$$\begin{aligned}
L_{n,r}(\alpha, \beta) = & - (n - r) \frac{x_p^\beta}{\alpha} + r(\lg \beta - \lg \alpha) \\
& + (\beta - 1)(r \lg x_p + \sum_{i=1}^r \lg y_i) \\
& - \frac{1}{\alpha} e^{\beta \lg x_p} \sum_{i=1}^r e^{\beta \lg y_i}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

En écrivant que les dérivées partielles sont nulles :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} L_{n,r}(\alpha, \beta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} L_{n,r}(\alpha, \beta) = 0$$

on obtient les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de "maximum de vraisemblance" qui remplissent les conditions

$$\hat{\alpha} = \frac{e^{\hat{\beta} \lg x_p}}{r} \left[\sum_{i=1}^r e^{\hat{\beta} \lg y_i} + (n - r) \right] \tag{5.7}$$

$$\text{et} \quad \sum_{i=1}^r e^{-(1-\hat{\beta}w_i)} (1 - \hat{\beta}w_i) + (n - r) e^{-(1-\hat{\beta}w_r)} (1 - \hat{\beta}w_r) = 0 \quad (5.8)$$

$$\text{où} \quad w_i = \lg y_i - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \lg y_k \quad (5.9)$$

$$w_r = - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \lg y_k$$

En substituant l'équation (5.7) dans l'équation (5.6), on obtiendra

$$L_{n,r}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = r \left[\lg \frac{\hat{\beta}r}{e^{\hat{\beta} \lg x_p} \left\{ \sum_{i=1}^r e^{\hat{\beta} \lg y_i} + (n - r) \right\}} - 1 \right] \quad (5.10)$$

$$= (\hat{\beta} - 1) (r \lg x_p + \sum_{i=1}^r \lg y_i)$$

On ne peut pas simplifier les équations (5.4) et (5.5) ainsi que (5.7) et (5.8) pour pouvoir exprimer explicitement les estimateurs $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$. Mais on peut choisir la voie d'une solution numérique à l'aide d'un calculateur. On choisira au moins trois valeurs du paramètre β et on calculera la valeur correspondante α à l'aide de (5.5) (ou 5.7) et les valeurs correspondantes $L_r(\alpha, \beta)$ à l'aide de (5.2) ou $L_{n,r}(\alpha, \beta)$ à l'aide de (5.10). D'après l'allure de la fonction de vraisemblance L_r , $L_{n,r}$ on peut ensuite interpoler facilement pour la valeur $\beta = \hat{\beta}$ qui maximise $L_r(\alpha, \beta)$ ou $L_{n,r}(\alpha, \beta)$. Le paramètre α sera évalué ensuite à l'aide de (5.5) et (5.7).

Exemple : Pendant les recherches concernant la durée de vie des éléments de l'automobile on a obtenu 155 valeurs de la durée de vie exprimée en kilomètres pour la pièce de type (H) montée dans les voitures de tourisme de type Skoda 1200, au service des taxis à Prague. Ce nombre a représenté un échantillon total (non réduit) et en le prenant comme base, on a calculé par la méthode des moments les estimateurs $\hat{\alpha} = 189\,281,5$, $\hat{\beta} = 2,59$, $\hat{\delta} = 108,4$ [12]. Les estimateurs de la durée de vie moyenne et les écarts moyens quadratiques étaient $x = 95.10^3$ km, $s_x = 40.10^3$ km.

Tableau 4

Calcul des estimateurs des paramètres de la distribution de Weibull pour une population tronquée/formules (5.4) et (5.5) et pour un échantillon tronqué/formules (5.7) (5.8)

β	α	δ	$L_r(\alpha, \beta)$	$L_{n,r}(\alpha, \beta)$
2,3	65438,0	124,12	-661,24	-715,64
2,4	92419,5	117,24	-660,06	-714,90
2,5	132636,0	111,96	-659,12	-714,52
2,6	192750,6	107,82	-658,48	-714,46
2,7	282942,1	104,51	-658,16	-714,72
2,8	418784,7	101,82	-658,19	-715,27
2,9	624159,9	99,63	-658,62	-716,09

Pour vérifier l'aptitude du procédé d'estimation des paramètres α (ainsi que δ) et β sur la base des données tronquées, on a calculé - pour le choix de $x_p = 150.10^3$ km - les valeurs $L_r(\alpha, \beta)$ d'après la formule (5.2) pour $r = 137$ et $L_{n,r}(\alpha, \beta)$ d'après (5.10) pour $n = 155$, $r = 137$ et cela pour $\beta = 2,0$ (0,1) 3,0. Les résultats au voisinage du maximum de la fonction $L_r(\alpha, \beta)$ et de la fonction $L_{n,r}(\alpha, \beta)$ sont re-produits dans le tableau 4 et dans la figure 7. Le calcul des quatre valeurs α , δ , $L_r(\alpha, \beta)$, $L_{n,r}(\alpha, \beta)$ pour une seule valeur β , effectué à l'aide du calculateur automatique ZUSE Z 23 a duré 20 secondes à peu près. Les valeurs interpolées résultantes $\hat{\beta} = 2,57$ et $\hat{\delta} = 109,0$ pour un échan-tillon tronqué sont en bon accord avec les valeurs mentionnées plus haut et évaluées sur la base d'un échantillon total. L'accord des estimateurs dans le cas d'une population tronquée est un peu moins bon.

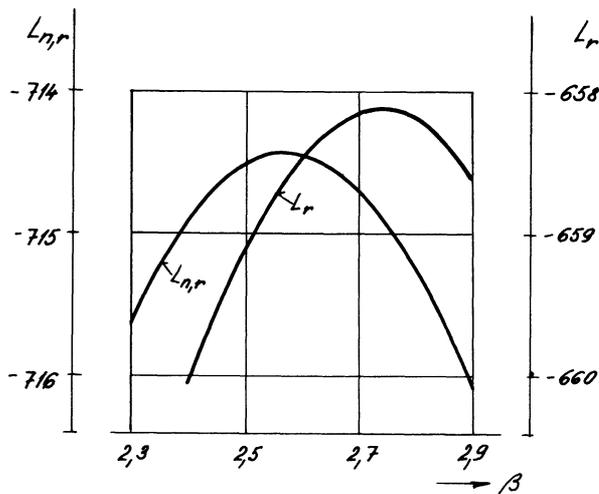


Fig. 7 - Représentation graphique de la fonction $L_r(\alpha, \beta)$ et $L_{n,r}(\alpha, \beta)$ pour la partie H.

6 - DETERMINATION DE LA PERIODE OPTIMALE POUR LA REVISION GENERALE

Un problème typique, que l'on peut résoudre à l'aide de la connaissance de caractéristiques de la durée de vie et de certains coûts, est la détermination de la période optimale pour une révision générale. La période optimale est celle qui minimise les frais totaux prévus de l'entretien de l'installation donnée dans l'état du service, c'est-à-dire les frais destinés au remplacement des éléments individuels après l'avarie et au remplacement collectif (révision générale) en certains intervalles prescrits.

Considérons, à présent, une installation où une avarie des éléments particulière a lieu au cours du service. Dans un tel cas, on aura plusieurs procédés possibles de remplacements et de réparations :

1/ soit ne remplacer chaque pièce que si elle a une avarie,

2/ soit prévoir par le calcul un remplacement de tous les éléments de type donné toujours après un certain temps x_v indépendamment des circonstances, qu'elles soient ou non avariées ; et remplacer dans la période $x < x_v$ chaque élément toutes les fois qu'il a une avarie.

Nous allons considérer, à présent, le deuxième cas et chercher la période optimale x_v . On désigne par

c_1 le coût unitaire lié avec un remplacement prévu dans le plan,
 $c_2 (> c_1)$ le coût unitaire lié avec un remplacement au cas d'une avarie

Q_0 nombre total d'éléments d'un type donné dans la population considérée.

Les frais totaux moyens dans la période $(0, x)$, à la fin de laquelle une réparation collective a lieu, seront

$$C(x) = Q_0 c_1 + c_2 G(x) \quad (6.1)$$

où $G(x)$ est la valeur moyenne du nombre total de remplacements dans l'intervalle $(0, x)$.

Pour pouvoir examiner le cas de la vie infiniment longue, on opérera avec des frais moyens par une unité de durée de vie

$$\frac{C(x)}{x} = \frac{Q_0 c_1}{x} + \frac{C_2 G(x)}{x} \quad (6.2)$$

La fonction eumulative des remplacements $G(x)$ est rapportée à la fonction de fiabilité $R(x) = 1 - F(x)$ de la partie en question par l'équation

$$Q_0 \{1 - R(x)\} = \int_0^x G'(u) R(x - u) du \quad (6.3)$$

où à l'aide de la transformation de l'équation de Carson-Laplace

$$\bar{G}(s) = Q_0 \left[\frac{1}{\bar{R}(s)} - 1 \right] \quad (6.4)$$

Par cette raison, on cherchera une valeur de $x = x_v$, telle que

$$\frac{C(x)}{c_2 Q_0 x} = \frac{c_1}{c_2 x} + \frac{1}{x} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\bar{R}(s)} - 1 \right] = \min. \quad (6.5)$$

La valeur x_v optimale ne dépend évidemment que de la distribution de la durée de vie et du rapport des deux frais c_1 et c_2 .

Considérons, par exemple, un élément dont la distribution peut être décrite par la distribution Γ .

$$f(x) = \frac{\lambda^\beta}{(\beta - 1)!} x^{\beta-1} e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad \lambda, \beta > 0 \quad (6.6)$$

$$E(\xi) = \frac{\beta}{\lambda}, \quad D^2(\xi) = \frac{\beta}{\lambda^2} \quad (6.7)$$

Dans le cas particulier où $\beta = 2$, on a :

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x} \quad (6.8)$$

$$R(x) = \int_x^\infty f(u) du = (1 + \lambda x) e^{-\lambda x} \quad (6.9)$$

$$\bar{R}(x) = \frac{s(s + 2\lambda)}{(s + \lambda)^2} \quad (6.10)$$

$$\bar{G}(s) = Q_0 \frac{\lambda^2}{s(s + 2\lambda)} \quad (6.11)$$

$$G(x) = \frac{Q_0 \lambda}{2} \left(x - \frac{1 - e^{-2\lambda x}}{2\lambda} \right) \quad (6.12)$$

ce qui nous conduit à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{C(x)}{c_2 Q_0 x} &= \frac{c_1}{c_2 x} + \frac{\lambda}{2x} \left(x - \frac{1 - e^{-2\lambda x}}{2\lambda} \right) \\ &= \frac{c_1}{c_2 x} + \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{1 - e^{-2\lambda x}}{2\lambda x} \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Si x s'accroît, le premier terme du second membre de (6.13) est une fonction décroissante, tandis que le deuxième terme est une fonction croissante de x . L'expression (6.13) a son minimum au point où $\frac{d}{dx} \left[\frac{C(x)}{c_2 x} \right] = 0$ ou au point $x = x_v$, qui satisfait à la condition :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{G(x)}{x} \right]_{x=x_v} = \left[\frac{c_1}{c_2} \frac{Q_0}{x^2} \right]_{x=x_v} \quad (6.14)$$

On a, dans ce cas :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{G(x)}{x} \right] = \frac{Q_0 \lambda}{2} \left[\frac{1 - e^{-2\lambda x}}{2\lambda x^2} + \frac{(-2\lambda) e^{-2\lambda x}}{2\lambda x} \right] = \frac{Q_0}{4x^2} \left[1 - e^{-2\lambda x} (1 + 2\lambda x) \right] \quad (6.15)$$

De ce fait, la solution est donnée par le point pour lequel

$$1 - e^{-2\lambda x} (1 + 2\lambda x) = 4 \frac{c_1}{c_2} \quad (6.16)$$

c'est-à-dire
$$e^{-2\lambda x} = \frac{1 - 4 \cdot \frac{c_1}{c_2}}{1 + 2\lambda x}$$

Cette équation n'a évidemment une solution que si $\frac{c_1}{c_2} < 0,25$. Dans le cas contraire, il n'est pas généralement opportun de considérer les réparations en masse prévues par le plan.

Il est possible d'étudier l'influence exercée sur la solution par des valeurs λ et $\frac{c_1}{c_2}$ différentes. Le paramètre λ exprime le niveau de la durée de vie moyenne, car on a :

$$E(\xi) = \frac{\beta}{\lambda}, \quad \hat{\lambda} = \frac{\beta}{x}$$

Pour $\beta = 2$, $\bar{x} = 100 \cdot 10^3$ km = 20. (5.10³) km, il vaut $\lambda = 0,10$ et l'on

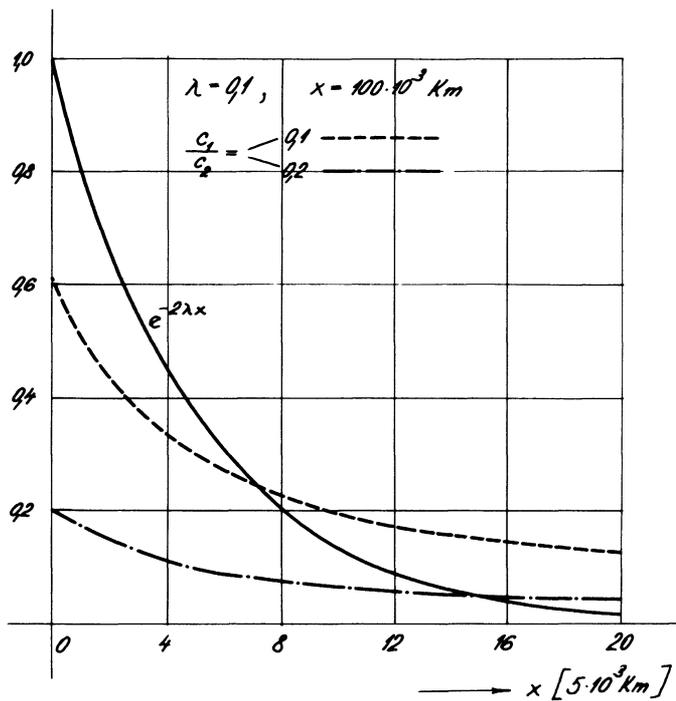


Fig. 8 a

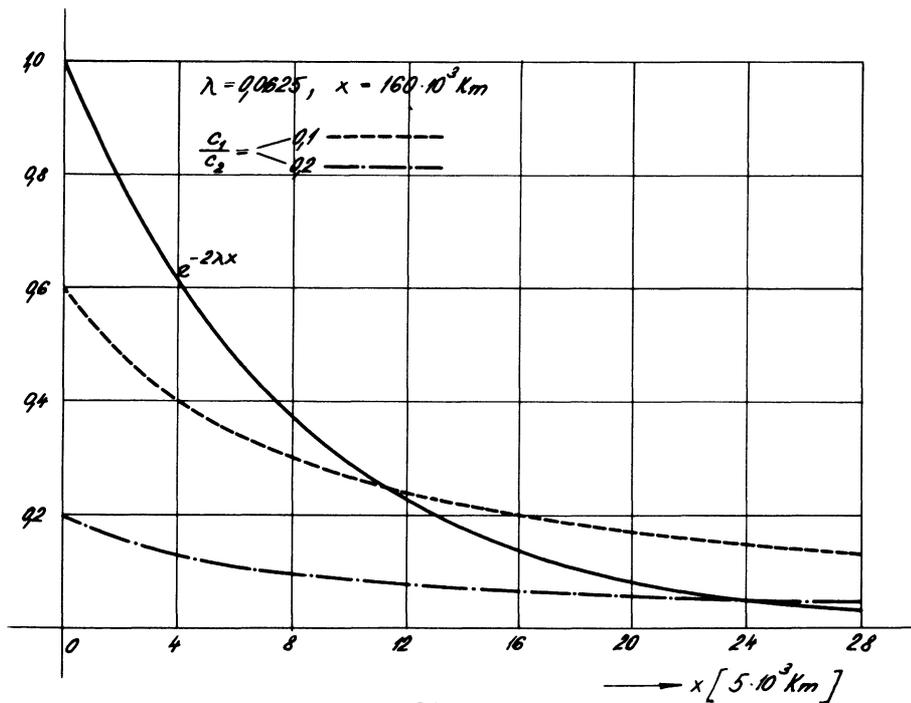


Fig. 8 b

Fig. 8 - Représentation graphique de la solution de l'équation (6.16).

obtient les courbes reproduites dans la figure 8a pour $c_1/c_2 = 0,1$ et $0,2$. Les solutions correspondantes sont respectivement $x_v = 7$ et 5 . Considérons à présent le cas $x = 160.10^3$ km = $32.(5.10)$ km. Il vient ensuite $\lambda = -\frac{2}{32} = 0,0625$. On peut voir sur la figure 8b que la solution pour $\frac{c_1}{c_2} = 0,1$ est $x_v = 11$ et pour $\frac{c_1}{c_2} = 0,2$ elle est égale à $x_v = 24$.

7 - COLLECTE ET ANALYSE DES DONNEES DE LA DUREE DE VIE

Pour utiliser les méthodes mentionnées plus haut soit à des fins de perfectionnement technique des voitures, soit à des fins économiques, il est important d'organiser un système correct pour la collecte et l'analyse des informations concernant la durée de vie des pièces d'automobiles en service chez les consommateurs. Ces informations sont aussi importantes dans les cas où on a déterminé les caractéristiques de la durée de vie en effectuant des essais de laboratoire.

A partir de l'année 1963, les informations concernant la fiabilité des voitures en service ont été collectées dans l'industrie automobile tchécoslovaque par des échantillonnages des livrets de voiture, qui sont attribués, chez les types particuliers de camions et de voitures de tourisme, à certains propriétaires lors de l'échat de la nouvelle voiture. Le propriétaire doit enregistrer dans ces livrets les différentes données concernant le service de la voiture, par exemple le nombre de kilomètres parcourus en un mois et, pour les réparations, la date de l'avarie, le nombre total de kilomètres parcourus, le type et le nombre de pièces remplacées et la description de l'avarie. Le feuillet qui contient ces informations est envoyé avant le 30.6. et, avant le 31.12 de chaque année à l'usine productrice où il est analysé. De cette manière on peut obtenir des informations plus authentiques que celles qui résulteraient de la collecte et de l'analyse des données à 100 % concernant toutes les réparations.

8 - CONCLUSION

Dans ce rapport, on a mis en évidence quelques résultats théoriques récents dans le domaine de la statistique mathématique que l'on peut appliquer avec succès à l'élévation du niveau technique et de l'efficacité de la production et du fonctionnement des véhicules à moteur. On a résolu, avant tout, les questions de "planning" du volume de la production de pièces de rechange, de l'estimation des paramètres de la distribution de Weibull, moyennant les données tronquées, et de la détermination de la période optimale pour les révisions générales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MENDENHALL W. - A bibliography on life-testing and related topics, *Biometrika*, 1958, 521-543.

- [2] EPSTEIN B. - Recent developments in life-testing. Bul. de l'Inst. Int. de Statistique - 33^e session, 1961.
- [3] DAVIS D.J. - The analysis of some failure data. J.A.S.A. 47, 1952, 113/150.
- [4] SERENSEN S.V. - Statisticheskiye voprosy protchnosti maschinostrojenii, Moscow, 1961.
- [5] BUCKLAND W.R. - Statistical assessment on the life characteristic, Griffins, London, 1964.
- [6] SEDLACEK J. - Rapport interne, SVUTT-58-01005, Prague.
- [7] WILFORD A.I. - Analysis and interpretation of service records, Proc. Autom. Div., 6, 1954-55.
- [8] LETH P.W. - Defence engineering plans military vehicle reliability, Autom. Ind. Vol. 121. N° 12, 1959.
- [9] KAUFMANN A. - Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle. Dunod, Paris, 1959.
- [10] TAULOR J. et JACKSON RRP - An application of the birth and death process to the provision of spare machine, Oper. Quarterly, Vol. 5, N° 4 1954. 95-105.
- [11] KENDRECK C. - Vehicle component replacement policy, Rep. N° 5960-2, Dept. of Eng. Proc. Univ. of Birmingham, 1961.
- [12] ZALUDOVA A. - Utilisation of life characteristics of automobile parts for planning the production of spare parts, rapports internes SVUTT-62-01009, SVUTT-63-01012, Prague.
- [13] EPSTEIN B. - The exponential distribution and its role in life testing. Ind. Qual. Control, vol. XV, n° 6, 1958, 4-9.
- [14] WEIBULL W. - The phenomenon of rupture in solids, Ingen. Vetensk. Akad. Handl. 1953, 2, 1939.
- [15] FREUDENTAL A.M. - a) Minimum life in fatigue JASA, 1954, 375-397.
GUMBEL E.I. - b) Physical and statistical aspects of fatigue problems, Advances in appl. Mech. IV, 1956.
- [16] GUMBEL E.I. - Statistical theory of extreme values and some practical applications, Appl. Math. Series 33, Nat. Bur. Stand. 1954.
- [17] VIGIER M. - L'interprétation des essais d'endurance grâce aux techniques de la fiabilité, Bull. AFCIQ Mars 1965.
- [18] KAO J.H.K. - The Weibull distribution in the life testing of electron tubes, unpubl. paper pres. at meeting of Amer. Stat. Ass. 1955
- [19] CHURCHMAN, ACKOFF, ARNOFF - Introduction to operations research, J. Wiley, 1957.