

E. MORICE

**Test de durée de vie avec remplacement des défailants
(cas d'une loi exponentielle)**

Revue de statistique appliquée, tome 13, n° 2 (1965), p. 47-55

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_2_47_0

© Société française de statistique, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEST DE DURÉE DE VIE AVEC REMPLACEMENT DES DÉFAILLANTS

(Cas d'une loi exponentielle)

E. MORICE

Il est souvent utile pour des raisons d'ordre pratique d'envisager un test de durée totale maximale préfixée T , le test conduisant à l'acceptation si le nombre des défailants au cours de cette durée est inférieur ou égal à un nombre donné c , ou un rejet dès que ce nombre dépasse c .

Dans un test avec remplacement, n éléments sont soumis au test à l'origine ; chacun des défailants étant immédiatement remplacé par un élément tiré au hasard du lot examiné ; le nombre des éléments soumis au test est toujours égal à n .

Dans l'hypothèse où la distribution des durées de vie dans la population suit la loi exponentielle de moyenne θ , on est en présence d'un processus de Poisson de taux n/θ .

Si x est le nombre aléatoire des défailants au cours de la durée T , on aura :

$$\Pr [x \leq c] = \sum_{x=0}^c e^{-nT/\theta} \frac{(nT/\theta)^x}{x!}$$

Problème - Déterminer un plan d'échantillonnage tel que la probabilité d'acceptation P_a , pour $x \leq c$, satisfasse aux conditions (figure 1)

$$\begin{aligned} P_1 &\geq 1 - \alpha && \text{si } \theta \geq \theta_1 \\ P_2 &\leq \beta && \text{si } \theta \leq \theta_2 \end{aligned} \quad \theta_2 < \theta_1$$

(β = risque du client, α = risque du fournisseur).

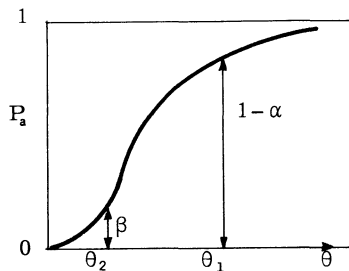


Fig. 1

Un tel plan est alors défini par les conditions :

$$\beta = \sum_{x=0}^c e^{-nT/\theta_2} \frac{(nT/\theta_2)^x}{x!}$$

$$1 - \alpha = \sum_{x=0}^c e^{-nT/\theta_1} \frac{(nT/\theta_1)^x}{x!}$$

qui doivent permettre de déterminer n et c (ou plus généralement nT et c, les équations ne dépendant de n et de T que par leur produit).

Une solution graphique, élégante et rapide de ce problème est fournie en utilisant l'abaque proposé par M. Cavé en 1955⁽¹⁾ pour déterminer un plan simple d'échantillonnage au hasard (contrôle d'acceptation sur attributs, répondant aux conditions classiques (α , p_1 , β , p_2) : il suffit dans l'abaque de M. Cavé de remplacer.

$$m = np \quad \text{par} \quad m = nT/\theta, \quad \text{soit} \quad n \text{ par } nT \text{ et } p \text{ par } 1/\theta$$

$$p_2/p_1 \quad \text{par} \quad \theta_1/\theta_2$$

Partant du rapport connu θ_1/θ_2 , le schéma ci-joint montre le cheminement à utiliser (figure 2)

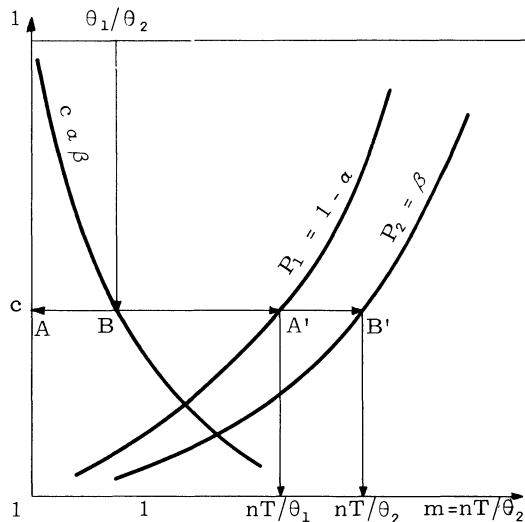


Fig. 2

$$\theta_1/\theta_2 \longrightarrow c \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} nT/\theta_1 = m_1 \\ nT/\theta_2 = m_2 \end{array} \right\} \longrightarrow nT = \left\{ \begin{array}{l} m_1\theta_1 \\ m_2\theta_2 \end{array} \right.$$

Le produit nT étant ainsi déterminé, on choisira n et T compte tenu de considérations économiques (coût des éléments, durée.....).

(1) Cavé - Le contrôle statistique des fabrications. Eyrolles (Paris) 1961

Morice - Graphiques à échelles fonctionnelles. Revue de Statistique Appliquée Vol XII N° 3 (1964).

L'abaque permet aussi de tracer par points la courbe d'efficacité du plan qui, en plus des points (θ_2, β) et $(\theta_1, 1 - \alpha)$, est définie par les couples de valeurs correspondantes (P et nT/θ d'où θ) que l'on peut lire sur l'abaque pour les points d'ordonnée c des diverses courbes P qui y figurent.

Exemple.

I - Détermination du plan qui acceptera un lot de vie moyenne $\theta_1 = 6\ 000$ heures, 95 fois sur 100 et qui rejettera un lot de vie moyenne $\theta_2 = 2\ 000$ heures 90 fois sur 100.

Le rapport $\theta_1/\theta_2 = 3$ et la courbe C ($\alpha = 0,05$, $\beta = 0,10$) donnent une valeur théorique de c comprise entre 6 et 7 qui devra en fait être remplacée par une valeur entière voisine.

1/ Si l'on prend $c = 7$, les deux courbes $P_1 = 1 - \alpha = 0,95$ et $P_2 = \beta = 0,10$ donnent

$$m_1 = \frac{nT}{\theta_1} = 4 \qquad m_2 = \frac{nT}{\theta_2} = 11,8$$

d'où les deux valeurs différentes

$$(nT)_1 = 24\ 000 \qquad (nT)_2 = 23\ 600$$

Il suffira pratiquement de prendre pour nT la valeur moyenne $nT = 23\ 800$: tout plan tel que $c = 7$ et $nT = 23\ 800$, par exemple $n = 238$, $T = 100$ heures répondra approximativement à la question, une interpolation graphique dans le réseau des courbes P montre que pour $c = 7$ et

$$nT/\theta_1 = 3,97 \qquad nT/\theta_2 = 11,9$$

on a sensiblement

$$\alpha = 0,045 \qquad \beta \sim 0,10$$

2/ De même pour $c = 6$, on trouverait

$$m_1 = nT/\theta_1 = 3,3 \qquad m_2 = nT/\theta_2 = 10,6$$

$$(nT)_1 = 19\ 800 \qquad (nT)_2 = 21\ 200$$

Tout plan ($c = 6$, $nT = 20\ 500$) serait tel que

$$\alpha \# 0,06 \qquad \beta \# 0,12$$

3/ Au lieu de la moyenne arithmétique, on peut envisager une formule d'interpolation donnant en résultat plus voisin des conditions théoriques (α , θ_1 , β , θ_2). M. Cavé propose de rechercher celles des solutions nT qui fait correspondre aux probabilités fixées α et β des taux instantanés de défaillance $p'_1 = 1/\theta'_1$, $p'_2 = 1/\theta'_2$ décalés d'une même quantité Δp des valeurs prévues $p_1 = 1/\theta_1$ et $p_2 = 1/\theta_2$ soit :

$$\begin{aligned} p'_1 &= p_1 + \Delta p & p'_1 + p'_2 &= p_1 + p_2 \\ p'_2 &= p_2 - \Delta p \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$nT = \frac{m_1}{p'_1} = \frac{m_2}{p'_2} = \frac{m_1 + m_2}{p_1 + p_2} = \frac{(nT)_1/\theta_1 + (nT)_2/\theta_2}{1/\theta_1 + 1/\theta_2}$$

Pour le plan $c = 7$, on obtiendrait alors

$$nT = \frac{4 + 11,8}{0,00067} = 23\,700 \text{ heures}$$

soit :

$$\alpha = 0,05 \quad \text{pour} \quad \theta_1' = \frac{23\,700}{4} = 5\,925 \text{ h au lieu de } 6\,000 \text{ h}$$

$$\beta = 0,05 \quad \text{pour} \quad \theta_2' = \frac{23\,700}{4} \neq 2\,010 \text{ h au lieu de } 2\,000 \text{ h}$$

(conditions théoriques initialement prévues)

Remarques

I - L'abaque Cavé est limité à $c = 24$, une table de χ^2 permettra de le prolonger pour des valeurs supérieures à 24 en utilisant éventuellement une échelle logarithmique pour c de manière à réduire l'encombrement.

Pour des valeurs du rapport θ_2/θ_1 peut supérieures à l'unité ou pour de petites valeurs de α et β , conduisant à des valeurs de c supérieures à 24, on pourra utiliser les formules approchées :

$$c = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{u_{1-\beta} - u_\alpha \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2}}}{\sqrt{\theta_1/\theta_2} - 1} \right)^2 - 3 \right]$$

$$(nT/\theta)_2 = \frac{1}{4} [\sqrt{4c+3} + u_{1-\beta}]^2 = \frac{1}{2} \chi_{1-\beta}^2, \quad \nu = 2(c+1)$$

$$(nT/\theta)_1 = \frac{1}{4} [\sqrt{4c+3} + u_\alpha]^2 = \frac{1}{2} \chi_\alpha^2, \quad \nu = 2(c+1)$$

u_p désignant la valeur de la variable normale réduite telle que :

$$\Pr [u < u_p] = P$$

de même que

$$\Pr [\chi^2 < \chi_p^2] = P$$

pour

$$0 < P < 1$$

Exemple : $\theta_1/\theta_2 = 2$, $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,01$

Ce calcul donne :

$$c = 31 \quad (nT)_2 = 46,24 \theta_2, \quad (nT)_1 = 23,14 \theta_1$$

(Pour $\nu = 64$, la table de χ^2 donne

$$nT = 46,6 \theta_2 = 23,3 \theta_1)$$

II - Le document américain H. 108 "Sampling procedures and tables for life and reliability Testing (exponential distribution)", donne les valeurs de l'effectif n de l'échantillon et du critère de rejet $r = c + 1$, correspondant à diverses combinaisons des paramètres θ_1/θ_2 ($\frac{3}{2}$, 2, 3, 5, 10), $\frac{T}{\theta_1}$ (3, 5, 10, 20), α ou β (0,01, 0,05, 0,10, 0,25).

Dans ces tables, les valeurs entières de n et $r = c + 1$ sont choisies de manière que la probabilité d'acceptation pour $\theta = \theta_1$ soit *au moins* égale à $1 - \alpha$, et la probabilité de rejet pour $\theta = \theta_2$ soit *environ* $1 - \beta$.

III - L'exemple traité au début de cette note correspond au plan de contrôle simple sur attribut défini par les conditions :

$$\alpha = 0,05 \quad p_1 = 0,003$$

$$\beta = 0,10 \quad p_2 = 0,009$$

d'où

$$p_2/p_1 = 3 \longrightarrow c = 7 \quad \begin{cases} (np)_1 = 4 \\ (np)_2 = 11,8 \end{cases}$$

$$n = \frac{4 + 11,8}{0,003 + 0,009} = 1318$$

II - Courbe d'efficacité du plan ($c = 7$, $nT = 23700$) Figure 3

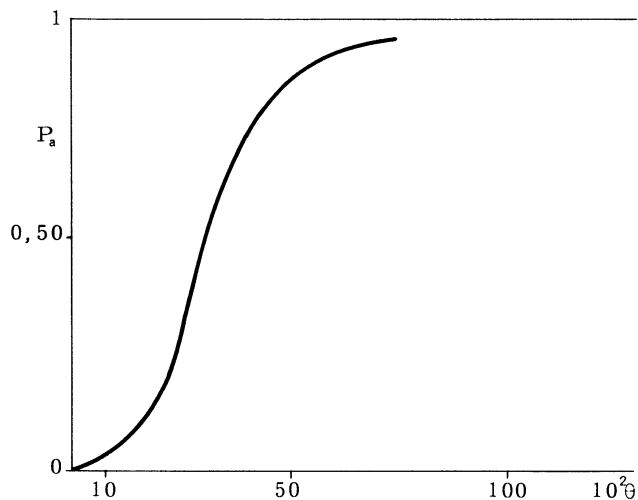


Figure 3 - Courbe d'efficacité.

Elle est jalonnée par les points suivants déterminés à l'aide de l'abaque.

| P_a | nT/θ | $10^2\theta$ |
|-------|-------------|--------------|
| 0,999 | 3 | 118,5 |
| 0,99 | 2,9 | 81,7 |
| 0,95 | 4 | 59,3 |
| 0,90 | 4,6 | 51,5 |
| 0,80 | 5,6 | 42,3 |
| 0,50 | 7,6 | 31,2 |
| 0,20 | 10,1 | 23,5 |
| 0,10 | 11,8 | 20 |
| 0,05 | 13,1 | 18,1 |
| 0,01 | 16 | 14,8 |
| 0,001 | 19,5 | 12,1 |

III - TRACE DE L'ABAQUE

L'abaque comporte deux réseaux de courbes.

1/ Les courbes P : chacune correspondant à une valeur de la probabilité d'acceptation $P_a = 1 - \alpha$ ou β , est définie par la relation

$$\sum_{x=0}^c e^{-m} \frac{m^x}{x!} = P_a \quad \text{avec} \quad m = nT/\theta.$$

Compte tenu de la relation classique entre la loi de Poisson et la loi de χ^2 , cette condition entre m et c peut s'écrire :

$$P_a = 1 - \Pr [\chi^2 < 2m, \quad v = 2(c + 1)]$$

d'où

$$m = \frac{1}{2} \chi_{1-P_a}^2, \quad v = 2(c + 1)$$

$\chi_{1-P_a}^2$ étant défini par

$$1 - P_a = \Pr [\chi^2 < \chi_{1-P_a}^2]$$

pour $v = 2(c + 1)$ degrés de liberté.

Pour une valeur donnée de P_a , la table de la distribution de χ^2 , donne la valeur de m en fonction de c .

Par exemple, pour $P_a = 0,95$ et $c = 5$ d'où $v = 12$ on a :

$$m = \frac{1}{2} \chi_{0,95}^2 = 2,615, \quad v = 12$$

d'où le point $(m = \frac{nT}{\theta} = 2,615, c = 5)$ de la courbe $P_a = 0,95$.

D'une manière générale $m = \frac{1}{2} \chi_a^2(v)$ est l'abscisse du point d'ordonnée $c = \frac{v}{2} - 1$ de la courbe $P = 1 - \alpha$.

2/ Les courbes C (α, β)

Ces courbes qui permettent la détermination de c en fonction du rapport θ_1/θ_2 , compte tenu des risques correspondants α et β sont définies à partir des relations.

$$2 m_2 = \frac{2 nT}{\theta_2} = \chi_{1-\beta}^2, \quad v = 2(c + 1)$$

$$2 m_1 = \frac{2 nT}{\theta_1} = \chi_a^2, \quad v = 2(c + 1)$$

d'où

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\chi_{1-\beta}^2}{\chi_a^2}, \quad v = 2(c + 1)$$

Pour un couple donné de valeurs de α et β , cette relation fait correspondre à chaque valeur entière de c , la valeur du rapport θ_1/θ_2 et donne un point de la courbe $C(\alpha, \beta)$.

Par exemple pour $\alpha = 0,05$, $\beta = 0,10$ on a, pour $c = 3$:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\chi_{0,90}^2}{\chi_{0,05}^2} = \frac{13,4}{2,73} = 4,91, \quad v = 8$$

Le point $c = 3$, $\theta_1/\theta_2 = 4,91$ est un point de la courbe C [$\alpha = 0,05$, $\beta = 0,10$] que l'on pourra ainsi déterminer par points en donnant à c les valeurs $0, 1, 2, \dots$.

A partir d'une table de χ^2 , il est donc facile de construire les courbes P et les courbes C pour toute valeur de α et β dont les fractiles α et $1 - \beta$ figurent dans la table.

L'abaque étant tracé sur un graphique semi-logarithmiques avec une échelle linéaire pour c , et des échelles logarithmiques de même module pour $m = nT/\theta$ et pour θ_1/θ_2 , on peut remarquer que pour tout couple (α, β) fixé, on a :

$$\log \theta_1 - \log \theta_2 = \log m_2 - \log m_1$$

soit

$$AB = A'B'$$

Les deux échelles sont décalées de deux modules afin d'éviter l'enchevêtrement des deux réseaux de courbes.

Emploi de l'abaque pour l'estimation de la durée de vie moyenne (intervalle de confiance).

a) Le test est arrêté à l'instant t_r de la r ème défaillance.

L'estimation de la vie moyenne est alors

$$\theta = \frac{nt_r}{r}$$

T_r est une variable aléatoire dont la loi élémentaire est :

$$\Pr [t < T_r < t + dt] = \frac{1}{\Gamma(r)} e^{-nt/\theta} \left(\frac{nt}{\theta}\right)^{r-1} \frac{n}{\theta} dt$$

soit

$$\Pr [0 < T_r < t_r] = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\frac{n}{\theta} t_r} e^{-x} x^{r-1} dx,$$

en posant

$$x = \frac{nt}{\theta}$$

La variable x est donc une variable Gamma de paramètre r , c'est-à-dire une variable $1/2 \chi^2$ avec $\nu = 2r$ degrés de liberté.

(En effet, si on pose $x = \frac{\chi^2}{2}$, on obtient

$$\Pr [0 < T_r < t_r] = \frac{1}{2^r \Gamma(r)} \int_0^{\frac{2nt_r}{\theta}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{r-1} d(\chi^2)$$

soit, pour $r = \nu/2$

$$\begin{aligned} \Pr [0 < T_r < t_r] &= \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \int_0^{\frac{2nt_r}{\theta}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1} d(\chi^2) \\ &= \Pr \left[\chi^2 < \frac{2nt_r}{\theta}, \nu = 2r \right] \end{aligned}$$

Un intervalle de confiance à $1 - \alpha = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$ pour θ sera défini par les conditions :

$$\alpha_2 = \Pr [T_r < t_r | \theta_2] = \Pr \left[\chi^2 < \frac{2nt_r}{\theta_2}, \nu = 2r \right]$$

$$\alpha_1 = \Pr [T_r > t_r | \theta_1] = 1 - \Pr \left[\chi^2 < \frac{2nt_r}{\theta_1}, \nu = 2r \right]$$

d'où

$$\frac{2nt_r}{\theta_2} = \chi_{\alpha_2}^2 \quad (\nu = 2r)$$

$$\frac{2nt_r}{\theta_1} = \chi_{1-\alpha_1}^2 \quad (\nu = 2r)$$

d'où l'intervalle de confiance $\left[\frac{\theta_1}{\chi_{1-\alpha_1}^2}, \frac{\theta_2}{\chi_{\alpha_2}^2} \right]$ défini par

$$\frac{2nt_r}{\chi_{1-\alpha_1}^2} < \theta < \frac{2nt_r}{\chi_{\alpha_2}^2}, \quad \nu = 2r$$

ou pour un intervalle symétrique en probabilité :

$$\frac{2nt_r}{\chi_{1-\alpha/2}^2} < \theta < \frac{2nt_r}{\chi_{\alpha/2}^2}, \quad \nu = 2r$$

Exemple : Plan $n = 185$, $r = 5$, arrêté avec décision de rejet à la 5^{ème} défaillance à l'instant $t_r = 80$ h. Intervalle de confiance à 0,90 ($\alpha = 0,10$)

$$\theta_1 = \frac{2 \times 185 \times 80}{\chi_{0,95}^2 \quad (\nu=10)} = \frac{29600}{1,83} = 1617 \text{ h}$$

$$\theta_2 = \frac{2 \times 185 \times 80}{\chi_{0,05}^2 \quad (\nu=10)} = \frac{29600}{3,94} = 7512 \text{ h}$$

A défaut d'une table de χ^2 les valeurs de $\frac{1}{2} \chi_{0,95}^2 \nu=10 = 9,15$ et $\frac{1}{2} \chi_{0,05}^2 \nu=10 = 1,97$ peuvent être lues sur l'abaque : ce sont les abscisses respectives des points d'ordonnée $\frac{\nu}{2} - 1 = r - 1 = 4$ des deux courbes $P = 0,05$ et $P = 0,95$.

b) Le test est arrêté à un instant préfixé T avec r défaillances constatées au cours de la période d'observation.

L'estimation de la vie moyenne est alors

$$\hat{\theta} = \frac{nT}{r}$$

Cette fois c'est r qui est une variable aléatoire. Compte tenu de la relation entre la loi de χ^2 et la loi de Poisson

$$\sum_{x=0}^c e^{-m} \frac{m^x}{x!} = 1 - \Pr [\chi^2 < 2m, \nu = 2(c+1)]$$

l'intervalle de confiance à $1 - \alpha = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$ pour θ sera défini par

$$\alpha_1 = \Pr [x \leq r | \theta_1]$$

$$\alpha_2 = \Pr [x \geq r | \theta_2] \quad \text{ou} \quad 1 - \alpha_2 = \Pr [x < r | \theta_2]$$

soit

$$\alpha_1 = 1 - \Pr \left[\chi^2 < \frac{2nT}{\theta_1}, \quad \nu = 2(r + 1) \right]$$

$$1 - \alpha_2 = 1 - \Pr \left[\chi^2 < \frac{2nT}{\theta_2}, \quad \nu = 2r \right]$$

d'où l'intervalle cherché θ_1 ————— θ_2 défini par

$$\frac{2nT}{\chi_{1-\alpha_1}^2 \nu=2(r+1)} < \theta < \frac{2nT}{\chi_{\alpha_2}^2 \nu=2r}$$

ou pour un intervalle symétrique en probabilité

$$\frac{2nT}{\chi_{1-\alpha/2}^2 \nu=2(r+1)} < \theta < \frac{2nT}{\chi_{\alpha/2}^2 \nu=2r}$$

Exemple : Plan $n = 185$, $T = 100$ h, plan arrêté après 100 heures avec $r = 3$ défaillances constatées. Intervalle de confiance à 0,90 ($\alpha = 0,10$)

$$\theta_1 = \frac{2 \times 18500}{\chi_{0,95}^2 \nu_1=8} = \frac{37000}{15,5} = 2387 \text{ h}$$

$$\theta_2 = \frac{2 \times 18500}{\chi_{0,05}^2 \nu_2=6} = \frac{37000}{1,64} = 22561 \text{ h}$$

Comme précédemment les valeurs de :

$\frac{1}{2} \chi_{0,95}^2 \nu=8 = 7,75$ et $\frac{1}{2} \chi_{0,05}^2 \nu=6 = 0,82$ sont des abscisses respectives des points d'ordonnées $\frac{\nu_1}{2} - 1 = r = 3$ et $\frac{\nu_2}{2} - 1 = r - 1 = 2$ des deux courbes $P = 0,05$ et $P = 0,95$.