REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. TORRENS-IBERN

Les méthodes statistiques de contrôle dans les processus industriels continus

Revue de statistique appliquée, tome 13, nº 1 (1965), p. 65-93
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_1_65_0>

LES MÉTHODES STATISTIQUES DE CONTRÔLE DANS LES PROCESSUS INDUSTRIELS CONTINUS [1]

J. TORRENS-IBERN
École Technique Supérieure d'Ingénieurs Industriels
et École d'Administration des Entreprises, Barcelone (Espagne)

I - INTRODUCTION

Il y a deux sortes de processus de fabrication que l'on peut appeler continus. D'une part, tous les processus de fabrications non différenciés, tels que ceux des industries chimique et textile ; d'autre part, la fabrication de pièces mécaniques par des procédés automatiques en une si grande série que tout se passe comme si de la machine s'écoulait un flot ininterrompu de pièces.

Les méthodes de contrôle appropriées à ces deux sortes de production continue seront évidemment différentes. Dans le premier cas, la condition prédominante du contrôle sera la détection immédiate de tout dérangement du processus industriel pour y porter remède, sans qu'il soit possible de redresser la qualité sortante de la fabrication au moyen des procédés d'inspection rectificative, puisque la production n'est pas différenciée et qu'il n'y a pas vraiment d'éléments défectueux susceptibles d'être remplacés par des éléments bons équivalents. Par contre, dans la fabrication d'éléments mécaniques en grande série, l'inspection peut remplir un rôle double. Elle doit servir, d'abord, à déceler les modifications subies par le processus afin d'en corriger les dérangements, mais aussi le contrôle permet d'écarter du flux de pièces produites, au moins partiellement, celles qui sont mauvaises, améliorant ainsi la qualité que l'on peut garantir aux clients.

Les procédés classiques du contrôle statistique, c'est-à-dire les graphiques de Shewart ne sont pas tout à fait appropriés à cette sorte de fabrications. La détection des dérèglements du processus est peu sensible pour des productions continues ; il est donc logique que l'on ait cherché à obtenir des procédés de contrôle plus efficaces que les procédés classiques.

Du point de vue théorique, d'ailleurs, les graphiques classiques souffrent d'un défaut certainement fondamental. En effet, la théorie de Shewart est basée sur la considération qu'une fabrication initialement correcte peut devenir défectueuse ; et que, tôt ou tard, un échantillon signalera le dérèglement, ce qui permettra sa correction. Or, si la

----

(1) Cette étude, déjà publiée dans "Cuadernos de Estadística Aplicada Investigación Operativa" (*II*, 3 et 4, 1963), a été présentée à la 34ème session de l'Institut International de Statistique, Ottawa, 1963. Antérieurement elle avait fait l'objet des exposés au Séminaire de Statistique Appliquée et Recherche Opérationnelle de l'Ecole d'Ingénieurs Industriels de Barcelone le 15.11.62 (1e partie) et le 24.11.60 (2e partie).

production actuelle nous informe sur la qualité de la production future, il est logique de considérer qu'il existe une certaine interdépendance entre les productions des moments successifs et que les échantillons prélevés antérieurement contiendront une certaine information sur le fonctionnement actuel du processus. On ne tient pas compte de ceci dans les applications classiques des graphiques de contrôle, où chaque échantillon est considéré comme indépendant des autres et représentatif, seulement, de la production au moment du prélèvement.

Lorsque la production est ininterrompue, le raisonnement précédent a encore davantage de poids. Dans les industries à processus continus, telles que la filature, la fonderie au cubilot, la plupart des fabrications de l'industrie chimique, les modifications de la qualité du produit ont lieu lentement mais sûrement ; on ne peut donc pas admettre que les différents échantillons sont mutuellement indépendants ou les traiter comme s'ils l'étaient.

Ces inconvénients théoriques des graphiques de contrôle de Shewart se reflètent, naturellement, en inconvénients pratiques ; en effet, un déplacement de la moyenne en un certain sens, petit mais suffisant pour provoquer une augmentation sensible de déchets, tarde parfois longtemps à être décelé.

La solution pour éliminer toutes ces difficultés a été trouvée avec des systèmes de contrôle qui tiennent compte de cette interdépendance et ne perdent pas inutilement une partie de l'information recueillie en considérant séparément chaque échantillon.

II - L'EFFICACITE DU CONTROLE ET SA REPRESENTATION

On sait que tout contrôle par échantillon, comme tout test statistique, se caractérise par la courbe d'efficacité de l'épreuve. Dans le cas des graphiques de contrôle en cours de fabrication, la courbe caractéristique ou courbe d'efficacité, même si elle n'est pas très répandue, n'en constitue pas moins le moyen classique de considérer l'efficacité du contrôle. Le problème est, cependant, plus compliqué que dans le contrôle à la réception parce que les deux paramètres de la loi de référence normale, m et σ, peuvent se dérégler indépendamment l'un de l'autre et il faudra faire l'étude dans l'espace, la courbe caractéristique devenant une surface [1]. On se limite, en général, à étudier séparément les conséquences du déreglement de chacun des deux paramètres sur l'acceptabilité de l'hypothèse que la marche de la machine est satisfaisante.

Considérons, seulement, le graphique de contrôle des moyennes. De plus, bien qu'il nous renseigne accessoirement sur les déréglements de la dispersion du processus [2], nous nous limiterons à nous occuper des décentrages de la fabrication. La courbe d'efficacité peut être tracée en fonction de ce décentrage, mesuré en écarts-types ou bien en fonction du pourcentage des déchets produits. Dans le premier cas, on ne tient pas compte des tolérances de fabrication, tandis que dans le second cette considération est essentielle.

Les figures 1 et 2 montrent des courbes d'efficacité des graphiques de contrôle des moyennes à partir d'échantillons d'une, 4 et 9 pièces. Dans la figure 1, les probabilités de conclure à un réglage correct sont données en fonction des décentrages mesurés en écarts-types ; dans la figure 2, les abscisses représentent le pourcentage de déchets produits, l'intervalle de tolérance spécifié étant supérieur à l'intervalle de tolérance propre de la machine (6, 18 σ). La comparaison des deux figures montre que le second procédé de représentation est plus approprié lorsqu'il s'agit de se conformer à une spécification et que le contrôle classique par prélèvement d'échantillons unitaires est très peu efficace.

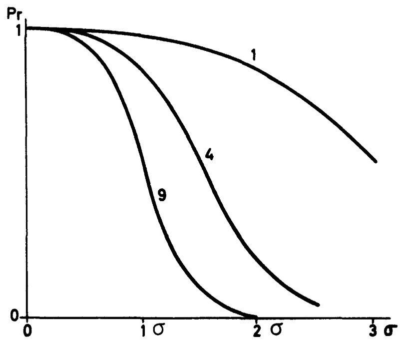

Fig. 1

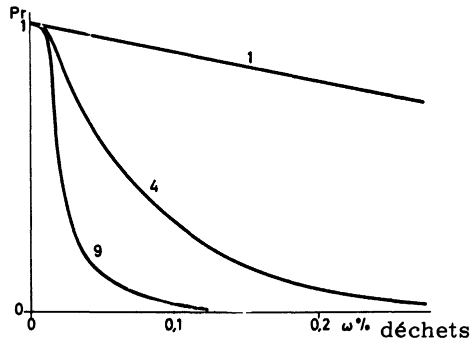

Fig. 2

Cependant, aucun des deux procédés d'expression de la courbe d'efficacité ne manifeste clairement ce que l'on peut attendre d'un plan d'échantillonnage appliqué au contrôle d'une fabrication ; à la probabilité de conclure, à tort ou à raison, que le réglage est correct, on préfère, à présent, comme mesure de l'efficacité du contrôle, une autre caractéristique des plans d'échantillonnage nouvellement introduite dans ces études, la *longueur moyenne de la rafale*, (ARL - *Average run length)*. Cette longueur peut être définie comme le nombre moyen d'échantillons à prélever, dans les conditions données de fonctionnement de la machine, jusqu'à ce que l'on trouve un échantillon qui provoque son réglage. Un bon plan d'échantillonnage en cours de fabrication aura une ARL très grande (de l'ordre de 500 à 1 000), lorsque la fabrication est de bonne qualité (AQL), tandis que l'ARL sera petite (de l'ordre de 2 ou 3) pour une qualité mauvaise, (RQL).

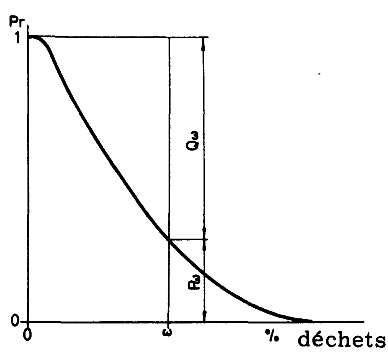

Fig. 3

On montre facilement que la longueur moyenne de la rafale est égale à la valeur réciproque de la probabilité de refus du réglage dans les conditions de fabrication considérées. En effet, le nombre moyen d'échantillons qu'il faut prélever pour conclure à un déréglage du processus lorsque le pourcentage des déchets est ω (figure 3) sera :

$$E[N] = \sum_{N=1}^{\infty} N\, p_N = \sum_{N=1}^{\infty} N\, P_\omega^{N-1}\, Q_\omega = \frac{Q_\omega}{P_\omega} \sum_{N=1}^{\infty} N\, P_\omega^{N} = \frac{Q_\omega}{P_\omega} \cdot \frac{P_\omega}{(1-P_\omega)^2} = \frac{1}{Q_\omega}$$

Pour les qualités AQL et RQL, les longueurs moyennes des rafales, L_A et L_R sont, respectivement ;

$$L_A = \frac{1}{\alpha} \qquad L_R = \frac{1}{1-\beta}$$

en conservant les symboles α et β pour les risques d'erreur de décision concernant, respectivement, le producteur et le consommateur dans le contrôle à la réception.

Une importante différence pratique apparaît entre les caractéristiques des échantillonnages, pour le contrôle des fabrications et celles des échantillonnages pour la réception. On sait que les valeurs $\alpha = 0,05$ et $\beta = 0,10$ sont très convenables dans ceux-ci ; par contre, dans le contrôle en cours de fabrication il conviendra davantage de prendre pour α des valeurs telles que 0,001 - 0,002 et pour β des valeurs de 0,5 (ARL = 2) ou 0,667 (ARL = 3). Il est évident que dans ces cas la valeur de β ne peut pas être considérée comme négligeable.

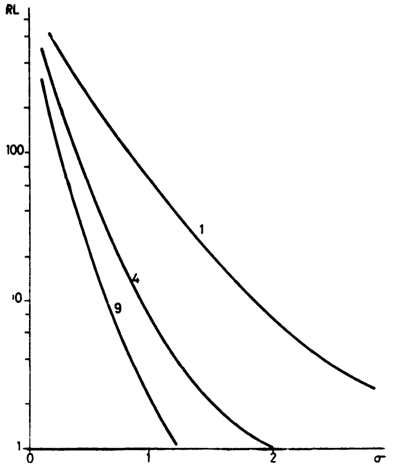

Fig. 4

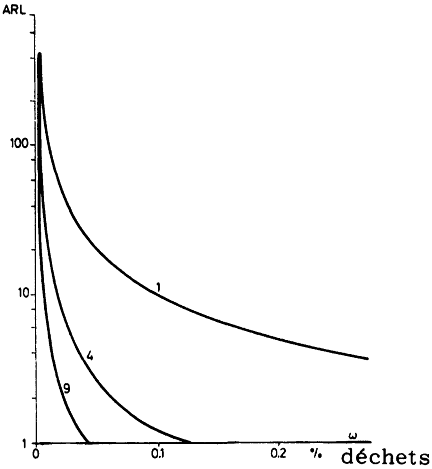

Fig. 5

Les figures 4 et 5 donnent les courbes ARL des graphiques de contrôle des moyennes pour des échantillons d'une, 4 et 9 pièces, en fonction du déréglage exprimé respectivement en écarts-types et en pourcentage de déchets ; l'échelle des ordonnées est logarithmique pour réduire ces courbes à une hauteur convenable. L'information qu'elles fournissent confirme celle des courbes caractéristiques classiques (figures 1 et 2).

III LE CONTROLE DES PRODUCTIONS CONTINUES NON DIFFERENCIEES

Pour augmenter l'efficacité du contrôle des moyennes, plusieurs solutions ont été proposées ; elles ont pour base l'utilisation conjointe des résultats de l'inspection des périodes antérieures et de ceux des dernières observations ; ainsi s'ajoute l'information que possèdent ceux-là à celle des nouvelles données.

On peut classer les graphiques de contrôle par variables, appropriés aux processus continus, comme suit :

1/ *Graphique de contrôle de moyennes géométriques mobiles*. On calcule pour chaque échantillon prélevé la moyenne géométrique pondérée des résultats des dernières observations et de la moyenne pondérée relative à la période précédente. Les moyennes ainsi calculées se placent sur des graphiques de contrôle à droites parallèles dont la situation peut être déterminée au moyen des formules employées pour les graphiques de contrôle classiques en considérant une taille fictive pour les échantillons pris, laquelle dépend des coefficients de pondération employés [3]. Cette méthode a l'inconvénient de conduire, dans son application, à des calculs plus compliqués que ceux des procédés classiques.

2/ *Graphiques de contrôle cumulatifs à droites divergentes.* Pour chaque échantillon, on détermine la valeur moyenne et on l'additionne à celle des échantillons précédents, après soustraction de la moyenne théorique de la fabrication ; les mesures concernent donc des variables centrées. Les résultats sont placés sur un graphique chronologique sans droites limites d'aucune sorte ; les limites de contrôle sont tracées sur un papier transparent ou formant un masque en V, s'appliquent sur le graphique après chaque observation, et dont l'origine est au dernier point dessiné, et on vérifie si quelque point antérieur sort des limites [4]. A côté de l'évidente facilité de calcul des sommes cumulées des moyennes par rapport à la variable centrée, cette méthode a l'inconvénient de nécessiter un masque ou épure en forme de V pour contrôler les dérangements de la machine.

3/ *Graphiques de contrôle cumulatifs à droites parallèles*. Si au lieu de soustraire la moyenne théorique des valeurs observées pour avoir la variable centrée, on soustrait une autre valeur, convenablement choisie, m_0, que nous appellerons *valeur de référence*, les droites limites ne sont plus divergentes, mais parallèles ; elles peuvent donc être tracées directement sur le graphique, comme dans les méthodes classiques, et n'ont plus besoin d'être rapportées sur un autre papier auxiliaire. Ce système est, évidemment, le seul pratique au sein de l'industrie. Nous nous limiterons à exposer celui-ci, à l'exclusion des autres.

3.1 - Bases théoriques des graphiques de sommes cumulées

La théorie des graphiques de contrôle des sommes cumulées, aussi bien à droites parallèles qu'à droites divergentes, est celle qui a été développée il y a vingt ans par Wald et son équipe de l'Université de Columbia sous le nom de "Sequential Analysis". Il suffit donc, de se reporter aux textes qui traitent ce thème [5] pour connaître les bases fondamentales de ces graphiques.

Rappelons seulement qu'une des modalités d'application de cette théorie au contrôle à la réception concerne le cas où le caractère vérifié est quantitatif. Dans ce cas on place des points représentatifs des observations sur un graphique dont les ordonnées sont précisément les sommes cumulées de la variable contrôlée ; sur le graphique, on a tracé préalablement deux droites ascendantes parallèles et, lorsque la ligne brisée représentative des observations coupe la droite supérieure, on prend une certaine décision, tandis que, si elle coupe la droite inférieure, on prend la décision contraire.

Les équations des droites limites sont (figure 6) :

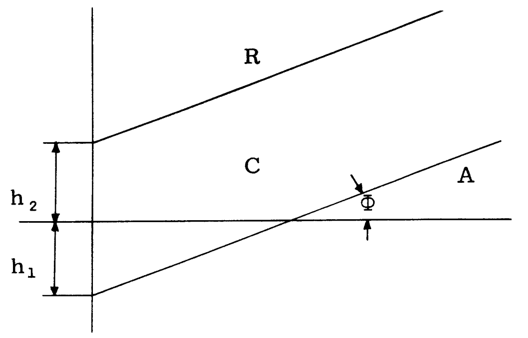

Fig. 6

$$\sum x = h_2 + s\, n$$

$$\sum x = -h_1 + s\, n$$

les paramètres h_1, h_2 et s se calculent ainsi :

$$h_1 = \frac{\sigma^2 \operatorname{Log} \frac{1-\alpha}{\beta}}{m_R - m_A} \qquad h_2 = \frac{\sigma^2 \operatorname{Log} \frac{1-\beta}{\alpha}}{m_R - m_A}$$

$$s = \frac{m_A + m_R}{2}$$

Les modifications qu'il convient de faire pour employer cette méthode dans le cas du contrôle en cours de fabrication sont infimes. La plus importante est la substitution d'une valeur unique par la moyenne de l'échantillon. Une autre modification consiste à effectuer un changement de variables ; ainsi les droites ascendantes se transforment en droites horizontales de façon que les graphiques de contrôle de sommes cumulées se présentent comme un graphique de contrôle classique. La seule différence consiste en ce que les points inscrits sur le graphique ne représentent pas les valeurs moyennes individuelles de chaque échantillon mais leur somme cumulée.

Pour le calcul des droites limites de ce graphique, nous partons des conditions statistiques du plan d'échantillonnage, caractérisées par les longueurs moyennes des rafales (ou par les risques d'erreur) concernant la qualité de fabrication acceptable (AQL) et refusable (RQL) et de l'écart-type de la fabrication (ou des moyennes des échantillons).

Soient m_A et m_R les valeurs moyennes de la fabrication lorsqu'elle se trouve avoir des qualités acceptables et refusables, respectivement, et σ_m l'écart-type des moyennes des échantillons. (Dans le cas d'échantillons individuels, σ_m coïncidera avec l'écart-type de la fabrication). Appelons L_A et L_R les longueurs moyennes des rafales pour les mêmes qualités ; d'après les formules précédentes, on a :

$$\alpha = \frac{1}{L_A} \qquad \beta = 1 - \frac{1}{L_R}$$

L'application de la théorie de tests séquentiels permet de calculer l'ordonnée de départ h_2 des droites limites supérieures :

$$h = h_2 = \frac{\sigma_m^2}{m_R - m_A} \text{ Log } \frac{1-\beta}{\alpha} = \frac{\sigma_m^2}{m_R - m_A} \text{ Log } \frac{L_A}{L_R}$$

Il est à conseiller de prendre, pour α, les deux valeurs $\alpha_c = 0,001$ et $\alpha_s = 0,010$, respectivement, pour ces limites de contrôle et de surveillance avec une valeur unique pour β (0,50 ou 0,667, à volonté).

Pour l'application directe, il conviendra d'avoir cette formule en fonction de l'écart-type, de l'intervalle entre les qualités acceptable et refusable et de la taille n des échantillons (à déterminer comme on verra plus loin). Etant donné que $\sigma_m^2 = \sigma^2/n$, si nous posons $a = \text{Log } (L_A/L_R)$, on aura :

$$h = a \frac{\sigma^2}{n(m_R - m_A)}$$

Les valeurs de a_c et a_s pour les limites de contrôle et de surveillance respectivement se trouvent résumées dans la table ci-dessous :

β	L_R	a_c	a_s
0,50	2	6,215	3,912
0,667	3	5,808	3,506

Il ne faut pas confondre, évidemment, les valeurs moyennes m_A et m_R avec les limites de tolérances d'usinage. Si l'on considère, par exemple, la limite supérieure T_2 (figure 7), elle doit être située à une distance $t_\delta \sigma$ de m_{Rs} puisque si T_2 et m_{Rs} coïncidaient, la moitié de la production serait défectueuse. On calculera m_R à partir de la limite de tolérance spécifiée et du pourcentage δ_R de déchets que nous voulons *ne pas* fabriquer, tandis que la même limite et le pourcentage δ_A de déchets admissible permettent de déterminer m_A.

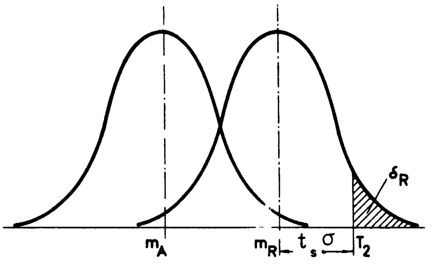

Fig. 7

S'il y a deux limites de tolérance, T_1 et T_2, inférieure et supérieure, la qualité refusable sera caractérisée par deux valeurs m_{Ri} et m_{Rs}, mais il peut y avoir une ou deux valeurs m_A. Rien ne s'oppose, en effet, à ce qu'une valeur centrale entre m_{Ri} et m_{Rs} soit choisie comme m_A (AQL), sans tenir compte du pourcentage δ_A de déchets que déterminent les limites de tolérance T_1 et T_2, mais en choisissant convenablement le risque α ou bien la longueur moyenne de rafale L_A correspondante à la valeur moyenne centrale. Les formules antérieures sont encore applicables a condition d'affecter $\underline{h}$ du signe relatif à la différence $m_R - m_A$.

Il est à remarquer la signification différente des limites de surveillance des graphiques de sommes cumulées par rapport aux graphiques classiques. Les résultats que l'on inscrit dans le nouveau graphique ne sont pas indépendants et il n'est pas possible de considérer comme probabilité globale le produit des probabilités de deux points successifs du graphique ; le dernier point tracé contient toute l'information du processus et les fluctuations du hasard ont peu d'influence sur lui parce qu'il est le résumé de plusieurs résultats. L'action déclanchée par un point situé en dehors de la limite de surveillance n'est pas le même, par conséquent, que dans le contrôle classique ; ici il faudra continuer le prélèvement d'échantillons jusqu'à ce que le point sorte des limites de contrôle (on réglera la machine) ou qu'il retourne en dessous des limites de surveillance (on reprendra le rythme normal du contrôle).

3.2 - Conditions pratiques de leur emploi

La condition d'horizontalité des droites limites sera remplie si leur coefficient àngulaire est nul, c'est-à-dire si :

$$s = \frac{m'_R + m'_A}{2} = 0$$

Il suffit donc que l'on prenne comme valeur de référence m_o la moyenne entre m_A et m_R, soit :

$$m_o = \frac{m_A + m_R}{2}$$

On aura, évidemment,

$$m'_A = m_A - m_o = \frac{m_A - m_R}{2}$$

$$m'_R = m_R - m_o = \frac{m_R - m_A}{2}$$

et :

$$m'_A = - m'_R \qquad \text{d'où } s = 0.$$

On placera donc les points représentatifs des sommes cumulées des moyennes, après avoir soustrait de ces moyennes la valeur de référence m_o, calculée comme il vient d'être indiqué.

Il reste à déterminer la taille de l'échantillon d'après les conditions d'efficacité voulues. Pour cela, on se basera sur une autre des caractéristiques des plans séquentiels, la courbe ASN ou nombre moyen de prélèvements en fonction de la qualité du lot ; il ne faut pas condondre, cependant, ce chiffre avec la longueur moyenne de la rafale ARL. Voyons en quoi consiste, concrètement, leur différence.

Supposons une série de lots avec la même proportion de déchets, correspondant à une qualité RQL, soumis à des échantillonnages séquentiels de caractéristiques bien définies, parmi lesquelles, β et $\overline{n_{m_R}}$ (nombre moyen de prélèvements pour des lots de qualité RQL). En moyenne, une proportion β des lots sera acceptée et une proportion $1 - \beta$ sera refusée ; d'autre part, les lots demanderont en moyenne l'inspection de $\overline{n_{m_R}}$ pièces jusqu'à prendre une des deux décisions possibles. Autrement dit, chaque échantillon sera en moyenne de $\overline{m_{m_R}}$ pièces, mais jusqu'après le contrôle de $L_R = 1/(1 - \beta)$ échantillons, on ne s'apercevra pas que la qualité du lot est refusable, cela aussi, en moyenne.

Pour que chaque échantillon puisse permettre de prendre la décision qui convient, il est évident que les échantillons doivent être de $\overline{n_{m_R}}$ pièces. Par conséquent, on prendra, d'après les formules employées dans les tests séquentiels

$$n = \overline{n_{m_R}} = 2\ \frac{(1-\beta)\ \text{Log}\ \dfrac{1-\beta}{\alpha} - \beta\ \text{Log}\ \dfrac{1-\alpha}{\beta}}{(m_R - m_A)^2}\ \sigma^2$$

Si nous nous limitons à considérer un nombre réduit de valeurs pour les risques d'erreur α et β (par exemple $\alpha = 0,001$ et $\beta = 0,50$ et $0,667$, ce qui correspond à des ARL de 1 000 et 2 - 3 échantillons) afin d'avoir une formule simple pour déterminer la taille des échantillons, on aura :

Pour $\beta = 0,50$ $\qquad n = 5,52 \left[\dfrac{\sigma}{m_R - m_A}\right]^2$

Pour $\beta = 0,667$ $\qquad n = 3,33 \left[\dfrac{\sigma}{m_R - m_A}\right]^2$

Le graphique de contrôle par sommes cumulées pourra donc être dessiné sur papier quadrillé (droites limites à des distances h_c et h_s de l'origine 0). La graduation sera faite à partir de cette origine, positive au-dessus et négative au-dessous s'il y a deux limites de tolérance spécifiées.

La situation des points représentatifs des échantillons sera déterminée par la valeur des sommes cumulées des moyennes après soustraction de m_o. Lorsqu'il y a deux limites de tolérance, et par conséquent, deux valeurs moyennes de qualité refusable, m_{Rs} et m_{Ri}, on aura aussi deux valeurs de référence, m_{os} et m_{oi}, auxquelles seront comparées les moyennes des échantillons prélevés. Les valeurs moyennes observées comprises dans leur intervalle ne donneront lieu à aucun cumul ; elles servent seulement à diminuer par somme algébrique la valeur cumulée antérieure si elles apparaissent dans une séquence d'échantillons déjà représentés.

La méthode à suivre au moment du prélèvement des premiers échantillons consistera à comparer, simplement, la valeur de la moyenne avec celle (ou celles) de référence. Si elle est située en dehors du domaine d'action (c'est-à-dire dans l'intervalle des valeurs de référence, s'il y a une double limite) on marque, pour mémoire, le point représentatif sur l'axe d'ordonnée 0. Si, au contraire, la valeur moyenne obtenue est supérieure à m_{os} (ou inférieure à m_{oi}), on en soustrait la valeur de référence plus proche et on place la différence sur le graphique : on soustrait la *même* valeur de référence de la moyenne de l'échantillon suivant et la différence s'additionne algébriquement à la valeur précédemment représentée. On continue de la sorte jusqu'à ce que le point représentatif des sommes cumulées passe au delà de la droite limite de contrôle, cas dans lequel on agit comme avec les graphiques classiques, ou qu'il arrive à 0, cas dans lequel on recommence sans tenir compte des résultats antérieurs.

3.3 - Exemple

On désire contrôler par sommes cumulées un processus de filature de coton de numéro 30, avec écart type 0,6, afin de déceler au deuxième échantillon, en moyenne, tout écart d'un numéro (29 ou 31).

Le problème, si l'on voulait y faire intervenir les tolérances de fabrication, serait ainsi posé :

On désire produire du fil de numéro 30 ± 2 et l'on s'impose la condition de régler la machine lorsque 4,75 % de la fabrication est hors tolérance (il est facile de constater que cela correspond à des centrages de la production sur les numéros 29 et 31, compte-tenu de l'écart-type considéré).

Pour une ARL de 2 échantillons (soit β = 0,5) leur taille doit être

$$n = 5,52 \left(\frac{0,6}{1}\right)^2 \simeq 2.$$

Les limites de contrôle et de surveillance seront respectivement :

$$h_c = 6,215 \frac{0,6^2}{2 \times i} = 1,119$$

$$h_s = 3,912 \frac{0,6^2}{2 \times i} = 0,704$$

qui permettront de tracer deux paires de droites parallèles, au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses.

Les valeurs de référence seront :

$$m_{oi} = \frac{30 + 29}{2} = 29,5 \qquad \text{et} \qquad m_{os} = \frac{30 + 31}{2} = 30,5$$

Au début du contrôle, si la moyenne des premiers échantillons est comprise dans l'intervalle de ces valeurs, on ne fait rien, ou bien on marque les points représentatifs sur l'axe de valeur 0, pour mémoire ; lorsque paraît une moyenne hors de l'intervalle, on en retranche la valeur de référence la plus proche et l'on marque sur le graphique le point représentatif du résultat, compte-tenu de son signe. Les moyennes des échantillons prélevés par la suite sont additionnées algébriquement aux précédentes, après soustraction de la même valeur de référence.

Comparons les résultats que l'on obtiendrait avec l'emploi des graphiques de sommes cumulées et ceux des graphiques classiques.

Comme il s'agit d'une fabrication excessivement précise, on calculerait les limites de contrôle suivantes pour le graphique de contrôle des moyennes :

$$M_{cs} \qquad T_2 - 3,09 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) 0,6 = 31,454$$

$$M_{ci} \qquad T_1 + 3,09 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) 0,6 = 28,546$$

Les risques d'erreur et les longueurs moyennes des rafales seraient :

- Pour l'AQL (numéro moyen 30) :

$$t_A = \frac{31,454 - 30}{0,6/\sqrt{2}} = 3,44 \qquad \alpha = 0,0003 \qquad L_A = 3333$$

- Pour le RQL (numéro moyen 31, ou 29) :

$$t_R = \frac{31,454 - 31}{0,6/\sqrt{2}} = 1,07 \qquad \beta = 0,858 \qquad L_R = 7$$

On aurait donc une protection excessive à l'AQL et insuffisante au RQL.

Pour avoir une meilleure comparaison de l'efficacité de chacune des deux méthodes, il conviendrait de considérer la variante primitive de la méthode classique, en fonction seulement de la valeur centrale de la fabrication, c'est-à-dire sans tenir compte des tolérances pour le calcul des droites de contrôle. Dans ce cas, celles-ci seraient :

$$M_c \qquad 30 \pm 3,09 \frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 31,311 \\ 28,689 \end{cases}$$

tandis que les risques d'erreur et les longueurs moyennes des rafales seraient :

- Pour l'AQL (numéro moyen 30) :

$$t_A = \frac{31,311 - 30}{0,6/\sqrt{2}} = 3,09 \qquad \alpha = 0,001 \qquad L_A = 1\,000$$

- Pour le RQL (numéro moyen 31, ou 29) :

$$t_R = \frac{31,311 - 31}{0,6/\sqrt{2}} = 0,732 \qquad \alpha = 0,767 \qquad L_R = 4,3$$

Les conditions d'efficacité sont, dans ce cas, un peu plus voisines à celles des graphiques de sommes cumulées, mais la protection contre la qualité RQL est toujours moindre qu'avec ceux-ci.

Si l'on augmente la taille de l'échantillon à 3 unités, les limites de contrôle deviendront :

$$M_c \qquad 30 \pm 3,09 \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = \begin{cases} 31,070 \\ 28,930 \end{cases}$$

Les risques d'erreur et les longueurs moyennes des rafales vaudront :

- Pour l'AQL (numéro moyen 30) :

$$t_A = \frac{31,07 - 30}{0,6/\sqrt{3}} = 3,09 \qquad \alpha = 0,0001 \qquad L_A = 1\,000$$

- Pour le RQL (numéro moyen 31, ou 29) :

$$t_R = \frac{31,07 - 31}{0,6/\sqrt{3}} = 0,21 \qquad \beta = 0,503 \qquad L_R = 2,4$$

Les conditions d'efficacité de ce plan d'inspection sont très semblables à celles du graphique par sommes cumulées, mais pas meilleures malgré la taille plus grande de l'échantillon.

Le tracé des courbes caractéristiques et celui des longueurs moyennes des rafales (figures 8 et 9) permet de completer la comparaison. Dans l'intervalle compris entre les qualités AQL et RQL, la méthode

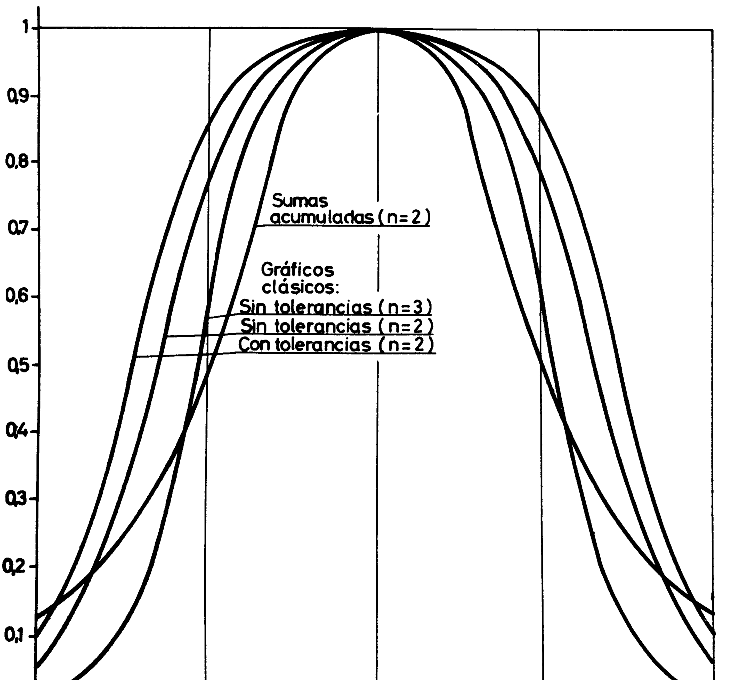

Fig. 8 - Comparaison de la courbe caractéristique du graphique de contrôle par sommes cumulées avec celles des graphiques classiques (Exemple 1).

Sumas acumuladas	=	Sommes cumulées
Sin tolerancias	=	Sans tolérances
Graficos clasicos	=	Graphiques classiques
Con tolérances	=	Avec tolérances

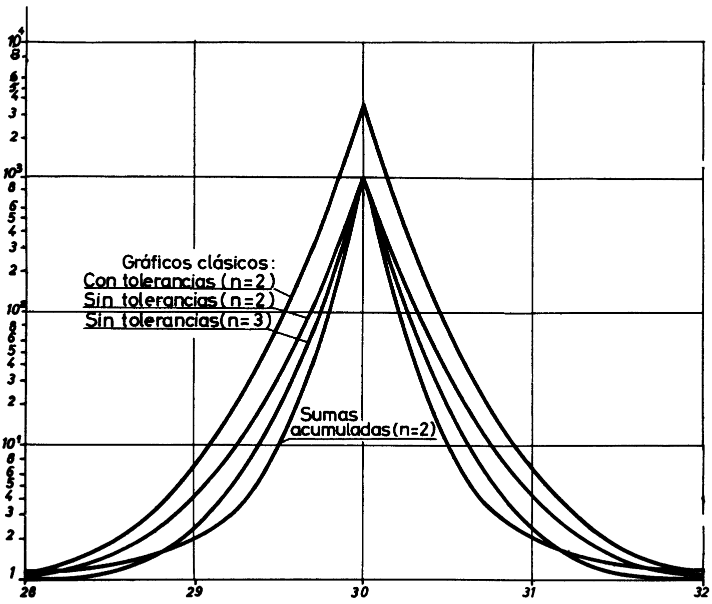

Fig. 9 - Comparaison de la courbe ARL du graphique de contrôle par sommes cumulées avec celles des graphiques classiques (Exemple 1).

des sommes cumulées décèle plus tôt les dérèglements que les graphiques classiques de la même taille d'échantillon et elle est pratiquement équivalente à la méthode classique avec des échantillons de taille légèrement supérieure. Au delà du RQL, le système du contrôle cumulatif est moins efficace mais ce désavantage est, en réalité, moins important qu'il ne paraît à première vue ; il suffit, pour s'en rendre compte, de prendre la longueur moyenne des rafales comme critère d'efficacité à la place des risques d'erreur. Il est évident, en effet, que dans le pire des cas, pour un décentrage de deux numéros (32 ou 28), on a une ARL de 1,4 contre 1-1,2 avec les méthodes classiques, différence pratiquement négligeables.

IV - EXTENSION DES GRAPHIQUES DE SOMMES CUMULEES AU CONTROLE QUALITATIF

Jusqu'à présent, nous avons considéré le cas d'une variable continue distribuée selon une loi de probabilité normale. Parfois cependant, l'information que l'on obtient est exprimée sous la forme de nombres entiers (nombre de déchets dans l'échantillon, nombre de défauts détectés par unité de longueur ou de temps, etc.) lesquels ne se distribuent pas, évidemment, suivant une telle loi.

Il est encore possible dans ces cas de recourir aux graphiques de contrôle par sommes cumulées et de profiter de leur efficacité plus grande par rapport aux graphiques classiques.

Les bases de leur réalisation sont encore celles de l'"Analyse séquentielle" ou échantillonnage progressif de Wald. Il est bien connu que les calculs conduisant au tracé des deux droites qui délimitent les décisions à prendre dans l'échantillonnage séquentiel à la réception sont différents selon que la loi de distribution de la population d'origine puisse être assimilée à la loi binomiale (Bernoulli) ou à celle de Poisson. La première est appropriée au contrôle de pièces défectueuses trouvées dans des échantillons d'une taille donnée ; la seconde convient pour le contrôle des défauts qui se manifestent dans une unité quelconque (de longueur, de temps, de poids, etc.).

Il sera bon de transformer aussi les droites inclinées ascendantes habituelles dans les graphiques utilisés pour ce contrôle en droites horizontales d'emploi plus aisé. Cela ne présente aucune difficulté, mais toutefois, dans ces cas, un tel résultat n'est point obtenu par un changement de variable mais par une diminution de la valeur de la pente à chaque terme que l'on additionne.

De même que dans le cas du contrôle des moyennes, il est nécessaire d'effectuer une autre modification qui consiste en ce que les échantillons ne doivent pas être d'une seule pièce. L'échantillonnage progressif devient donc, en réalité, un échantillonnage en grappes. Selon le critère déjà exposé, on prendra comme taille des échantillons le nombre moyen des prélèvements concernant les lots de qualité RQL.

4.1 - Graphique de sommes cumulées pour nombre de déchets

Dans ce cas, on utilisera les formules de l'échantillonnage progressif par attribut, lesquelles sont, d'ailleurs, les plus connues et celles que l'on trouve dans tous les ouvrages de statistique appliquée au contrôle industriel [6].

$$h = h_2 = \frac{\log [(1 - \beta)/\alpha]}{\log (\omega_R/\omega_A) + \log [(1 - \omega_A)/(1 - \omega_R)]}$$

$$s = \frac{\log [(1 - \omega_A)/(1 - \omega_R)]}{\log (\omega_R/\omega_A) + \log [(1 - \omega_A)/(1 - \omega_R)]}$$

$$\overline{n_{\omega_R}} = \frac{(1 - \beta)h_2 - \beta h_1}{\omega_R - s}$$

Il faut, en plus, calculer, pour l'utiliser seulement dans cette dernière formule :

$$h_1 = \frac{\log [(1 - \alpha)/\beta]}{\log (\omega_R/\omega_A) + \log [(1 - \omega_A)/(1 - \omega_R)]}$$

Ainsi donc, après détermination de la taille des échantillons qui formeront les grappes, en posant :

$$n = \overline{n_{\omega_R}}$$

on tracera une droite horizontale à la distance h de l'axe des abscisses. Le point représentatif de chaque prélèvement sera situé sur une ordonnée obtenue par somme algébrique cumulée des valeurs successives :

$$n_d - ns$$

où n_d est le nombre de déchets trouvés dans le dernier échantillon de n pièces prélevé.

Remarquons que les valeurs négatives éventuellement obtenues après calcul d'une somme cumulée quelconque n'ont pas de signification du point de vue d'une action pour le réglage du processus ; par conséquent, il n'est jamais nécessaire de descendre au-dessous de la droite d'ordonnée 0. Le marquage des points significatifs sur le graphique sera donc commencé seulement lorsque $n_d > ns$; en attendant, il conviendra de placer, pour mémoire, les points représentatifs des échantillons sur l'axe des abscisses (ordonnée 0).

On aura, dans ce cas, une simplification notable du graphique si l'on prend pour celui-ci une échelle telle que l'unité corresponde à un nombre de divisions (millimètres si l'on a pris du papier millimétré) égal à $1/s$. Soit alors m le nombre entier le plus proche à $1/s$; si l'on trace le graphique sur papier millimétré, on peut prendre un millimètre négatif chaque fois qu'une pièce bonne est sortie et $m-1$ millimètres positifs pour chaque pièce défectueuse. Les droites limites seront situées à des distances de l'axe des abscisses égales a :

- Droite de surveillance $H_s = m h_s$
- Droite de contrôle $H_c = m h_c$

Etant donné que la valeur de s est très petite, le fait d'arrondir son réciproque m jusqu'au nombre entier le plus voisin ne sera pas, en général, un défaut inadmissible de précision.

4.2 - Graphique de sommes cumulées pour nombre de défauts par unité

Il est évident qu'ici le nombre de défauts pouvant apparaître dans l'échantillon n'a pas de limite théorique, contrairement au cas précédent, auquel le nombre de pièces défectueuses ne peut jamais surpasser la taille de l'échantillon. Par conséquent, le modèle probabiliste le plus adéquat ne sera pas binomial, mais poissonnien.

Les formules à appliquer du modèle poissonnien dans l'échantillonnage séquentiel sont moins répandues que celles du modèle binomial. Si nous appelons d_A et d_R les nombres de défauts par unité concernant les qualités AQL et RQL, respectivement, on a :

$$h = h_2 = \frac{\log\left[(1-\beta)/\alpha\right]}{\log(d_R/d_A)}$$

$$s = \frac{d_R - d_A}{\mathrm{Log}\,(d_R/d_A)} \qquad \text{et} \qquad \overline{n}_{d_R} = \frac{(1-\beta)\,h_2 - \beta h_1}{d_R - s}$$

$$h_1 = \frac{\log\left[(1-\alpha)/\beta\right]}{\log(d_R/d_A)}$$

Le *modus operandi* est semblable au précédent avec la seule différence que s n'est pas très petit ; puisque il doit être compris entre d_A et d_R, deux valeurs entières plus ou moins grandes. Une fois calculée h_2, h_1 et s, on déterminera la taille des échantillons en prenant comme taille $\overline{n}_{d_R}$. Ensuite, on trace la droite limite horizontale à une distance h de l'axe des abscisses.

Les points représentatifs des échantillons sont obtenues par addition des valeurs :

$$d - ns$$

où d est le nombre de défauts constatés dans l'échantillon de taille n. Pareillement au cas antérieurs, il n'est pas nécessaire de commencer la mise en place des points sur le graphique tant que $d < ns$; en attendant, il suffit de placer des points sur l'axe même des abscisses, pour mémoire.

4.2.1 - Exemple

Dans un processus de manutention de fil de rayonne, on considère que la qualité est acceptable s'il se produit 2 ruptures ou moins au Kg.; lorsqu'on observe 4 ruptures ou plus par Kg., on pense que la qualité n'est plus acceptable.

Pour faire l'étude de façon à avoir un temps suivi de contrôle minimal, nous partirons de temps élementaires courts, par exemple, 6 minutes. En tenant compte du nombre des broches en fonctionnement et de la quantité du fil produit par heure, on calculera le nombre de ruptures correspondant à ces temps élémentaires. Supposons que dans un cas concret ce calcul donne, lorsque le fil est bon, 2 ruptures ou moins par intervalle de 6 minutes et, lorsqu'il est plus fragile, 4 ruptures par 6 minutes. Dans le premier cas, nous désirons avoir des rafales de 1 000 échantillons sans interruption, tandis que dans le deuxième cas, nous désirons détecter l'anormalité avec seulement 2 échantillons en moyenne. Par conséquent nous aurons :

$$L_A = 1\,000 \qquad \alpha = 0{,}001 \qquad d_A = 2$$

$$L_R = 2 \qquad \beta = 0{,}5 \qquad d_R = 4$$

Avec ces données, nous calculerons

$$h_2 = \frac{\log (0{,}5/0{,}001)}{\log (4/2)} = 8{,}95$$

$$h_1 = \frac{\log (0{,}999/0{,}5)}{\log (4/2)} = 1$$

$$s = \frac{4 - 2}{\operatorname{Log} (4/2)} = 2{,}89$$

$$\bar{n}_{d_R} = \frac{0{,}5 \times 8{,}95 - 0{,}5 \times 1}{4 - 2{,}89} = 3{,}58$$

Ce dernier résultat indique que pour avoir information suffisante permettant de prendre, en moyenne, une décision adéquate à chaque examen (avec un risque d'erreur $\beta = 0{,}5$) si le matériel est mauvais, il conviendra que l'intervalle d'observation soit de $3{,}58 \times 6 = 21{,}5 \simeq 20$ minutes. Périodiquement donc, pendant 20 minutes consécutives, on comptera les ruptures produites ; de ce nombre, il sera soustrait la quantité $(20/6) \times 2{,}89 = 9{,}6$. Les résultats seront cumulés jusqu'à ce que la somme surpasse la droite horizontale tracée à une hauteur $h_c = 8{,}95$.

La droite de surveillance avec laquelle le risque d'erreur α est de 0,01 serait située à :

$$h_s = \frac{\log (0{,}5/0{,}01)}{\log (4/2)} = 5{,}62$$

Lorsque la somme cumulée dépasse cette valeur, ou plutôt lorsque les points représentatifs des sommes successives arrivent à la droite tracée à cette distance de l'axe des abscisses, on comptera les ruptures produites pendant des intervalles de 20 minutes, jusqu'à ce que l'application des normes indiquées auparavant conduise le point représentatif de la totalité des observations, soit à la droite limite de contrôle, soit au-dessous de la limite de surveillance.

V - LE CONTROLE DANS LA PRODUCTION CONTINUE DIFFERENCIEE

Le premier travail d'exposition et justification de cette méthode est apparu en 1943 sous la signature de H.F. Dodge [8], lequel l'a développée après, aidé par ses collaborateurs. Sous sa forme la plus simple, elle consiste en un échantillonnage inversé, c'est-à-dire que l'on contrôle les pièces selon un certain ordre jusqu'à trouver une pièce défectueuse ou jusqu'à admettre que la qualité de la fabrication est, pour l'instant, bonne, au lieu de déterminer le nombre de déchets de l'échantillon prélevé d'une taille donnée.

La méthode proposée par Dodge consiste en l'observation des pièces qui sortent de la machine au moyen d'un contrôle à 100 pour 100 jusqu'à trouver i pièces bonnes consécutives. Alors, le contrôle à 100% peut être remplacé par un échantillonnage, à condition que l'économie ainsi obtenue compense le risque d'erreur lié à tout contrôle par échantillon. A partir de ce moment, le contrôle sera limité à une fraction f des pièces produites ; si pendant le contrôle partiel apparaissait une pièce défectueuse, on reviendrait au contrôle à 100 % et on continuerait avec le contrôle sur échantillon aussi longtemps qu'il ne sortirait aucun déchet.

5.1 - Théorie de la méthode

Soit une production continue de pièces caractérisée par un pourcentage ω de défectueux. La probabilité d'une rafale d'i pièces bonnes, sans tenir compte de la qualité de celle qui suit, i + 1, est :

$$Pr(m \geqslant i) = (1 - \omega)^{i}$$

où m est le nombre de pièces bonnes consécutives trouvées.

Supposons que ce plan de contrôle fonctionne depuis un certain temps; si nous appelons F la fraction totale effectivement vérifiée, u le nombre moyen des pièces contrôlées pendant les périodes de contrôle à 100 % et v le nombre moyen des pièces des périodes de contrôle partiel, nous aurons :

$$F = \frac{u + vf}{u + v} = \frac{u/v + f}{u/v + 1} ,$$

la fraction totale de pièces non contrôlées étant :

$$1 - F = \frac{1 - f}{u/v + 1}$$

Le rapport u/v découle facilement de u/fv, c'est-à-dire du rapport entre le nombre moyen de pièces contrôlées à 100 % et le nombre moyen de pièces vérifiées effectivement pendant le contrôle partiel ; ce rapport

6

est le même que celui des probabilités d'une rafale inférieure à i pièces et d'une rafale d'au moins i pièces acceptables :

$$\frac{u}{fv} = \frac{pr(m < i)}{pr(m \geqslant i)} = \frac{1 - (1 - \omega)^i}{(1 - \omega)^i}$$

d'où :

$$\frac{u}{v} = \frac{1 - (1 - \omega)^i}{(1 - \omega)^i} f$$

et finalement,

$$F = \frac{f}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i}$$

et :

$$1 - F = \frac{(1 - f)(1 - \omega)^i}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i}$$

Il est d'ailleurs évident que le nombre moyen de pièces défectueuses, A, ayant pu passer à travers du contrôle est :

$$A = (1 - F)\,\omega = \frac{(1 - f)(1 - \omega)^i}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i}\,\omega$$

Cette proportion A de déchets existants après le contrôle est l'AQL : elle est fonction de ω et son maximum A_o, qui s'obtient en faisant :

$$\frac{dA}{d\omega} = 0$$

est l'AQL du contrôle réalisé.

Si l'on désigne par ω_o la valeur de ω liée au pourcentage défectueux maximal A_o, on obtient par des transformations algébriques simples les formules ci-dessous permettant de calculer les principales caractéristiques du plan de contrôle en fonction des besoins de la qualité de la fabrication :

$$A_o = \frac{\omega_o (i + 1) - 1}{i}$$

$$\omega_o = \frac{1 + iA_o}{1 + i}$$

$$f = \frac{(1 - \omega_o)^{i+1}}{(1 - \omega_o)^{i+1} + iA_o}$$

$$F_o = \frac{1 - A_o}{1 + iA_o}$$

La dernière équation donne la valeur de la fraction de pièces contrôlées lorsque le pourcentage de déchets dans la fabrication est ω_o, c'est-à-dire lorsque, après le contrôle, il y a en moyenne le maximum de pièces défectueuses.

Dodge a tracé des courbes qui donnent la fraction des pièces non contrôlées (1 - F) pour différentes valeurs d'i et f, en fonction du pourcentage de défectueux produit. Ces courbes sont toujours descendantes lorsque le nombre de déchets dans la fabrication augmente et elles descendent d'autant plus doucement que les valeurs de i et de f sont plus petites et plus grand l'AQL admis [9]. Ces courbes permettent de voir que l'influence de la valeur de i est plus importante que celle de la fraction f de pièces contrôlées pendant les périodes de contrôle partiel. D'autres courbes, construites et publiées aussi par Dodge [10] et reproduites dans la figure 10, permettent de déterminer graphiquement les valeurs de i et de f en fonction de A_0 ou AQL, pourcentage maximal de pièces défectueuses que l'on désire garantir aux clients. Cette condition ne paraît pas suffisante pour le meilleur choix des caractéristiques du plan de contrôle ; pour cela, il est préférable de fixer la fraction F des pièces effectivement contrôlée puisque ce chiffre détermine en réalité le coût du plan du contrôle. L'idée initiale de la méthode que nous exposerons provient d'un article de R.B. Murphy [11], mais le développement qui suit et qui permet des applications pratiques est très différent.

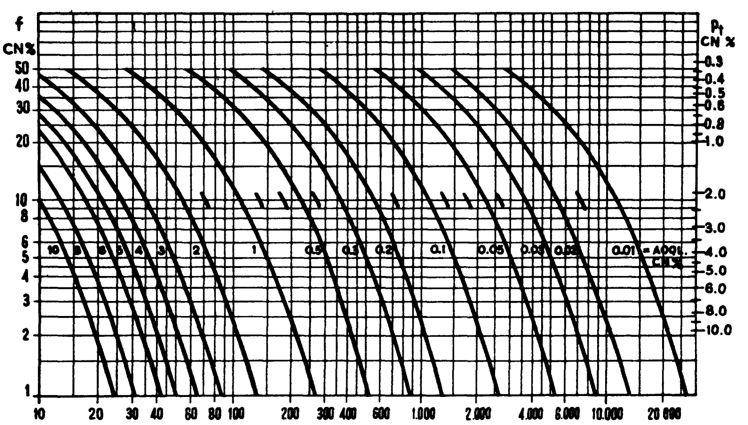

Fig. 10 - Courbes pour déterminer le nombre i et la fraction f en fonction de l'AOQL désiré p_t est la valeur du pourcentage défectueux dans une production continue de 1000 unités où, avec un échantillonnage de f%, la probabilité d'acceptation est 0,10 (Dodge).

5.2 - Détermination des valeurs caractéristiques du plan

Supposons fixées les valeurs i et f ; la division de F et 1 - F donne, après une légère transformation :

$$\frac{f}{1-f} = \frac{F(\omega)}{1-F(\omega)} (1-\omega)^i$$

Etant donné que le premier membre a une valeur bien définie, la fraction F est vraiment une fonction de ω, ce qui est souligné par l'expression $F(\omega)$. Nous pouvons donc établir l'identité de deux expressions du second membre pour des valeurs différentes de ω, celle qui correspond au pourcentage défectueux Ω propre de la fabrication courante et celle de ω qui correspond aux conditions d'obtention de l'AOQL. Cela donne :

$$\frac{F(\Omega)}{1 - F(\Omega)} (1 - \Omega)^i = \frac{F(\omega_o)}{1 - F(\omega_o)} (1 - \omega_o)^i = \frac{i - A_o}{(i+1)A_o} \left(\frac{i(1 - A_o)}{i + 1}\right)^i$$

et, après de faciles transformations :

$$\frac{(i - A_o)\ (1 - F(\Omega))}{A_o\, F(\Omega)} \left(\frac{i - A_o}{i - \Omega}\right)^i = \frac{(i + 1)^{i+1}}{i^i}$$

Prenant les logarithmes, on a :

$$\log \frac{(1 - A_o)\ \ (1 - F(\Omega))}{A_o\, F(\Omega)} - i.\log \frac{1 - \Omega}{1 - A_o} = (i+1)\log(i+1) - i.\log i$$

Le second membre est une fonction logarithmique de i que nous pouvons désigner Φ (i), indépendante de toute autre variable ; elle peut se représenter sur un graphique valable pour tous les calculs, quel que soit le plan de contrôle étudié. Pour avoir une meilleure précision, on tracera plusieurs courbes à échelles différentes de la même fonction Φ(i) (figure 11). De son côté, le premier membre de l'équation antérieure est une fonction linéaire en i ; après calcul des logarithmes indiqués, sa droite se place facilement sur le graphique au moyen d'une règle ou d'une droite tracée sur papier transparent. L'intersection de la droite et la courbe Φ (i) donnera la valeur de i à l'échelle qui convient.

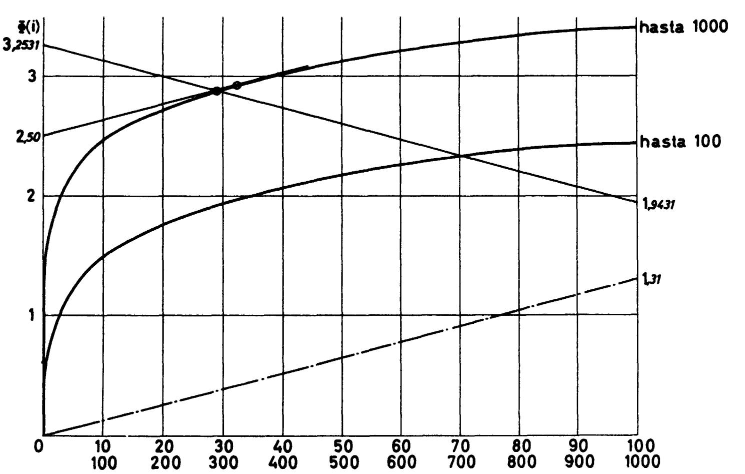

Fig. 11 - Courbes pour déterminer le nombre i en fonction de la fraction F que l'on désire vérifier et des pourcentages défectueux dans la fabrication et après inspection.

hasta = jusqu'à

La valeur de f sera calculée au moyen de la formule suivante, en fonction du pourcentage courant de défectueux Ω et de la fraction contrôlée correspondante :

$$f = \frac{F(\Omega)\ \ (1 - \Omega)^i}{1 - F(\Omega)\ \ [1 - (1 - \Omega)^i]}$$

Lorsque la qualité que l'on veut garantir est moins bonne que celle de la fabrication ($\Omega < A_0$), la droite est descendante et la solution du problème est trouvée sans difficulté. Par contre, si nous désirons faire servir le contrôle pour améliorer la qualité sortante, le rapport $(1 - \Omega)/(1 - A_0)$ est plus petit que l'unité, son logarithme est négatif et la droite est ascendante. Dans les conditions considérées, C'est-à-dire pour certaines valeurs de $F(\Omega)$, il se peut que le problème n'ait pas de solution. Le graphique de la figure 11 sera encore utile pour déterminer les conditions optimales de contrôle parmi celles qui sont possibles, c'est-à-dire celui qui donnera une valeur minimale à $F(\Omega)$. On obtient cette solution au moyen de la tangente à la courbe Φ (i) ayant la pente donnée par l'expression :

$$- i \log \frac{1 - \Omega}{1 - A_0} = i \log \frac{1 - A_0}{1 - \Omega}$$

soit graphiquement (résultat très imprécis), soit analytiquement. La valeur lue sur le point de l'axe des abscisses coupé par la tangente, soit log B, permettra le calcul de $F(\Omega)$ après le passage aux antilogarithmes :

$$F(\Omega) = \frac{1 - A_0}{1 + A_0 (B - 1)}$$

Cette valeur est la valeur minimale que peut prendre la fraction $F(\Omega)$ pour des valeurs données de A_0 et Ω ; le nombre d'unités i à contrôler dans une séquence ininterrompue de pièces bonnes est défini par l'abscisse du point de tangence de la droite avec la courbe Φ (i). Cependant ce tracé ne permettrait pas de déterminer i avec précision, à cause de la faible courbure de Φ (i) au voisinage du point de tangence. La solution analytique est, d'ailleurs, très simple ; il suffit d'écrire l'égalité des dérivées relatives à la courbe Φ(i) et de la droite tangente. La dérivée de la fonction est :

$$\frac{d\ \Phi\ (i)}{di} = \frac{1}{\text{Log } 10} \cdot \frac{i + 1}{i + 1} + \log (i + 1) - \frac{1}{\text{Log } 10} \cdot \frac{i}{i} - \log i = \log \frac{i + 1}{i}$$

et celle de la droite, par rapport à i est :

$$\log \frac{1 - A_0}{1 - \Omega}$$

Par conséquent, on aura :

$$\frac{i + 1}{1} = \frac{1 - A_0}{1 - \Omega}$$

Le résultat final est donc simplement :

$$i = \frac{1 - \Omega}{\Omega - A_0}$$

Toute autre droite parallèle à celle-ci coupant la courbe Φ (i) donnera deux solutions pour i avec une valeur unique pour F, mais cette fraction serait plus grande que celle déterminée par la droite tangente et, par conséquent, les plans de contrôle ainsi définis, seraient moins recommandables parce que moins économiques.

5.2.1 - Exemples d'application

1/ Une fabrication donne en moyenne 2 ‰ de pièces défectueuses et on désire garantir aux clients une qualité sortante moyenne de 5 ‰, en contrôlant seulement un dixième de la production lorsque la qualité de la fabrication est celle indiquée (Ω = 0,002).

Nous calculerons successivement :

$$B = \frac{0,995 \times 0,90}{0,005 \times 0,10} = 1791$$

$$\log B = 3,25310$$

$$\log \frac{1 - \Omega}{1 - A_o} = \log 0,998 - \log 0,995 = 0,00131$$

et tracerons la droite qui passe par les points :

$$i = 0 \qquad \Phi(i) = 3,2531$$

$$i = 1\,000 \qquad \Phi(i) = 3,2531 - 1\,000 \times 0,00131 = 1,9431$$

Cette droite coupe la courbe tracée en un point d'abscisse i = 290 (figure 11) ; la fraction des pièces produites qu'il faudra contrôler après une séquence de 290 unités bonnes consécutives est :

$$f = \frac{0,10 \times 0,998^{290}}{1 - 0,10(1 - 0,998^{290})} = \frac{0,10 \times 0,559}{1 - 0,10 \times 0,441} = 0,06$$

soit 6 %. Pratiquement, après une séquence de 290 unités bonnes on réduira le contrôle à une pièce pour chaque 16 pièces fabriquées, revenant au contrôle à 100 % si l'on trouve une pièce défectueuse.

2/ Considérons le cas contraire, c'est-à-dire celui où la proportion de déchets dans des conditions de fabrication courantes, soit 5 ‰ et où nous désirons garantir une qualité sortante moyenne de 2 ‰.

Nous calculons :

$$\log \frac{1 - A_o}{1 - \Omega} = \log 0,998 - \log 0,995 = 0,00131$$

et traçons la tangente à la 2ème courbe de la figure 11, parallèle à la droite définie par les points :

$$i = 0 \qquad \Phi(i) = 0$$

$$i = 1\,000 \qquad \Phi(i) = 1\,000 \times 0,00131 = 1,31$$

Le point de tangence de la droite à tracer avec la courbe Φ (i) se trouve sur celle-ci à l'abscisse :

$$i = \frac{i - \Omega}{\Omega - A_o} = \frac{0,995}{0,003} = 332$$

Dans ce cas, le plan de contrôle consistera en une vérification à 100 % jusqu'à ce que l'on trouve 332 unités consécutives bonnes, passant alors au contrôle d'une pièce pour 4 pièces produites, et ceci tant qu'il ne paraîtra aucun déchet.

5.3 - Application au contrôle en cours de fabrication

Pour utiliser cette méthode au contrôle en cours de fabrication des productions continues, il faut lui appliquer certaines modifications. Il est essentiel, alors, qu'on puisse intervenir et agir rapidement si la qualité baisse significativement, sans être tenté de le faire, par contre, lorsque la qualité se maintient. Dans ce cas, on définit des règles d'intervention (stopping rules), équivalentes aux lignes de contrôle des graphiques de contrôle classiques, à base de séquences ou rafales de contrôle à 100 % *(screening sequences)*, c'est-à-dire de succession ininterrompue de pièces contrôlées à 100 %. A la fin de chacune, une décision est prise, soit de régler la machine, soit de restreindre la rigueur du contrôle et passer à un contrôle partiel. Murphy [11] caractérise les différentes règles d'intervention qui ont été proposées au moyen d'un ou deux chiffres indiquant la taille des séquences de contrôle total et le nombre de pièces défectueuses qui, si elles étaient trouvées dans une telle séquence déclancheraient le réglage de la machine : une *règle* (i, r) signifie que les séquences de contrôle total sont de i pièces et qu'il faut procéder au réglage de la machine aussitôt que dans une séquence sont trouvés r déchets.

Les règles exposées et étudiées par Murphy sont celles-ci :

Règle ($n^* - i$) : Intervention aussitôt qu'une pièce défectueuse est trouvée après avoir contrôlé $n^* - i$ pièces dans une séquence quelconque d'inspection totale.

Règle (r) : Intervention aussitôt que r pièces défectueuses sont trouvées dans une séquence quelconque de contrôle total.

Règle (N, R) : Intervention aussitôt que R pièces défectueuses sont trouvées dans un bloc quelconque de N pièces contrôlées (sans superposition des blocs).

Règle (n^*) : Intervention aussitôt que n^* pièces ont été contrôlées dans une séquence quelconque de contrôle à 100 % sans l'avoir terminée.

L'article cité compare ces différentes règles d'intervention et donne les procédés de calcul pour déterminer les paramètres de la règle en fonction des besoins de la fabrication et de son contrôle. Pour cela, Murphy se base sur les valeurs de la limite de qualité moyenne après inspection (AOQL) et du nombre moyen E d'unités produites entre deux arrêts successifs lorsque le pourcentage moyen défectueux est Ω ; en choisissant un nombre E très élevé (arbitrairement E = 10 000) pour ne pas avoir à faire des réglages superflus lorsque la machine fonctionne correctement. Remarquer que ce nombre E est fortement lié avec la caractéristique du plan d'inspection appelée longueur moyenne de la rafale (ARL) définie précédemment.

De notre côté [12], considérant aussi une règle (i, r), nous avons préféré nous baser sur la théorie générale des tests d'hypothèse pour déterminer ces paramètres i et r, en fonction des risques α et β, ou, ce qui est équivalent, en fonction des ARL relatives aux qualités de fabrication acceptable et refusable. Nous fixons donc pour le test à définir les conditions suivantes :

1/ Pendant que le processus produit ω_A (ou moins de ω_A) déchets, nous admettons le risque α de nous tromper en réglant ce qui fonctionne correctement.

2/ Si le processus arrive à produire ω_R (ou plus de ω_R) déchets, nous admettons le risque β de nous tromper en ne réglant pas ce qui fonctionne incorrectement.

Si ω est le pourcentage de défectueux fabriqué, la probabilité d'apparition de r déchets dans les séquences qui n'arrivent pas à totaliser i pièces bonnes, est :

$$Q_\omega = [1 - (1 - \omega)^i]^r$$

Le remplacement de Q_ω par α et par $(1 - \beta)$ et de ω par les proportions défectueuses acceptables ω_A = AQL, et refusables ω_R = RQL donne lieu au système d'équations suivant :

$$\alpha = [1 - (1 - \omega_A)^i]^r$$

$$1 - \beta = [1 - (1 - \omega_R)^i]^r$$

lequel se transforme facilement en celui-ci :

$$\log (1 - \sqrt[r]{\alpha}) = i \log (1 - \omega_A)$$

$$\log (1 - \sqrt[r]{1 - \beta}) = i \log (1 - \omega_R)$$

d'où, par division :

$$\frac{\log (1 - \sqrt[r]{1 - \beta})}{\log (1 - \sqrt[r]{\alpha})} = \frac{\log (1 - \omega_R)}{\log (1 - \omega_A)} = K$$

Cette équation, de laquelle i a été iliminé, se résoud sans difficulté, en donnant à r des valeurs entières 1, 2, 3, ..., et comparant chaque fois :

$$\log (1 - \sqrt[r]{1 - \beta}) \quad \text{avec} \quad K \log (1 - \sqrt[r]{\alpha})$$

Il est commode d'exécuter les calculs dans une table et de s'aider finalement avec un graphique (voir, ci-après, l'exemple 5.3.1).

Une fois connu r (pour lequel on choisit la valeur entière la plus proche de celle satisfaisant à l'équation précédente, on a :

$$i = \frac{\log (1 - \sqrt[r]{\alpha})}{\log (1 - \omega_A)}$$

Finalement, il faudra vérifier la valeur de β obtenue réellement avec les paramètres i et r choisis, afin de modifier ce dernier, par addition ou soustraction d'une unité si les conditions d'efficacité résultantes étaient trop différentes de celles désirées.

En se basant sur les valeurs finales de i et r, il est facile aussi de tracer la courbe caractéristique ; il suffit d'appliquer différentes valeurs de ω à la formule qui donne la probabilité de refus Q_ω. La courbe ARL peut être tracée, encore, après calcul, pour différentes valeurs de ω à partir de :

$$L_\omega = \frac{1}{Q_\omega} = \frac{i}{[1 - (1 - \omega)^i]^r}$$

Il est à remarquer que cette longueur moyenne des rafales concerne le nombre de pièces *contrôlées*, de façon que, si nous désirons considérer le nombre de pièces *fabriquées*, il faudra savoir si l'on contrôle la production à 100 % ou bien si l'on passe à un contrôle moins sévère après contrôle de i pièces consécutives bonnes. Dans le premier cas, le nombre de pièces fabriquées et controlées jusqu'à détection du dérèglement de la machine est :

$$l_R = i\, L_R$$

tandis que dans le second, si f est la fraction contrôlée pendant les séquences de contrôle partiel, le nombre de pièces produites jusqu'à la décision de réglage est :

$$l_R = i\,\left[1 + \frac{1}{f}(L_R - 1)\right]$$

Ces méthodes, comme toutes celles essentiellement basées sur un contrôle par attributs, sont peu sensibles dans la majorité des cas, puisque l'on obtient pour i des valeurs élevées si l'on désire une efficacité de contrôle suffisante, ce qui donne lieu à des séquences de contrôle très longues pendant lesquelles la machine peut tourner dans des conditions incorrectes. Cette méthode est, par conséquent, adéquate seulement pour des productions en très grande série.

5.3.1 - Exemple de calcul

Déterminer le plan de contrôle et d'échantillonnage au moyen d'une règle de type (i, r) d'accrod avec les conditions d'efficacité suivantes :

AQL	$\omega_A = 0,001$	$\alpha = 0,001$	$L_A = 1\,000$
RQL	$\omega_R = 0,010$	$\beta = 0,50$	$L_R = 2$

Nous calculerons d'abord :

$$K = \frac{\log\,(1 - \omega_R)}{\log\,(1 - \omega_A)} = \frac{\log\ 0,990}{\log\ 0,999} = 11$$

et ensuite nous construirons le tableau suivant pour le reste des calculs :

r	$\log \sqrt[r]{0,5}$	$\log \sqrt[r]{0,001}$	$1 - \sqrt[r]{0,5}$	$1 - \sqrt[r]{0,001}$	$\log(1 - \sqrt[r]{0,001})$	$K \log(1 - \sqrt[r]{0,001})$	$\log(1 - \sqrt[r]{0,5})$
1	$\bar{1},6990$	$\bar{3},0000$	0,5	0,9990	- 0,0004	- 0,0044	- 0,3010
2	$\bar{1},8495$	$\bar{2},5000$	0,2935	0,9684	- 0,0139	- 0,1529	- 0,5324
3	$\bar{1},8997$	$\bar{1},0000$	0,2062	0,9000	- 0,0458	- 0,5038	- 0,6857
4	$\bar{1},9247$	$\bar{1},2500$	0,1592	0,8222	- 0,0850	- 0,9350	- 0,7980

La comparaison des résultats inscrits dans les deux dernières colonnes du tableau indique que la valeur exacte de r pour satisfaire le système d'équations posé se trouve située entre 3 et 4 ; la figure 12 le confirme. L'application successive de ces deux valeurs pour r donne les résultats suivants :

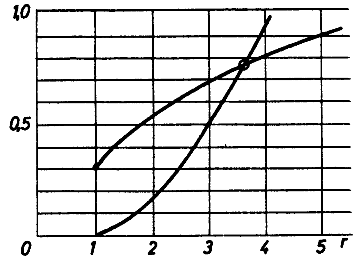

Fig. 12

$\boxed{r = 3}$ $$i = \frac{\log(1 - \sqrt[r]{\alpha})}{\log(1 - \omega_A)} = \frac{-0,0458}{-0,0004} = 114,5$$

Calcul de β :

$$\log(1 - \sqrt[3]{1 - \beta} = -0,5038 = \bar{1},4962$$

$$\beta = 0,68 \quad L_R = \frac{1}{1 - 0,68} = 3,2$$

$\boxed{r = 4}$ $$i = \frac{\log(1 - \sqrt[r]{\alpha})}{\log(1 - \omega_A)} = \frac{-0,0850}{-0,0004} = 212,5$$

Calcul de β :

$$\log(1 - \sqrt[4]{1 - \beta}) = -0,9350 = \bar{1},0650$$

$$\beta = 0,39 \quad L_R = \frac{1}{1 - 0,39} = 1,64$$

Par conséquent, il est possible de choisir une de ces deux solutions :

1/ Règle d'intervention (115,3) : Intervenir lorsque 3 pièces défectueuses sont sorties sans être arrivé à obtenir 115 bonnes consécutives. Le risque d'erreur β est de 0,68, c'est-à-dire qu'en moyenne on contrôlerait 115 × 3,2 = 368 pièces bonnes avant de se rendre compte du dérèglement de la machine.

2/ Règle d'intervention (213,4) : Intervenir lorsque 4 pièces défectueuses sont sorties sans être arrivé à obtenir 213 bonnes consécutives. Le risque d'erreur β est de 0,39, c'est-à-dire qu'en moyenne on contrôlerait 213 × 1,64 = 349 pièces bonnes avant de se rendre compte du dérèglement de la machine.

De la comparaison des deux solutions, on déduit que la seconde est meilleure.

5.4 - Contrôle à plusieurs niveaux

Une autre variante d'application de la méthode de Dodge a pour objet de la faire plus flexible lorsque la qualité minimale garantie au client est nettement inférieure à celle que le processus produit normalement, c'est-à-dire lorsque le pourcentage de défectueux fabriqués est plus petit que celui nécessaire. L'implantation d'un système de contrôle à plusieurs niveaux est appropriée dans ce cas.

Cette méthode consiste en ceci ; on commence de la même façon indiquée antérieurement avec un contrôle à 100 %, jusqu'à ce que l'on trouve i pièces bonnes consécutives. On passe ensuite à un premier niveau de contrôle partiel pendant lequel une fraction f de la production est contrôlée, jusqu'à ce qu'on trouve i pièces bonnes consécutives. Alors commence une autre période de contrôle partiel réduit, ou second niveau, auquel une fraction f^2 de la totalité des pièces est contrôlée. De même lorsque l'on arrive à trouver i pièces bonnes consécutives, on passe à un troisième niveau d'inspection, contrôlant une fraction f^3 de la production; et l'on continue à réduire successivement la rigueur du contrôle par étapes de i pièces bonnes consécutives jusqu'au niveau K auquel est contrôlée seulement une fraction f^K, au-dessous de laquelle on ne descend plus.

Lorsqu'une pièce défectueuse est trouvée dans un quelconque des niveaux de contrôle, on revient au niveau supérieur immédiatement plus sévère, en arrivant même à nouveau au contrôle à 100 % si l'on rencontre trop souvent des pièces mauvaises.

La détermination des paramètres du plan d'inspection i et f ainsi que du nombre maximal des niveaux, est basée sur la même théorie précédemment exposée, résumée par la formule ci-après :

$$F = \frac{f}{f + (1 - f)(1 - \omega)^i}$$

Si nous appelons F_j la proportion de pièces vérifiées au niveau j de l'inspection c'est-à-dire, lorsque la fraction de la production que l'on contrôle est f^j, on a :

$$F_j = \frac{f^j}{f^j + (1 - f^j)(1 - \omega)^i}$$

Comparant les proportions F_j et F_{j-1} relatives à deux niveaux consécutifs d'inspection, il en résulte :

$$\frac{F_j}{F_{j-1}} = \frac{f\ (1 - f^{j-1})(1 - \omega)^i + f^{j-1}}{(1 - f^j)(1 - \omega)^i + f^j} = \frac{(f - f^j)(1 - \omega)^i + f^j}{(1 - f^j)(1 - \omega)^i + f^j}$$

Etant donné que f est plus petit que l'unité :

$$(f - f^j) < (1 - f^j) \text{ et } F_j < F_{j-1}$$

Ainsi pour une proportion de déchets ω constante, la fraction F effectivement contrôlée décroît lorsque l'on passe d'un niveau de contrôle au niveau supérieur. Il suffit, par conséquent, de calculer les paramètres i et f relatifs au premier niveau pour une fraction F donnée, puisque cette fraction F sera la plus grande de tous les niveaux si la qualité de la fabrication reste constante. Le contrôle réalisé à tout autre niveau moins rigoureux sera toujours plus économique.

Il existe encore d'autres variantes décrites dans le manuel "Handbook H. 106", publié par le Gouvernement des Etats-Unis [13] pour la divulgation de ces méthodes. Une variante très employée avec échantillonnage à trois niveaux et deux étages à chaque niveau est schématisée dans la figure 13.

VI - CONCLUSION ET RESUME

Les méthodes de contrôle statistique appropriées pour le contrôle de processus industriels continus diffèrent assez des méthodes traditionnelles par leur efficacité supérieure et par leur flexibilité plus grande d'application. Dans tout processus de fabrication, spécialement dans ceux qui sont continus, il importe d'être constamment à l'affût pour corriger immédiatement toute modification qui pourrait faire baisser la qualité résultante.

Malgré leurs grands avantages, les graphiques de contrôle classiques, de plus, ne sont pas toujours applicables, en raison soit des conditions spécifiques du produit, soit de la formation à exiger des ouvriers.

Pour toutes ces raisons donc, de nouvelles méthodes de contrôle ont été imaginées, les unes se rapportant à des productions continues non différenciées (industries chimiques, filature, fonderie au cubilot, etc.), d'autres se rapportant à des productions continues différenciées (décolletage et découpage à la presse en très grandes séries).

Après la définition de l'ARL (longueur moyenne des rafales) pour caractériser mieux le contrôle statistique en cours de fabrication on a étudié dans cet article les graphiques de contrôle à sommes cumulées avec droites parallèles pour les productions continues non différenciées et les plans continus d'échantillonnage (CSP) avec leurs règles d'intervention et leurs séquences de contrôle à 100 % ou partiel pour les productions continues différenciées.

Les avantages des uns et des autres sont importants ; en plus de l'efficacité et de la flexibilité plus grandes que nous avons indiquées comme étant des caractéristiques importantes de ces méthodes, il est intéressant de remarquer que les plans continus d'échantillonnage peuvent servir dans le contrôle final de fabrication pour garantir la qualité désirée, qu'elle soit supérieure ou inférieure à celle produite, avec une fraction contrôlée minimale et, par conséquent, avec le maximum d'économie d'inspection.

Cette étude a été réalisée dans le cadre du programme de recherches du Département de Statistique Appliquée et de Recherche Opérationnelle de "Ingenieros Consultores, S.A. - Organisation Paul Planus" de Barcelone. Nous remercions vivement cette société pour l'autorisation qu'elle nous a donné de la publier.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.J. DUNCAN - "Quality Control and Industrial Statistics" (Rev. Edit. 1959), p. 396

[2] R. CAVE - "L'efficacité des méthodes classiques de contrôle statistique" Rev. de Statistique Appliquée, vol. 1, 1953 - n° 3/4, p. 36.

[3] R.A. FREUND - "Graphical Process Control" - Ind. Qual. Contr. *XVIII*, n° 7, Janv. 1962, p. 15-22.

J. TORRENS-IBERN - "Plans d'inspection pour le contrôle de Productions Continues" Rivista di Ingegneria n° 4, Milano, Apr. 1963.

[4] N.L. JOHNSON et F.C. LEONE - "Cumulative Sum Control Charts. Mathematical Principles applied to their Construction and Use". Ind. Qual. Contr. XVIII, 12, June 1962, p. 15 - 21 ; XIX, 1, July 1962; p. 29 - 36 ; N° 2, Aug. 1962, p. 22-28.

P. FERIGNAC - "Cartes de contrôle par cumul des observations". Rev. Stat. Appl. Vol. XI, n° 3, 1963, p. 5-39

[5] A. WALD - "Sequential Analysis", 1947.
Statistical Research Group, Columbia University : "Sequential Analysis of Statistical Data ; Applications". 1947, p. 4.10 et 4.11.

[6] Par exemple - J. MOTHES, "Estadística Aplicada a la Ingeniería", 1960, p.155.

[7] Statistical Research Group, Columbia University : "Sequential Analysis of Statistical data : Applications" 1947, p. 7.14 et 7.15.

[8] H.F. DODGE - "A Sampling Inspection Plan for Continuous Production" Annals of Math. Stat. Vol.14, 1943, n° 3 - p. 264-279.

[9] P. FERIGNAC - "Plan d'échantillonnage pour l'inspection d'une production continue". Rev. de Stat. Appl. vol. VII, n° 1 - 1959, p. 5 - 15.

[10] En plus des articles réf. 9 et 10 et le livre réf. 2 , p. 301, on peut les trouver aussi dans E.L. GRANT : "Statistical Quality Control" 2nd Ed. p.355.

[11] R.B. MURPHY - "Stopping Rules with CSP-1 Sampling Inspection Plans in Continuous Production" Ind. Qual. Contr. Vol. XVI, n° 5, nov. 1959, p. 10-16

[12] J. TORRENS-IBERN - "Nuevos Métodos de Inspección en producción continua" DYNA, vol. XXXVII, n° 4, Abr. 1962, p. 213 - 222.

[13] U.S. Government Printing Office "Multi-level Continuous Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes" et "Single-level Continuous Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes", Inspection and Quality Control Handbooks H. 106 (1958) et H. 107 (1959)