Revue de statistique appliquée

Daniel Grouchko

Application de la formule de Bayes au calcul d'un volant de rechanges pour des pièces à faible consommation

Revue de statistique appliquée, tome 12, n° 4 (1964), p. 57-80

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1964__12_4_57_0>

APPLICATION DE LA FORMULE DE BAYES AU CALCUL D'UN VOLANT DE RECHANGES POUR DES PIÈCES A FAIBLE CONSOMMATION (1)

Daniel GROUCHKO

INTRODUCTION -

Dans le cadre de la mise au point d'un système d'information automatique sur les avaries des matériels électroniques, plusieurs programmes de dépouillement statistique en ordinateur ont été mis au point, ils permettent :

a) d'évaluer la fiabilité des matériels ;

b) d'identifier les avaries systématiques ;

c) de définir les procédures d'entretien ;

d) de prévoir et de réviser les allocations de pièces détachées de rechange.

Les méthodes de Bayes nous ont permis de répercuter sur les conclusions de certains modèles stochastiques, l'imprécision statistique des données initiales et pour nous limiter au thème de cet article, ces méthodes ont donné une réponse à la question suivante : "Comment, à partir d'informations peu nombreuses, calculer une allocation de pièces de rechange ayant un très haut niveau de confiance ?".

La majorité des quelques dizaines de milliers de types de pièces composant l'équipement électronique d'un bâtiment de la Marine Nationale sont sujettes à des avaries excessivement rares.

Le relevé systématique des remplacements de pièces n'apporte, dans ces conditions, que des informations statistiquement très imprécises, qu'aucun renseignement extérieur valable (données à priori, expérience technique) ne vient compléter.

Nous avons alors supposé que la consommation réelle (passée et future) était distribuée suivant une loi statistique de Poisson, dont la valeur moyenne, inconnue, pouvait à priori, prendre indifféremment toute valeur. La formule de Bayes permet d'effectuer une synthèse entre ces hypothèses et la consommation effectivement enregistrée au cours d'une série d'observations.

Les résultats obtenus sont simples :

- La distribution de probabilité de la moyenne estimée est une loi Gamma ;

----

(1) Nous résumerons, dans les pages ci-après, des réflexions faites à l'occasion d'une étude demandée par la Marine Nationale - Bureau de l'Entretien des Matériels de Transmissions, Ecoute, Radar.

- La distribution de la consommation prévue est une loi Binomiale Négative.

Le développement rapide des systèmes d'informations automatiques, qui assurent la préparation des décisions dans une économie dont la complexité augmente sans cesse et où l'accélération du progrès technique raccourcit la durée des observations, devrait assurer à ces méthodes un vaste champ d'application.

Plan de l'Article.

1/ Conditions et Objet de l'étude.

2/ Organisation générale de l'étude d'une allocation.

3/ Etude statistique de la consommation.

Pourquoi les méthodes de Bayes ?

4/ Calcul de l'allocation optimum.

5/ Propriétés des distributions statistiques obtenues :

5.1 - Loi Gamma.

5.2 - Loi Binomiale Négative.

Annexe : Démonstration des formules utilisées.

I - CONDITIONS ET OBJET DE L'ETUDE -

Le matériel électronique.

L'équipement électronique militaire gagne sans cesse en importance, en complexité et en prix.

Malgré les efforts entrepris dans les domaines de la fiabilité (sûreté de fonctionnement), les ensembles électroniques sont, en raison même de leur complexité, des matériels extrêmement fragiles.

Moyens de maintenance.

Des ateliers de réparation ont donc été prévus à bord des bâtiments de la Marine Nationale, ils doivent pouvoir assurer la maintenance des matériels, pendant la période maximum d'autonomie des navires (plusieurs mois).

Allocations de rechanges.

L'équipement d'un bâtiment important se compose de plusieurs dizaines de milliers de types de composants électroniques ayant toutes les variétés de dimensions et de prix (de 1 à 100 000 francs). Pour chaque type de composant, il faut déterminer le nombre de rechanges à embarquer, en tenant compte :

- du prix, du volume, du nombre et de la fiabilité des pièces à poste sur les matériels,

- de l'autonomie des bâtiments,

- des possibilités de dépannage, des appareils ou chassis de rechange disponibles à bord,

- de l'importance opérationnelle des matériels,

- de la place et des crédits disponibles.

Informations disponibles.

De tous ces éléments, qui interviennent dans la définition d'une allocation, seuls peuvent être évalués actuellement de façon précise :

- le nombre et le coût des pièces à poste,
- les consommations passées,
- les allocations actuelles (des bâtiments en service),
- l'autonomie exigée.

Critère d'optimisation de l'allocation.

En raison de la nature du problème étudié (et pour simplifier les calculs), nous avons choisi pour critère d'optimisation de l'allocation, le coût I de la rupture de stock, c'est-à-dire la somme des dépenses représentées par :

- l'immobilisation d'un matériel qui ne peut être dépanné,
- l'approvisionnement, le transport, et éventuellement la fabrication urgente de la pièce.

Ce coût qui dépend de l'importance des matériels et de la nature des pièces détachées, ne peut être évalué, actuellement, que de façon très approximative, nous avons donc admis :

a) que le coût I était le même pour toute rupture de stock,

b) que plusieurs allocations optima, correspondant à des valeurs différentes de I seraient calculées, un organisme central choisissant alors l'allocation dont le coût et la sûreté lui paraissent les plus appropriés.

Calcul de l'allocation optimum.

E étant le nombre moyen de ruptures de stock (ou excès moyen de la demande par rapport à l'allocation), le coût moyen J des ruptures de stock sera :

$$J = I \times E \tag{1}$$

Faisons le bilan économique entre :

- le coût F d'une pièce de rechange supplémentaire,
- la diminution $J(A) - J(A+1)$ du coût moyen des ruptures de stock, obtenue, en ajoutant une pièce à l'allocation A.

Si ce bilan est positif : $J(A) - J(A+1) \geqslant F$, nous avons intérêt à augmenter l'allocution.

De même, si le bilan entre :

- l'économie F' réalisée en supprimant une pièce de rechange,
- l'augmentation $J(A-1) - J(A)$ du coût moyen des ruptures de stock, est positif : $F' > J(A-1) - J(A)$, nous avons intérêt à diminuer l'allocation.

L'optimum est atteint lorsqu'aucune modification de l'allocation n'apparaît souhaitable :

$$J(A - 1) - J(A) \geqslant F'$$
$$J(A) - J(A + 1) < F$$

N'ayant pas d'informations précises sur la valeur de F', nous avons été amenés à poser F' = F, il vient alors :

$$J(A - 1) - J(A) \geqslant F > J(A) - J(A + 1)$$

ou, en tenant compte de la relation (1) :

$$E(A - 1) - E(A) \geqslant \frac{F}{I} > E(A) - E(A + 1) \qquad (2)$$

<u>Remarque</u> : L'hypothèse F' = F est valable si l'on étudie l'allocation d'un nouveau bâtiment, ou l'allocation de pièces communes d'un bâtiment en service. Si par contre des pièces spéciales et à très faible consommation sont surstockées, on n'aura d'autre solution que de les jeter ; le seul intérêt de l'allègement du stock étant alors de libérer les magasins, F' sera voisin de zéro.

On démontre aisément que E(A) - E(A + 1) est une fonction non croissante de A, ces inégalités définissent donc sans ambiguïtés l'allocation optimum.

Arrivée à ce point du raisonnement, nous voyons que le calcul de l'allocation optimum est immédiat si nous pouvons évaluer le nombre moyen de ruptures de stock E(A).

Avant d'entreprendre cette évaluation qui nécessite une analyse statistique assez complexe de la consommation passée, nous décrirons brièvement l'organisation pratique d'une étude d'allocation.

II - ORGANISATION GENERALE DE L'ETUDE D'UNE ALLOCATION -

<u>Règle</u> : "Aller du particulier au général, du quantitatif au qualitatif".

<u>Première étape : Etude statistique détaillée</u>.

La consommation passée de chacun des 10 000 à 50 000 types de pièces détachées est analysé individuellement, et l'allocation correspondante est optimisée.

Ce travail est effectué par un calculateur électronique, il conduit à des états mécanographiques adaptés à un dépouillement manuel rapide :

- les améliorations à apporter aux allocations actuelles sont classées par ordre d'importance,

- des synthèses sont effectuées par classes de pièces détachées et pour l'ensemble du stock.

<u>Deuxième étape : Etude qualitative, technique et opérationnelle</u>.

Une analyse qualitative de l'allocation calculée est effectuée par un groupe d'officiers et techniciens, afin de tenir compte de tous les paramètres non chiffrés qui n'ont pu intervenir dans le modèle stochastique traité par l'ordinateur : importance des matériels, possibilités de dépannage à bord, volume des pièces détachées, etc.

Troisième étape : Contrôle et décision.

Un bureau central coordonne les études statistiques et techniques, entérine ou refuse le montant total des allocations suggérées, définit au vu de l'expérience acquise progressivement, des règles générales de gestion.

III - ETUDE STATISTIQUE DE LA CONSOMMATION. POURQUOI LES METHODES DE BAYES ?

"Aucune mesure physique n'est parfaitement précise... Nous ne connaissons pas parfaitement les conditions initiales, mais nous avons une certaine idée de leur répartition". Norbert Wiéner - Cybernétique et Société.

Sûreté d'une allocation.

Les avaries des matériels se produisent au hasard (on ne peut prédire, avec certitude, quand une pièce tombera en avarie), la consommation x de pièces de rechange est alors une grandeur aléatoire. Nous appellerons "Sûreté d'une allocation de A pièces", la probabilité de ne manquer d'aucune pièce de rechange :

$$S(A) = Pr\ (x \leqslant A)$$

(Dans la suite de ce texte, le symbole "Pr" remplacera le terme "Probabilité").

Si l'allocation A varie de 0 à l'infini, la sûreté S(A) définit une fonction qui est la "Loi de répartition de la consommation x". On démontre simplement, que la "Sûreté totale" d'une allocation composée de plusieurs types de pièces est égale au produit des "Sûretés partielles" des allocations de chaque type de pièce :

$$S = S_1 \times S_2 \times S_3 \times \ldots \times S_n \tag{3}$$

(S_i est la probabilité de ne pas manquer de pièces de type "i", les probabilités S_i sont supposées indépendantes).

Prenons un exemple numérique : 1 000 types de pièces sont utilisés à bord d'un bâtiment, la sûreté partielle de l'allocation de chaque type de pièce est très bonne : 99,9 %.

La sûreté totale sera :

$$S = 0,999^{1000} = 0,37$$

S est assez faible, il est probable qu'on enregistrera au moins une rupture de stock.

"Pour qu'une allocation portant sur un grand nombre de types de pièces soit sûre, il faut donc que les sûretés partielles des allocations de chaque type de pièce soient excellentes".

Mais comment définir de telles allocations ?

Loi de répartition de la consommation.

Si nous utilisons une loi de répartition empirique, il nous faut plusieurs milliers de données, (c'est-à-dire, plus de 5 années d'observations sur une série de 50 navires identiques[1]) pour déterminer la consommation qui a 99,9 % de chances de ne pas être dépassée.

En pratique, nous ne disposons jamais d'observations si nombreuses et si prolongées, nous sommes alors contraints d'ajuster une loi de répartition théorique aux données expérimentales.

Hypothèse Poissonnienne.

La consommation passée de pièces détachées permet de prévoir la consommation future si le taux d'avarie de l'ensemble des pièces détachées de même type existant à bord d'un bâtiment, est constant dans le temps, la consommation obtenue x pendant une période de longueur unité[1] obéit alors à une loi de Poisson :

$$\Pr(x \text{ si } m) = \frac{m^x e^{-m}}{x!} \tag{4}$$

Où le symbole Pr (x si m) signifie : Probabilité d'obtenir une consommation x, si la consommation moyenne exacte, par période unité[1], est égale à m.

Notons que le taux d'avarie est effectivement constant dans les cas suivants :

- pièces ne présentant pas de vieillissement (avaries purement fortuites),

- nombreuses pièces de même type en service, ayant des temps de fonctionnement variables, par suite d'échanges standards. (Le phénomène est alors stationnaire).

Nous faisons donc l'hypothèse que la consommation x, qui sera obtenue dans l'avenir, obéira à une loi statistique Poisson, et il ne nous reste plus qu'à déterminer le paramètre caractéristique de cette loi : la consommation moyenne m.

Evaluation de la consommation moyenne.

Au cours d'une période d'observations de durée D, nous avons observé C avaries de pièces d'un type déterminé ; nous sommes tentés d'admettre, ainsi qu'on le fait généralement, que $m = \frac{C}{D}$

Nous obtenons :

$$\Pr(x \text{ si } C) = \frac{\left(\frac{C}{D}\right)^x e^{-\frac{C}{D}}}{x!}$$

Examinons sur un exemple, quelles sont les conséquences pratiques d'une telle méthode :

----

(1) L'unité d'observation est égale à la période couverte par l'allocation c'est-à-dire, environ 3 mois d'opérations d'un navire.

Supposons que la consommation observée soit nulle, c'est-à-dire $C = 0$, nous déduisons que la consommation sera toujours nulle, (en effet $Pr\ (x \text{ si } C) = 0$ si $C = 0$), et aucune allocation ne sera délivrée. Cette conclusion est peu réaliste, pratiquement toutes les pièces sont sujettes à avarie. L'origine de notre erreur est la suivante : nous avons admis que la consommation moyenne observée $\frac{C}{D}$ était égale à la consommation moyenne exacte m, alors que, en fait, $\frac{C}{D}$ est distribuée statistiquement au voisinage de m, et cette incertitude ne doit pas être négligée, surtout si nous voulons calculer une allocation dont la sûreté soit supérieure à 99,9 %.

Connaissances à priori sur la consommation moyenne.

Pour préciser notre connaissance de la consommation moyenne, nous pouvons nous renseigner auprès de techniciens spécialisés et obtenir :

- des renseignements quantitatifs (tels que des résultats d'essais),
- des informations qualitatives (opinions).

La synthèse de ces expériences permet d'évaluer la probabilité à priori Pr (m) que la consommation moyenne soit égale à m.

Dans la plupart des cas, les renseignements obtenus permettront seulement de donner des bornes à la consommation moyenne : "on affirme, à priori que $m_1 < m < m_2$".

Entre ces bornes, l'hypothèse la plus simple est de considérer la loi de probabilité Pr (m) comme uniforme ; le calcul de la loi de probabilité de la consommation peut alors être effectué (cf. Annexe), il conduit au résultat :

$$Pr\ (x \text{ si } C) = \frac{Z\ (D + 1,\ C + x)}{Z\ (D,\ C)} \frac{(x + C)\ !}{x!\ C!} \frac{D^C}{(D + 1)^{x+C}}$$

où : Pr (x si C) signifie : probabilité d'obtenir la consommation x, si la consommation observée était C, au cours de la période d'observations de durée D.

et :
$$Z\ (D,\ C) = \frac{1}{D}\ C^{-D m_1} \sum_{k=0}^{k=C} \frac{(D\ m_1)^k}{k!} - \frac{1}{D}\ e^{-D m_2} \sum_{k=0}^{k=C} \frac{(D\ m_2)^k}{k!}$$

(Notons que cette loi de probabilité tend vers la loi Binomiale Négative, lorsque $m_1 = 0$ et m_2 augmente indéfiniment).

En fait dans le cas qui nous occupe, nous ne disposions pas à priori d'informations valables, nous avons alors fait l'hypothèse généralement défavorable que la consommation moyenne pouvait a priori, prendre indifféremment toute valeur. (Postulat de Bayes).

Les allocations calculées à partir de cette hypothèse seront vraisemblablement légèrement surestimées, ce qui correspond à notre recherche d'une très grande sécurité.

Application de la formule de Bayes.

Nous avons maintenant besoin d'un modèle stochastique qui nous permette de faire la synthèse entre :

- la loi de probabilité, a priori, de la consommation moyenne ;
- la distribution Poissonnienne de la consommation obtenue

$$\Pr\ (x \text{ si } m) = \frac{m^x\ e^{-m}}{x!} \tag{6}$$

- la consommation observée C au cours d'une période de durée D, qui obéit, en raison de l'hypothèse Poissonnienne à la loi :

$$\Pr\ (C \text{ si } m) = \frac{(Dm)^C\ e^{-Dm}}{C!}$$

La formule de Bayes nous semble répondre particulièrement bien à ce problème, nous indiquerons de façon simplifiée sa démonstration qui est reprise de façon plus rigoureuse, en annexe. (Il convient de remarquer que Pr (m) où m est une variable continue, doit se lire : "Densité de probabilité de m").

La probabilité d'observer simultanément les évènements m et C est :

$$\begin{aligned} \Pr\ (m \text{ et } c) &= \Pr\ (m) \times \Pr\ (C \text{ si } m) \\ &= \Pr\ (C) \times \Pr\ (m \text{ si } C) \end{aligned}$$

Il vient, en combinant ces équations :

$$\Pr\ (m \text{ si } C) = \frac{\Pr\ (m) \times \Pr\ (C \text{ si } m)}{\Pr\ (C)}$$

et, en remarquant que :

$$\Pr\ (C) = \int_0^\infty \Pr\ (m)\ \Pr\ (C \text{ si } m)\ d\,m$$

nous obtenons la formule de Bayes :

$$\Pr\ (m \text{ si } C) = \frac{\Pr\ (m) \times \Pr\ (C \text{ si } m)}{\int_0^\infty \Pr\ (m) \times \Pr\ (C \text{ si } m)\ d\,m} \tag{7}$$

De cette formule qui résume toutes nos connaissances (et nos incertitudes) sur la consommation moyenne, il nous est maintenant possible de passer à une prévision de la consommation future :

La relation :

$$\Pr\ (x \text{ si } C) = \int_0^\infty \Pr\ (x \text{ si } m)\ \Pr\ (m \text{ si } C)\ dm$$

nous conduit en effet à la loi de probabilité de la consommation x :

$$\Pr(x \text{ si } C) = \frac{\int_0^\infty \Pr(x \text{ si } m).\ \Pr(m).\ \Pr(C \text{ si } m)\, dm}{\int_0^\infty \Pr(m).\ \Pr(C \text{ si } m)\, dm} \tag{8}$$

Ces formules se simplifient fortement, si nous tenons compte des hypothèses explicitées ci-dessus (relations (6)), nous obtenons (voir calculs en annexes) :

- une distribution Gamma, pour la consommation moyenne :

$$\Pr(m \text{ si } C) = \frac{D^x (Dm)^C\, e^{-Dm}}{C!} \tag{9}$$

- une distribution binomiale négative pour la consommation prévue :

$$\Pr(x \text{ si } C) = C_{x+C}^{C}\, \frac{D^{C+1}}{(D+1)^{x+C+1}} \tag{10}$$

IV - CALCUL DE L'ALLOCATION OPTIMUM -

Formules obtenues.

Nous pouvons maintenant calculer la sûreté S(A, C) d'une allocation de A pièces (sachant que C pièces ont été consommées pendant une période d'observations de durée D), ainsi que l'excès moyen de la demande par rapport à l'allocation E(A, C), nous obtenons (les démonstrations sont données en annexe) :

$$S(A, C) = \sum_{x=0}^{x=A} \Pr(x \text{ si } C) = \sum_{k=C+1}^{k=A+C+1} C_{A+C+1}^{k}\, \frac{D^k}{(D+1)^{A+C+1}} \tag{11}$$

(S(A, C) est donc la somme des A derniers termes d'une loi binomiale) :

$$E(A, C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} (x - A) \Pr(x \text{ si } C) = \left[\frac{C+1}{D} - A\right]\left[1 - S(A, C)\right] + \frac{A+C+1}{D} \Pr(x = A \text{ si } C) \tag{12}$$

et la relation de récurrence :

$$- E(A+1, C) + E(A, C) = 1 - S(A, C) \tag{13}$$

Nous avons vu, précédemment [Formule (2)], que l'allocation optimum était définie par les inéquations :

$$E(A-1) - E(A) \geqslant \frac{F}{I} > E(A) - E(A+1)$$

où F est le coût d'une pièce de rechange et I, le coût d'une rupture de stock.

En tenant compte des relations ci-dessus, nous obtenons :

$$1 - S(A - 1, C) \geqslant \frac{F}{I} > 1 - S(A, C) \tag{14}$$

ou :

$$\sum_{k=0}^{k=C} C_{A+C}^{k} \frac{D^{k}}{(D+1)^{A+C}} \geqslant \frac{F}{I} > \sum_{k=0}^{k=C} C_{A+C+1}^{k} \frac{D^{k}}{(D+1)^{A+C+1}} \tag{15}$$

Cette double inéquation nous permet de déterminer aisément l'allocation A, si nous disposons de tables de la loi binomiale cumulée :

$$\sum_{k=0}^{k=C} C_{A+C}^{k} \frac{D^{k}}{(D+1)^{A+C}}$$

Pour un calculateur, cette consultation de table serait cependant très onéreuse, en raison de la longueur considérable de la table numérique utilisée. (La table binomiale dépend de 3 paramètres A, C, D pouvant prendre des valeurs allant, environ, de 0 à 100, elle comprend donc, au total, environ : 100 × 100 × 100 = 1 000 000 de termes).

Ajustement normal.

Nous avons alors cherché à utiliser une table numérique plus courte, par exemple, une loi normale.

La sûreté S(A, C) de l'allocation A est la somme des A derniers termes de la loi binomiale [cf. formule (11)] :

$$\operatorname{Pr}(k) = C_{A+C+1}^{k} \frac{D^{k}}{(D+1)^{A+C+1}} \tag{16}$$

de moyenne : $\bar{k} = (A + C + 1) \frac{D}{D+1}$

et d'écart-type : $\sigma_k = \frac{\sqrt{D(A + C + 1)}}{D+1}$

Cette loi peut être approchée par une loi Normale ayant même moyenne ($\bar{k}$) et même écart type (σ_k) ;

$$1 - S(A, C) = \sum_{k=0}^{k=C} \operatorname{Pr}(k)$$

sera alors donné par une table de la loi Normale Réduite, en prenant pour valeur de la variable t :

$$t = \frac{C - \bar{k}}{\sigma_k}$$

Mais pour calculer exactement :

$$1 - S(A, C) = \operatorname{Pr}(k \leqslant C),$$

nous ne pouvons pas négliger le fait que la Loi Normale est continue, alors que Pr (k) est défini uniquement pour les valeurs entières de k.

Il en résulte qu'à :

$$t \leqslant \frac{C + 0,5 - \bar{k}}{\sigma_k}$$

correspond $k \leqslant C$.

La valeur de la loi de répartition Normale correspondant à :

$$t = \frac{C + 0,5 - \bar{k}}{\sigma_k} = \frac{C + 0,5 - D(A + 0,5)}{D(A + C + 1)} \tag{17}$$

nous donne donc la meilleure approximation de $1 - S(A, C)$.

Des vérifications numériques montrent que cette approximation est bonne si C est supérieur à 10. (Un exemple est donné par le tableau 1, dans le cas où $C = 10$ et $D = 1$).

Calcul par récurrence.

Cependant, après analyse du programme ordinateur, nous sommes arrivés à la conclusion que le calcul par récurrence de la sûreté $S(A, C)$ était réalisable et relativement rapide.

Le procédé de calcul de l'allocation optimum est alors le suivant :

a) l'ordinateur calcule la table des valeurs de $\left[\frac{D}{D + 1}\right]^{C+1}$, où D est un paramètre valable pour l'ensemble d'une exploitation et $C + 1$ prend les valeurs : 1, 2, 4, 8, ..., 2048.

b) $\Pr(x = 0 \text{ si } C) = \left[\frac{D}{D + 1}\right]^{C+1}$ [Formule (10)] est alors calculé à partir de cette table, en décomposant $(C + 1)$ en termes binaires (ce calcul nécessite au maximum 10 multiplications).

c) l'ordinateur évalue :

$$\begin{cases} S(A = 0, C) = \Pr(x = 0 \text{ si } C) & \text{[cf. Formule (11)]} \\ E(A = 0, C) = \dfrac{C + 1}{D} & \text{[cf. Formule (12)]} \end{cases}$$

d) calcul par récurrence de :

$$\begin{cases} \Pr(x = A \text{ si } C) = \dfrac{C + A}{A(D + 1)} \Pr(x = A - 1 \text{ si } C) \\ S(A, C) = S(A - 1, C) + \Pr(x = A \text{ si } C) \\ E(A, C) = E(A - 1, C) + S(A - 1, C) - 1 \end{cases}$$

e) lorsqu'une valeur A est atteinte, telle que :

$$\frac{F}{I} > E(A, C) - E(A + 1, C) \qquad \text{[cf. Formule (2)]}$$

cette valeur A, est ainsi que nous l'avons vu précédemment l'allocation optimum de pièces de rechange.

Exemples numériques.

Nous examinerons maintenant, sur quelques exemples, quelles seront les conséquences pratiques des méthodes statistiques utilisées.

Supposons qu'aucune pièce n'a été consommée au cours de la période d'observation, nous obtenons (cf. Formule (9), (10), (11), (12)) :

$$\left\{\begin{array}{lll} C = 0 & & \\ Pr\,(m \text{ si } C) = D\, e^{-Dm} & & \bar{m} = \dfrac{1}{D} \\ Pr\,(x \text{ si } C) = \dfrac{D}{(D+1)^{x+1}} & & \bar{x} = \dfrac{1}{D} \\ S(A,\ C) = 1 - \dfrac{1}{(D+1)^{A+1}} & & \\ E(A,\ C) = \dfrac{1}{D(D+1)^{A}} & & \end{array}\right. \qquad (19)$$

Bien que la consommation observée ait été C = 0, l'espérance mathématique de la consommation future est donc différente de zéro :

$$\bar{x} = \frac{1}{D}.$$

Supposons que nous exigions une sûreté S(A, C) supérieure ou égale à 99,9 %, nous avons donc :

$$\frac{1}{(D+1)^{A+1}} \leqslant 0{,}001 \quad \text{ou} \quad (D+1)^{A+1} \geqslant 1\,000$$

Selon la durée de la période d'observations, nous délivrerons donc les allocations suivantes :

Si D = 1 (3 mois d'observations), l'allocation est	A = 9
Si D = 2 (6 mois d'observations), l'allocation est	A = 6
D = 3 ou 4	A = 4
D = 5, 6, 7 ou 8	A = 3
D = 9 à 99	A = 2
D = 100 à 999	A = 1
D supérieur ou égal à 1 000	A = 0

La durée de la période d'observations a donc une influence importante sur l'allocation, surtout pour les valeurs de D inférieures à 10.

Supposons, maintenant, que le coût d'une rupture de stock est évalué à 1 000 000 Frs et que le coût de la pièce est 1 Franc, l'allocation optimum correspondra à cf. [Formule (14)] :

$$1 - S(A-1,\ C) \geqslant 10^{-6} > 1 - S(A,\ C)$$

c'est-à-dire à une sûreté voisine de 99,9999 %.

La relation ci-dessus peut s'écrire :

$$(D+1)^{A} < 10^{6} \leqslant (D+1)^{A+1}$$

et nous obtenons :

Si $D = 1$,	$A = 19$	Si $D = 10$ à 15,	$A = 5$
$D = 2$	$A = 12$	$D = 16$ à 31	$A = 4$
$D = 3$	$A = 9$	$D = 32$ à 99	$A = 3$
$D = 4$	$A = 8$	$D = 100$ à 999	$A = 2$
$D = 5$ ou 6	$A = 7$	$D = 1\,000$ à $999\,999$	$A = 1$
$D = 7$ à 9	$A = 6$	$D \geqslant 10^6$	$A = 0$

Nous notons à nouveau, que l'influence de la durée des observations est surtout sensible pour les valeurs de D inférieures à 10.

Et nous concluons cette application numérique, par la remarque suivante :

Si la durée D des observations est comprise entre 32 et 99, c'est-à-dire entre 1 et 3 ans, sur une série de 8 bâtiments identiques (ce temps d'observation est assez courant) et si la consommation observée est nulle, l'allocation délivrée sera :

- 2 pièces de rechange, si la sûreté exigée est 99,9 %,
- 3 pièces de rechange, si la sûreté exigée est 99,9999 %.

Il suffit donc d'une pièce supplémentaire, pour augmenter dans des proportions considérables, la sûreté de l'allocation.

V - PROPRIETES DES DISTRIBUTIONS STATISTIQUES OBTENUES -

5.1 - Loi Gamma.

La distribution de probabilité [cf. Formule (9)] :

$$\Pr(m \text{ si } C) = \frac{D\,(D\,m)^C\, e^{-Dm}}{C!}$$

est connue sous le nom de loi Gamma, elle a pour moyenne $\bar{m} = \frac{C+1}{D}$ et pour écart type $\sigma_m = \frac{\sqrt{C+1}}{D}$.

Analogie avec la loi de Poisson.

En divisant $\Pr(m \text{ si } C)$ par D, nous obtenons un terme de la loi de Poisson, $\frac{(D\,m)^C\, e^{-Dm}}{C!}$, de variable C et de moyenne D m.

Des tables de la loi de Poisson figurent dans de nombreux ouvrages, elles ont la présentation suivante :

Variable C	Moyenne D m					
	0,1	0,5	1	2	5	10
0	0,904	0,606	0,367	0,135	0,006	0,000
1	0,090	0,303	0,367	0,270	0,033	0,000
2	0,004	0,075	0,183	0,270	0,084	0,002
3	0,000	0,012	0,061	0,180	0,140	0,007
4		0,001	0,015	0,090	0,175	0,018

Pour déterminer les termes d'une loi Gamma, nous lisons les nombres figurant dans une même ligne, alors qu'une loi de Poisson est déterminée par les nombres figurant dans une même colonne.

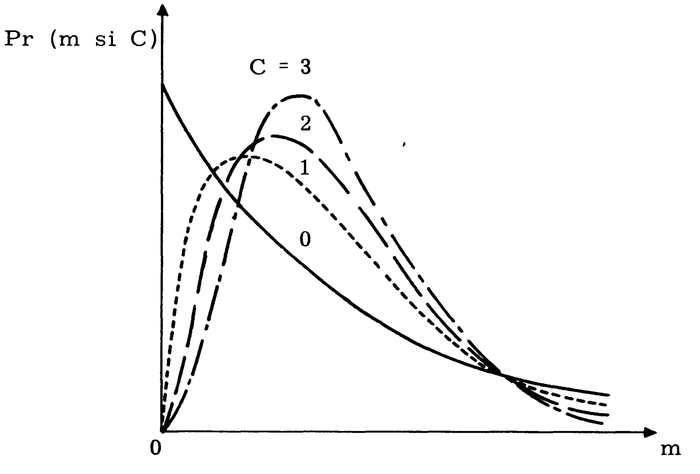
Prenons par exemple C = 3 et D = 10, nous lisons la 4ème ligne du tableau ci-dessus et en multipliant par D nous obtenons la densité de probabilité de la loi Gamma f(m) = Pr (m si C = 3) :

$$\begin{aligned} f(m &= 0,01) = 0,00 \\ f(m &= 0,05) = 0,12 \\ f(m &= 0,1) = 0,61 \\ f(m &= 0,2) = 1,80 \\ f(m &= 0,5) = 1,40 \\ f(m &= 1) = 0,07 \end{aligned}$$

Formes de la loi .

Le graphique ci-après donne l'allure de la distribution Γ, pour C = 0, 1, 2, 3.

Fig.



Si C = 0, nous obtenons une loi exponentielle ; si C et D augmentent alors que $\frac{C}{D}$ tend vers une limite μ, la distribution prend une forme en cloche, semblable à celle de la loi Normale, avec pour limite la droite $m = \mu$.

(Si la durée D des observations est très grande, la consommation moyenne m est connue avec certitude : $m = \mu = \frac{C}{D}$).

5.2 - Loi Binomiale Négative.

La distribution de probabilité :

$$Pr\,(x \text{ si } C) = C^{C}_{x+C} \frac{D^{C+1}}{(D+1)^{x+C+1}}$$

est connue sous le nom de Loi Binomiale Négative, elle a pour moyenne $\bar{x} = \frac{C+1}{D}$ pour médiane : $M_x = \frac{C}{D}$ et pour écart type :

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{(D+1)(C+1)}}{D}$$

Analogies avec la loi Binomiale.

En divisant Pr (x si C) par $\frac{D}{D+1}$, nous obtenons un terme de loi binomiale : $C_{x+C}^{C} \frac{D^C}{(D+1)^{x+C}}$ qui est la probabilité d'observer C fois l'évènement E_1, si x + C = n tirages sont effectués entre 2 évènements E_1 et E_2 ayant respectivement les probabilités $p = \frac{D}{D+1}$ et $q = \frac{1}{D+1}$ de se produire.

Alors que les termes de la loi binomiale sont obtenus en développant le binome :

$$(p+q)^n = q^n + n\,p\,q^{n-1} + \ldots + C_n^C\, p^C\, q^{n-C} + \ldots + p^n$$

où l'exposant n est positif, les termes de la distribution Pr (x si C) sont obtenus en développant l'expression :

$$\left[\frac{1-q}{p}\right]^{-C-1} = p^{C+1}\left[1 + (C+1)\,q + \ldots + C_{C+x}^{C}\, q^x + \ldots\right]$$

où l'exposant (-C - 1) est négatif, d'où son nom : Loi Binomiale Négative.

Mais les analogies entre la Loi Binomiale Négative et la Loi Binomiale usuelle ne se limitent pas à ces 2 premières remarques, nous avons démontré, en effet, [Formule (11)] :

$$S(A, C) = \Pr(x \leqslant A) = \sum_{k=C+1}^{k=A+C+1} C_{A+C+1}^{k} \frac{D^k}{(D+1)^{A+C+1}}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\text{Pr binomiale négative } (x \leqslant A) = \text{Pr binomiale } (k > C) \qquad (20)$$

(La loi binomiale Pr (k) correspond à n = A + C + 1 tirages entre 2 évènements de probabilités $p = \frac{D}{D+1}$ et $q = \frac{1}{D+1}$.)

Une consultation de tables de la loi Binomiale permet donc de déterminer rapidement des termes de la distribution binomiale négative et de sa fonction de répartition.

Formes de la Loi Binomiale Négative.

Si C = 0, la loi Pr (x si C) devient une loi géométrique :

$$\Pr(x \text{ si } C = 0) = \frac{D}{(D+1)^{x+1}}$$

Si C et D augmentent, alors que le rapport $\frac{C}{D}$ tend vers une limite μ, nous obtenons une loi de Poisson :

$$\Pr(x \text{ si } C) \# \frac{\mu^x\, e^{-\mu}}{x!}$$

(On retrouve donc, si la durée des observations augmente, la distribution poissonnienne exacte, de la consommation).

Ajustement à une loi normale.

La loi de répartition Binomiale Négative a plusieurs propriétés caractéristiques qui rendent l'ajustement à une loi Normale peu satisfaisant :

a) elle est dissymétrique,

b) la moyenne n'est pas égale à la médiane,

c) les valeurs éloignées de la moyenne, ont des probabilités de survenir beaucoup plus élevées qu'avec une loi Normale.

Par contre, la remarque (20) faite ci-dessus nous conduit à une estimation précise des termes de la répartition Binomiale Négative ; la distribution Binomiale usuelle est en effet approchée de façon très valable par une loi Normale.

Le paramètre de la loi Normale Réduite étant ici [cf. Formule (17)]:

$$t = \frac{C + 0,5 - D(A + 0,5)}{\sqrt{D(A + C + 1)}}$$

Un exemple numérique correspondant aux valeurs D = 1, C = 10, est traité par le tableau, ci-après.

Tableau 1

Approximation de la loi Binomiale négative
par une loi normale

(Calculs effectués dans le cas : D = 1, C = 10)

A Allocation	Pr (x ⩽ A) Répartition Binomiale Négative Moyenne 11 écart-type : 4,7	Pr (x ⩽ A) Répartition Normale Moyenne : 11 écart-type : 4,7	Pr (x ⩽ A) Approximation normale avec $t = \frac{C + 0,5 - D(A+0,5)}{\sqrt{D(A + C + 1)}}$
= 0	0,0005	0,0094	0,00135
1	0,0032	0,0170	0,0047
2	0,0113	0,0274	0,0132
3	0,0288	0,0446	0,0307
4	0,0593	0,0681	0,0606
5	0,1051	0,1003	0,1056
6	0,1662	0,1446	0,1660
7	0,2404	0,1977	0,2389
8	0,3239	0,2611	0,3228
9	0,4120	0,3372	0,4075
10	0,5000	0,4168	0,5000
11	0,5842	0,5000	0,5850
12	0,6613	0,5832	0,6620
13	0,7295	0,6628	0,7290
14	0,7879	0,7389	0,7881
15	0,8366	0,8023	0,8365
16	0,8762	0,8554	0,8749
17	0,9076	0,8997	0,9082
18	0,9320	0,9319	0,9319
19	0,9507	0,9554	0,9495
20	0,9647	0,9726	0,9633
21	0,9750	0,9830	0,9738
22	0,9825	0,9904	0,9817
23	0,9879	0,9929	0,9868
24	0,9917	0,9972	0,9909
25	0,9944	0,9986	0,9938
26	0,9962	0,9993	0,9957
27	0,9975	0,99966	0,9971
28	0,9983	0,99984	0,9980
29	0,9989	0,99993	0,99865
30	0,9993	0,999968	0,99910
31	0,99956	0,999988	0,99939
32	0,99973	0,999997	0,99960
33	0,99984	0,9999990	0,99971
34	0,99991	0,9999995	0,99982

ANNEXE

DEMONSTRATION DES FORMULES UTILISEES

1 - FORMULE DE BAYES -

Appelons M, C, x, les évènements :

M - la consommation moyenne exacte est comprise entre m et m + dm, où dm est une quantité infiniment petite.

C - la consommation observée est C.

x - la consommation obtenue sera égale à x (où x et C sont entiers).

Nous avons : $\Pr(M \text{ et } C) = \Pr(M)\Pr(C \text{ si } M)$

$$= \Pr(C)\Pr(M \text{ si } C)$$

et donc : $$\Pr(M \text{ si } C) = \frac{\Pr(M)\Pr(C \text{ si } M)}{\Pr(C)} \quad (1)$$

Si nous appelons : Pr (m et C), Pr(m), Pr(m si C), les densités de probabilités, nous obtenons :

$$\Pr(M \text{ et } C) = \Pr(m \text{ et } C)\, dm$$
$$\Pr(M) = \Pr(m)\, dm$$
$$\Pr(M \text{ si } C) = \Pr(m \text{ si } C)\, dm$$

nous avons, évidemment, Pr (C si M) = Pr (C si m) et nous obtenons :

$$\Pr(m \text{ si } C) = \frac{\Pr(m)\Pr(C \text{ si } m)}{\Pr(C)} \quad (2)$$

De même :

$$\Pr(C) = \sum \Pr(M).\ \Pr(C \text{ si } M) = \sum_{0}^{\infty} \Pr(m)\Pr(C \text{ si } m)\, dm$$

s'écrit, puisque dm est infiniment petit :

$$\Pr(C) = \int_{0}^{\infty} \Pr(m)\Pr(C \text{ si } m)\, dm$$

et nous obtenons :

$$\Pr(m \text{ si } C) = \frac{\Pr(m)\Pr(C \text{ si } m)}{\int_{0}^{\infty} \Pr(m)\Pr(C \text{ si } m)\, dm}$$

Enfin, si nous remarquons que :

$$\Pr(x \text{ si } C) = \sum \Pr(x \text{ si } M)\Pr(M \text{ si } C) = \int_{0}^{\infty} \Pr(x \text{ si } m)\Pr(m \text{ si } C)\, dm$$

nous obtenons :

$$\mathrm{Pr}\,(x \text{ si } C) = \frac{\int_0^{\infty} \mathrm{Pr}\,(x \text{ si } m)\,\mathrm{Pr}\,(m)\,\mathrm{Pr}\,(C \text{ si } m)\,dm}{\int_0^{\infty} \mathrm{Pr}\,(m)\,\mathrm{Pr}\,(C \text{ si } m)\,dm} \tag{4}$$

2 - APPLICATION DES FORMULES DE BAYES, AU CAS OU Pr(m) EST UNIFORME DANS UN INTERVALLE (m_1, m_2) -

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \mathrm{Pr}\,(m) &= \frac{1}{m_2 - m_1} \quad \text{si } m_1 < m < m_2 \\ \mathrm{Pr}\,(m) &= 0 \quad \text{si } m \leqslant m_1 \text{ ou } m \geqslant m_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Nous obtenons :

$$\mathrm{Pr}\,(m \text{ si } C) = \frac{\frac{1}{m_2 - m_1}\,\mathrm{Pr}\,(C \text{ si } m)}{\int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{m_2 - m_1}\,\mathrm{Pr}\,(C \text{ si } m)\,dm} = \frac{\mathrm{Pr}\,(C \text{ si } m)}{Z} \tag{6}$$

et de même :

$$\mathrm{Pr}\,(x \text{ si } C) = \frac{\int_{m_1}^{m_2} \mathrm{Pr}\,(x \text{ si } m)\,\mathrm{Pr}\,(C \text{ si } m)\,dm}{Z} \tag{7}$$

avec :

$$Z = \int_{m_1}^{m_2} \mathrm{Pr}\,(C \text{ si } m)\,dm \tag{8}$$

3 - HYPOTHESE POISSONIENNE -

Nous posons :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{Pr}\,(C \text{ si } m) &= e^{-Dm}\,\frac{(D^m)^c}{C\,!} \\ \mathrm{Pr}\,(x \text{ si } m) &= e^{-m}\,\frac{m^x}{x!} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

Il vient :

$$Z\,(D,\,C) = \int_{m_1}^{m_2} e^{-Dm}\,\frac{(Dm)^C}{C\,!}\,dm$$

soit en effectuant C fois l'intégration par parties :

$$Z(D,\ C) = \sum_{k=0}^{k=C} \left[-\frac{1}{D} e^{-Dm} \frac{(Dm)^k}{k!} \right]_{m_1}^{m_2} \tag{10}$$

qui nous conduit à un premier résultat :

$$\Pr(m \text{ si } C) = \frac{e^{-Dm}\ (Dm)^C}{Z\,.\,C!} \tag{11}$$

Evaluons maintenant :

$$\int_{m_1}^{m_2} \Pr(x \text{ si } m)\ \Pr(C \text{ si } m)\ dm = \int_{m_1}^{m_2} e^{-m}\ \frac{m^x}{x!}\ e^{-Dm}\ \frac{(Dm)^C}{C!}\ dm =$$

$$= \frac{(x+C)\,!}{x!\ C!}\ \frac{D^C}{(D+1)^{x+C}} \int_{m_1}^{m_2} e^{-(D+1)m}\ \frac{[(D+1)\ m]^{x+C}}{(x+C)!}\ dm$$

$$= \frac{(x+C)\,!}{x!\ C!}\ \frac{D^C}{(D+1)^{x+C}}\ Z(D+1,\ C+x)$$

Et l'équation (7) devient :

$$\boxed{\Pr(x \text{ si } C) = \frac{(C+x)\,!}{x!\ c!}\ \frac{D^C}{(D+1)^{C+x}}\ \frac{Z(D+1,\ C+x)}{Z(D,\ C)}} \tag{12}$$

Si Pr (m) est uniforme entre 0 et l'infini, nous faisons tendre $m_1 \longrightarrow 0$ et $m_2 \longrightarrow \infty$, nous obtenons :

$e^{-Dm_2}\ (D\ m_2)^k \longrightarrow 0$, quelque soit k ;

et $e^{-Dm_1}\ (D\ m_1)^k \longrightarrow 0$, sauf pour $k = 0$, où cette expression tend vers 1 .

Soit en définitive :

$$Z(D,\ C) = \frac{1}{D}$$

et nous déduisons :

$$\left\{ \begin{aligned} &\Pr(m \text{ si } C) = D\ e^{-Dm}\ \frac{(Dm)^C}{C!} \\ &\Pr(x \text{ si } C) = \frac{(C+x)!}{x!\ C!}\ \frac{D^{C+1}}{(D+1)^{C+x+1}} \end{aligned} \right. \tag{14}$$

4 - CARACTERISTIQUES DES DISTRIBUTIONS OBTENUES -

4.1 - <u>Paramètres caractéristiques de la loi Gamma Pr (m si C) - Formule</u> (14).

$$\overline{m} = \int_0^{\infty} m\ D\ e^{-Dm}\ \frac{(Dm)^C}{C!}\ dm = (C+1) \int_0^{\infty} e^{-Dm}\ \frac{(Dm)^{C+1}}{(C+1)!}\ dm$$

et, en remarquant que l'intégrale est égale à $Z(D,\ C+1)$:

$$\overline{m} = \frac{C+1}{D} \tag{15}$$

$$m_2 = \int_0^\infty m^2 D\, e^{-Dm} \frac{(Dm)^C}{C!} dm = \frac{(C+1)(C+2)}{D} \int_0^\infty e^{-Dm} \frac{(Dm)^{C+2}}{(C+2)!} dm$$

soit :

$$m_2 = \frac{(C+1)(C+2)}{D^2} \tag{16}$$

d'où :

$$\sigma_m = \sqrt{m_2 - \overline{m}^2} = \frac{\sqrt{C+1}}{D} \tag{17}$$

4.2 - <u>Paramètres caractéristiques de la loi Binomiale Négative Pr (x si C) - Formule</u> (14).

Nous démontrerons tout d'abord quelques formules, qui seront nécessaires dans la suite :

soit $f(u) = \frac{1}{1-u} = (1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^n + \ldots$

$f'(u) = (1-u)^{-2} = 1 + 2u + \ldots + n u^{n-1} + \ldots\ldots\ldots$

....

$f^{(i)}(u) = i\,!\,(1-u)^{-i-1} = i + \ldots + n(n-1)\ldots(n-i+1)u^{n-i} + \ldots$

nous obtenons :

$$\frac{1}{(1-u)^{i+1}} = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\, u^{n-i} \tag{18}$$

Soit $g(u, v) = uv$, il vient :

$g'(u, v) = u v' + u' v$

$g''(u, v) = u v'' + 2 u' v' + u'' v$

....

$g^{(i)}(u,v) = u\, v^{(i)} + \ldots + C_i^k\, u^{(k)}\, v^{(i-k)} + \ldots + u^{(i)}\, v$

et si $v = p^n$, $v^{(i-k)} = \frac{n!}{(n+k-i)!}\, p^{n+k-i}$

$u = \frac{1}{1-p}$, $u^{(k)} = k\,!\,(1-p)^{-k-1}$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \frac{p^n}{1-p} \\ g^{(i)}(u, v) &= \sum_{k=0}^{k=i} C_i^k \frac{k!\; n!}{(n+k-i)!} \frac{p^{n+k-i}}{(1-p)^{k+1}} \end{aligned} \tag{19}$$

Calculons maintenant la valeur moyenne de x :

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{\infty} x \,\Pr(x \text{ si } C) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(C+x)!}{(x-1)!\; C!} \frac{D^{C+1}}{(D+1)^{C+x+1}}$$

$$\bar{x} = \frac{(C+1)\,D^{C+1}}{(D+1)^{C+2}} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(C+x)\,!}{(x-1)\,!\;(C+1)\,!} \left[\frac{1}{D+1}\right]^{x-1}$$

Nous reconnaissons l'équation (18), avec $C + x = n$, $C + 1 = i$ et $u = \frac{1}{D+1}$, nous obtenons :

$$\bar{x} = \frac{(C+1)\,D^{C+1}}{(D+1)^{C+2}} \left[\frac{D+1}{D}\right]^{C+2} = \frac{C+1}{D} \tag{20}$$

De même, nous calculons :

$$x_2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x\,(x-1) + x)\ \Pr(x \text{ si } C) = \bar{x} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(C+x)!}{(x-2)!\;C!} \ \frac{D^{C+1}}{(D+1)^{C+x+1}}$$

$$x_2 = \bar{x} + \frac{(C+1)\ (C+2)\ D^{C+1}}{(D+1)^{C+3}} \left[\frac{D+1}{D}\right]^{C+3} = \frac{C+1}{D} + \frac{(C+1)\,(C+2)}{D^2} \tag{21}$$

et nous obtenons :

$$\sigma_x = \sqrt{x_2 - \bar{x}^2} = \frac{1}{D}\ \sqrt{(C+1)\ (D+1)} \tag{22}$$

5 - SURETE DE L'ALLOCATION : S(A) -

Nous calculerons la probabilité de rupture de stock :

$$1 - S(A) = \Pr(x > A) = \frac{1}{C\,!} \left[\frac{D}{D+1}\right]^{C+1} \sum_{x=A+1}^{\infty} \frac{(x+C)\,!}{x\,!\ (D+1)^x} \tag{24}$$

Posons $\frac{1}{D+1} = p$, nous voyons que l'expression sous le signe $\sum$ est la dérivée d'ordre C de p^{x+C}, or nous avons :

$$\sum_{x=A+1}^{\infty} p^{x+C} = p^{A+C+1} \cdot \frac{1}{1-p}$$

La dérivée d'ordre i de $\frac{p^n}{1-p}$ est donnée par la formule (19), nous obtenons, en posant $i = C$, $n = A + C + 1$:

$$1 - S(A) = \frac{1}{C\,!} \left[\frac{D}{D+1}\right]^{C+1} \sum_{k=0}^{k=C} C_c^k \ \frac{k\,!\ (A+C+1)\,!}{(A+k+1)\,!\ (D+1)^A\ D^{k+1}}$$

$$1 - S(A) = \sum_{k=0}^{k=C} \frac{(A+C+1)\,!}{(C-k)\,!\ (A+k+1)\,!} \left[\frac{D}{D+1}\right]^{A+C+1} \left[\frac{1}{D}\right]^{A+k+1}$$

et en posant $C - k = r$, il vient la loi Binomiale :

$$1 - S(A) = \sum_{r=0}^{r=C} C_{A+C+1}^{r} \ \frac{D^r}{(D+1)^{A+C+1}} \tag{25}$$

6 - NOMBRE MOYEN DE RUPTURES DE STOCK -

Le nombre moyen de ruptures de stock est :

$$E(A, C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} (x - A) \Pr(x \text{ si } C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} x \Pr(x \text{ si } C) - A(1 - S(A)) \quad (26)$$

Posons :

$$G = \sum_{x=A+1}^{\infty} x \Pr(x \text{ si } C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} \frac{(x+C)!}{(x-1)!\ C!} \left[\frac{D}{D+1}\right]^{C+1} \left[\frac{1}{D+1}\right]^{x}$$

avec la variable $t = x - 1$, il vient :

$$G = \sum_{t=A}^{\infty} \frac{(t+C+1)!}{t!\ (C+1)!} \left[\frac{1}{D+1}\right]^{t} \left[\frac{D}{D+1}\right]^{C+2} \frac{C+1}{D}$$

$$G = \frac{C+1}{D} (1 - S(A-1, C+1))$$

et nous obtenons :

$$E(A, C) = \frac{C+1}{D} (1 - S(A-1, C+1)) - A(1 - S(A, C)) \quad (27)$$

Or :

$$S(A-1, C+1) = \sum_{C+2}^{\infty} C^{k}_{A+C+1} \frac{D^{k}}{(D+1)^{A+C+1}}$$

$$= S(A, C) - C^{C+1}_{A+C+1} \frac{D^{C+1}}{(D+1)^{A+C+1}}$$

$$= S(A, C) - \frac{A+C+1}{C+1} \Pr(x = A \text{ si } C)$$

nous conduit à la relation :

$$E(A, C) = \left[\frac{C+1}{D} - A\right] \left[1 - S(A, C)\right] + \frac{A+C+1}{D} \Pr(x = A \text{ si } C) \quad (28)$$

Enfin, si nous remarquons que :

$$S(A+1, C) = S(A, C) + \Pr(x = A+1 \text{ si } C)$$

$$\Pr(x = A+1 \text{ si } C) = \Pr(x = A \text{ si } C) \frac{A+C+1}{A+1} \cdot \frac{1}{D+1}$$

nous obtenons :

$$E(A+1, C) = \left[\frac{C+1}{D} - A - 1\right]\left[1 - S(A, C)\right] + (A+1)\left(1 + \frac{1}{D}\right) \Pr(x = A+1 \text{ si } C)$$

$$= \left[\frac{C+1}{D} - A - 1\right]\left[1 - S(A, C)\right] + \frac{A+C+1}{D} \Pr(x = A \text{ si } C)$$

et nous arrivons à la relation de récurrence :

$$E(A, C) - E(A + 1, C) = 1 - S(A, C) \tag{29}$$

Notons que ce résultat est général, quelle que soit la loi de répartition étudiée :

$$E(A, C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} (x - A) \Pr (x \text{ si } C)$$

$$E(A+1, C) = \sum_{x=A+2}^{\infty} (x - A - 1) \Pr(x \text{ si } C) = \sum_{x=A+2}^{\infty} (x - A) \Pr(x \text{ si } C) - \sum_{x=A+2}^{\infty} \Pr(x \text{ si } C)$$

$$E(A, C) - E(A + 1, C) = (A + 1 - A) \Pr (x = A + 1 \text{ si } C) + \sum_{x=A+2}^{\infty} \Pr (x \text{ si } C)$$

$$E(A, C) - E(A+1, C) = \Pr (x = A+1 \text{ si } C) + \sum_{x=A+2}^{\infty} \Pr(x \text{ si } C) = \sum_{x=A+1}^{\infty} \Pr (x \text{ si } C)$$

$$E(A, C) - E(A + 1, C) = 1 - \sum_{x=0}^{A} \Pr (x \text{ si } C) = 1 - S(A, C)$$

S(A, C) étant une fonction non décroissante de A, E(A) - E(A + 1) sera une fonction non croissante, cela confirme la remarque faite au chapitre I : il n'y a qu'une seule allocation optima.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Probability and Statistics for Business Décisions.Robert Schlaifer - Mc Graw-Hill Book Company. (183, 221, 288, 670).

Remarque : Dans certains chapitres de cet ouvrage, la distribution Binomiale Négative est appelée Loi de Pascal.

[2] The advanced theory of statistics - Maurice G. Kendall and Alan Stuart - Charles Griffin - London - (129).