

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

GEORGES BERNARD

**Application de régressions logarithmo-hyperboliques aux fonctions de la demande. Calcul des élasticités-prix variables**

*Revue de statistique appliquée*, tome 12, n° 4 (1964), p. 103-121

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1964\\_\\_12\\_4\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1964__12_4_103_0)

© Société française de statistique, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# APPLICATION DE REGRÉSSIONS LOGARITHMO-HYPERBOLIQUES AUX FONCTIONS DE LA DEMANDE CALCUL DES ÉLASTICITÉS-PRIX VARIABLES

Georges BERNARD

C.N.R.S. PARIS

Dans certains cas d'ajustements statistiques, la régression par la méthode des moindres carrés, outre les objections théoriques connues, rencontre aussi des difficultés pratiques de solution des équations normales.

On les rencontre en économétrie lorsque, en vue de prévisions à moyen et long terme, on désire définir, et ajuster aux données statistiques, une fonction de demande à élasticité décroissante, ayant un sens aux limites de satiété et de pénurie et telle que le modèle obtenu soit propre à interpréter la réalité.

L'auteur, dans (1), a proposé une telle fonction. On en rappellera et développera l'exposé, avec des exemples nouveaux d'applications, dont les calculs ont été faits sur un ordinateur.

1 - Rappelons quelques données élémentaires -

Le prix  $p$  d'une ressource est le débit monétaire correspondant à une unité du débit physique  $q$  de la ressource. Le flux monétaire par unité de temps, ou la dépense des acheteurs de la ressource par unité de temps est égale à la recette des vendeurs (producteurs) et égale à :

$$E = p \cdot q \quad (1.1)$$

$p$  est donc, par définition, le prix moyen de la quantité (débit)  $q$  de la ressource.

$p$  et  $q$  sont des grandeurs essentiellement positives.

$p$  et  $q$  peuvent être des vecteurs de  $n$  ressources.  $E$  est alors leur produit scalaire.

Nous étudions la relation fonctionnelle  $p = f(q)$ .

On définit la recette marginale par :

$$p_r = \frac{dE}{dq} \quad (1.2)$$

On définit l'élasticité de la demande par rapport au prix par :

$$\lambda = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}} = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} \quad (1.3)$$

On a évidemment :

$$\lambda = \frac{p}{p_r - p}, \quad \text{car} \quad p_r = \frac{dE}{dq} = p + q \frac{dp}{dq} \quad (1.4)$$

On définit l'élasticité de la demande par rapport à la dépense (ou la recette) par :

$$\lambda' = \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dE}{E}} = \frac{dq}{dE} \cdot \frac{E}{q} = \frac{p}{p_r} \quad (1.5)$$

d'où :

$$\lambda = \frac{\lambda'}{1 - \lambda'} ; \quad \lambda' = \frac{\lambda}{1 + \lambda} ; \quad p_r = \frac{p}{\lambda'} = p \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad (1.6)$$

Puisque  $\frac{dp}{dq}$  est, à quelques rares exceptions près, non-positif, on a nécessairement  $p_r < p$  (voir 1.4).

Donc :

$$\lambda < 0 \quad \text{et} \quad |\lambda'| > 1 \quad (1.7)$$

Il est facile de déduire de ces expressions des résultats connus : par exemple, la concurrence parfaite correspond à  $p = p_r$ , puisque le prix est donné, donc égal à la recette marginale. Donc  $\lambda = -\infty$  et  $\lambda' = 1$  dans ce cas.

Nous admettons que pour les ressources que nous étudions il n'y a pas de minimum vital : pour un prix suffisamment élevé, la demande s'annule. Nous admettons aussi qu'on peut concevoir la satiété absolue de la ressource : le prix nul de la ressource, sa gratuité, correspond à une demande finie.

Il est facile de voir que pour le point de prix maximum  $p_m$  ou de demande nulle,  $\lambda = -\infty$ . La demande "à son origine" est parfaitement élastique et le prix de la demande nulle est égal à la recette marginale à l'origine. La fonction de la demande pour une entreprise en situation de concurrence parfaite correspond au point limite de la demande nulle ou de rareté absolue de la fonction de la demande globale. Ce résultat est assez plausible et séduisant. Au point de satiété totale ou de demande maximum (d'abondance parfaite)  $q = q_m$  on a  $\lambda = \lambda' = 0$ . La demande d'abondance totale est totalement inélastique.

2 - Ces hypothèses impliquent que la régression linéaire en coordonnées logarithmiques, des prix sur les quantités, est inacceptable. Une telle régression livre une fonction de demande d'élasticité constante :

$$\log q = a \log p + b + u \quad (2.1)$$

d'où :

$$\frac{dq}{q} = a \frac{dp}{p} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{dq}{q} : \frac{dp}{p} = a = \text{const.} \quad (2.2)$$

La régression linéaire en coordonnées arithmétiques livre bien une fonction d'élasticité décroissante (en valeur absolue), puisqu'on a dans ce cas :

$$q = ap + b \quad (2.3)$$

et :

$$dq = a dp ; \frac{dq}{q} = a \frac{dp}{q} = \frac{dp}{p} \cdot \frac{ap}{q}, \text{ donc } \lambda = \frac{ap}{q} = \frac{ap}{ap + b} \quad (2.4)$$

En général,  $a < 0$ . On a aux limites :

$$\begin{aligned} - \text{rareté absolue} & \quad q = 0 \quad p = -b/a \quad \lambda = -\infty \\ - \text{satiété} & \quad p = 0 \quad q = b \quad \lambda = 0 \end{aligned}$$

La recette marginale est :

$$p_r = \frac{dE}{dq} = p + q \frac{dp}{dq} = p + \frac{q}{a} = 2p + \frac{b}{a} = \frac{(2q - b)}{a} \quad (2.5)$$

Elle est linéairement décroissante avec  $q$ .

Le spectre complet de la demande est symétrique. La courbe de la recette est une parabole.

Il est immédiat qu'une telle fonction est, elle aussi, impropre à une interprétation économétrique correcte de la réalité.

Il n'y a d'abord aucune raison pour que les domaines de la demande élastique, d'élasticité en valeur absolue supérieure à l'unité, de recette marginale positive, et de la demande inélastique, d'abondance relative de la ressource, d'élasticité en valeur absolue inférieure à l'unité, la loi de King jouant, soient symétriques.

Au contraire, tout fait admettre que ces deux domaines ne le sont pas.

Par ailleurs, si le premier domaine, de la demande élastique pourrait à la rigueur être représenté par le modèle linéaire arithmétique, à recette marginale linéairement décroissante, le deuxième, de la demande inélastique, ne l'est certainement pas. En particulier la linéarité de la recette marginale devient irréaliste, car pour la demande parfaitement inélastique, elle est très probablement nulle.

Enfin, la relation linéaire entre le prix et les quantités vendues est un modèle trop rigide pour représenter les diverses situations réelles.

3 - Pour toutes ces raisons, et aussi pour d'autres, dont la principale est peut-être la commodité de l'utilisation des logarithmes, par exemple lorsque les calculs sont faits en différences premières relatives, nous avons cherché une autre fonction pour servir de modèle de la demande.

La fonction logarithmo-hyperbolique en est une, qu'il semble possible d'ajuster. Les exemples examinés, dans une précédente étude (1), leur vérification, présentée ci-après, et deux nouveaux cas sont des essais de tels ajustements.

-----  
(1) Recettes et dépenses des entreprises. Cahier du Séminaire d'Econométrie N° 6 CNRS.1962.

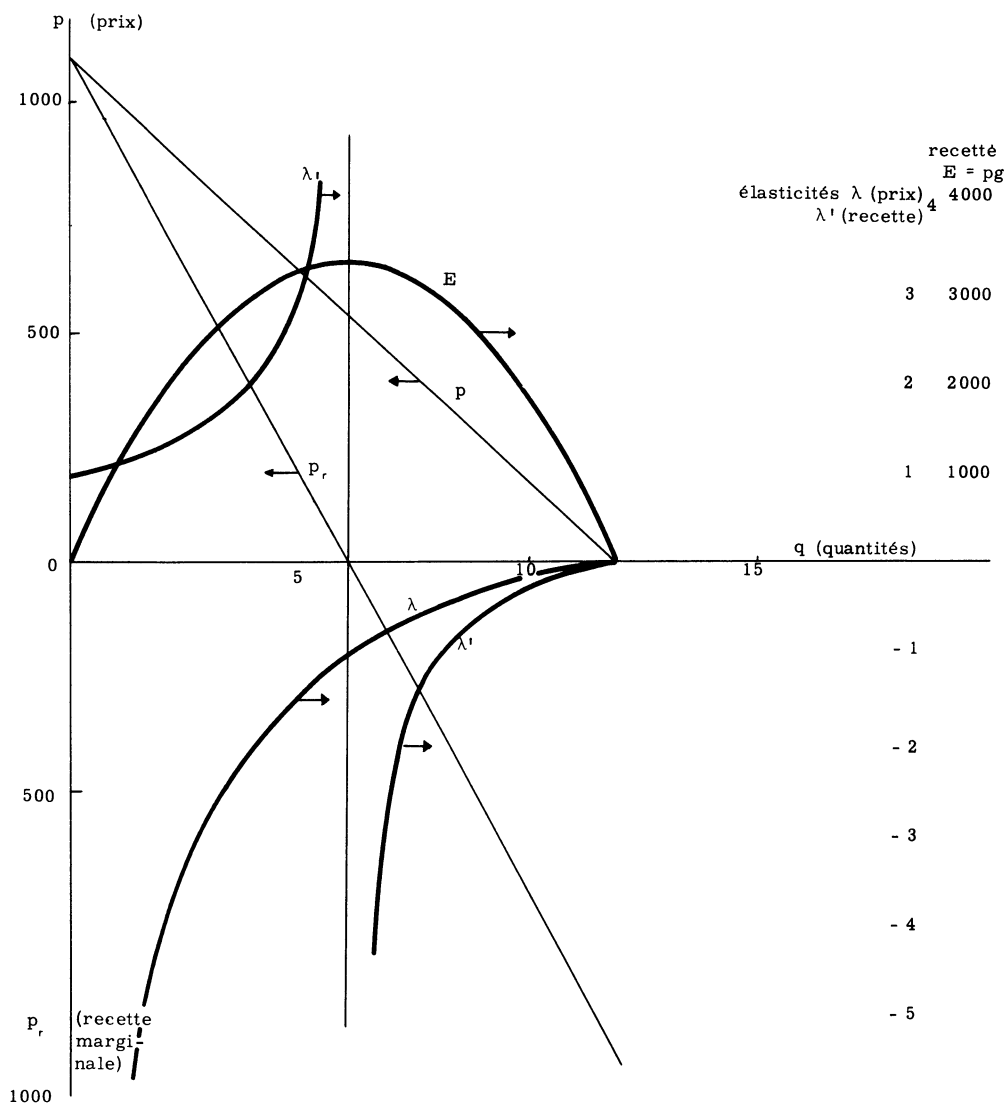


Fig. 1  
Fonction linéaire de la demande

Soient  $x_0$  et  $y_0$  les asymptotes d'une hyperbole équilatère :

$$(x_0 - x)(y_0 - y) = A = \text{Const.} \quad (3.1)$$

Posons :

$$\begin{aligned} x_0 &= \log q_{\max} && \text{(demande de prix nul)} \\ y_0 &= \log p_{\max} && \text{(prix de demande nulle)} \\ x &= \log q \\ y &= \log p \end{aligned}$$

On obtient des fonctions de demande plausibles dans les deux domaines de demande élastique et inélastique. On a en effet, en posant :

$$\begin{aligned} X &= x_0 - x && \text{et} && Y = y_0 - y \\ \lambda &= \frac{d \log q}{d \log p} = \frac{dx}{dy} = \frac{dX}{dY} = - \frac{X}{Y} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda' = \frac{X}{X - Y} \quad \text{et} \quad p = \frac{p_r}{\lambda'} = p \frac{X - Y}{X}$$

Pour :

$$\begin{aligned} p &= p_{\max} & q &= 0 & X &\longrightarrow -\infty & Y &= 0 & p_r &= p & \lambda' &= 1 & \lambda &= -\infty \\ q &= q_{\max} & p &= 0 & X &= 0 & Y &\longrightarrow -\infty & p_r &= p = 0 & \lambda' &= \lambda &= 0 \end{aligned}$$

et pour :

$$X = Y \quad \lambda = -1 \quad \lambda' \longrightarrow \pm \infty \quad p_r = 0.$$

La recette est maximum.

4 - L'ajustement par la méthode des moindres carrés, c'est-à-dire par la minimation de la variance de la variable aléatoire d'écart de cette fonction s'est avérée impraticable. On a utilisé la méthode d'ajustement par la minimation de la somme des aires d'écart. La solution et sa justification sont présentées dans [1]. On y a calculé à la machine de bureau l'ajustement des données de Stone sur la consommation du sucre et du cake, au Royaume Uni, entre 1920 et 1938.

Rappelons ici ces résultats :

Pour le sucre, les indices des quantités consommées par adulte équivalent (100 = 1938) ont augmenté assez régulièrement de 67 en 1920 à 100, ceux des prix réels ont décréu de 188,3 en 1920 à 100.

L'ajustement a livré les valeurs des asymptotes :

prix de la demande nulle : 668,3 (près de 7 fois le prix de 1938),

demande de satiété, de la gratuité du sucre : 243 (2,5 fois la consommation de 1938).

Résultat d'un intérêt peut-être plus immédiat, l'élasticité/prix, estimée par Stone, à la suite d'un ajustement linéaire des premières différences logarithmiques, par la méthode des moindres carrés, à une valeur unique de - 0,44, a été trouvée, par la méthode proposée, décroître en valeur absolue de - 1 en 1920 à - 0,46 en 1938.

C'est ce résultat d'estimation d'une variation, très plausible, de l'élasticité/prix, décroissante avec l'accroissement de la disponibilité de la ressource et de sa consommation, qui est, à notre avis, le mérite principal de la méthode proposée.

Son application aux données sur le cake, produit plus rare et plus cher, de consommation plus restreinte, a livré les estimations suivantes :

- l'indice des prix décroissant de 135,9 en 1920 à 100 (en 1938), le prix de la demande nulle est 209.

- l'indice de consommation croissant de 58,3 en 1920 à 100, la demande de satiété est 350,8.

L'élasticité prix décroît en valeur absolue de - 3,8 en 1920 à - 1,9 en 1938. Stone a donné une estimation d'une seule valeur de l'élasticité, - 0,74.

Il semble que les résultats obtenus par la méthode proposée, plaçant le cake dans la catégorie de biens élastiques, contrairement au sucre, bien inélastique, sont plus près de la réalité économique que les résultats d'ajustements qui ne livrent qu'une seule valeur de l'élasticité/prix.

5 - Dans le but de vérifier le bien fondé de la méthode proposée et aussi de mettre au point un programme de calcul sur ordinateur, le Centre National de Calcul Electronique de la Compagnie des Machines Bull a bien voulu prêter son aide à l'auteur. Le travail a été effectué par M. Bernard Combes, qui a rédigé un rapport sur les résultats obtenus, rapport dont est extraite une partie des paragraphes ci-après.

6 - Le problème posé consiste à résoudre trois équations à 3 inconnues. Ce sont les équations normales de la régression. Si l'on note les inconnues :

$$\begin{aligned} x_0 &= \log q_{\max} = Z_1 \\ y_0 &= \log q_{\max} = Z_2 \\ A &= (x_0 - x) (y_0 - y) = Z_3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

On a les trois équations normales :

$$F_1 = \sum (Z_1 - x_i) - Z_3^2 \sum \frac{1}{(Z_1 - x_i) (Z_2 - y_i)^2} = 0 \quad (6.2)$$

$$F_2 = \sum (Z_2 - y_i) - Z_3 \sum \frac{1}{(Z_1 - x_i)^2 (Z_2 - y_i)} = 0 \quad (6.3)$$

$$F_3 = Z_3 \sum \frac{1}{(Z_1 - x_i) (Z_2 - y_i)} - N = 0 \quad (6.4)$$

où N est le nombre des points  $(x_i, y_i)$  du nuage statistique.

Le degré de ces équations est élevé. Si l'on élimine  $Z_3$  de  $F_1$  et de  $F_2$  par  $F_3$ , on obtient :

$$F_1' = \left[ \sum (Z_1 - x_i) \right] \left[ \sum \frac{1}{(Z_1 - x_i)(Z_2 - x_i)} \right]^2 - N^2 \sum \frac{1}{(Z_1 - x_i)(Z_2 - y_i)^2} = 0 \quad (6.5)$$

$$F_2' = \left[ \sum (Z_2 - y_i) \right] \left[ \sum \frac{1}{(Z_1 - x_i)(Z_2 - y_i)} \right]^2 - N^2 \sum \frac{1}{(Z_1 - x_i)^2 (Z_2 - y_i)} = 0 \quad (6.6)$$

On voit que le degré de ces deux équations est  $4N - 3$  en  $Z_1$  et  $Z_2$  et que leur solution comporte  $(4N - 3)^2$  racines, réelles ou imaginaires.

Le problème à résoudre est de la même nature que celui, très à l'ordre du jour actuellement, de programmes non-linéaires. Dans ce dernier cas on se trouve en présence d'un grand nombre d'égalités ou d'inégalités, dont un petit nombre, en général, n'est pas linéaire. Dans notre problème, par contre, le nombre d'équations est faible, mais leur degré est élevé. Dans les deux cas, seules les solutions par calcul d'interpolations, itératifs, sont possibles. Ce sont des cheminements dans les espaces représentatifs des équations. Ils sont particulièrement difficiles dans le cas étudié ici, du fait en particulier de la possibilité du rejet à l'infini d'un grand nombre de racines. La convergence du processus de cheminement (d'itération) et la vitesse de cette convergence importent au premier chef. Si elle est trop faible, même des machines puissantes prennent trop de temps pour effectuer les opérations. La difficulté essentielle est que rien ne peut être affirmé quant à la concavité ou convexité des fonctions, dans le cas étudié ici.

Dans le stade de travail dont il est rendu compte ici, la méthode du gradient, outre la méthode classique de Newton, ont été appliquées, avec quelques essais d'accélération de la convergence par des sauts intuitifs. Les résultats, dans les cas de divergence ou de convergence trop lente n'ont pas été satisfaisants. Des méthodes d'accélération plus efficaces [3] comme celle de la sous-relaxation et de la diagonale, devront être utilisées dans les travaux futurs.

Les nuages statistiques utilisés étaient au nombre de 5. Les deux premiers étaient ceux-là mêmes qui ont été traités dans [1], ceux de la consommation du sucre et du cake en Grande-Bretagne. Les tableaux 1 et 2 de [1] rappellent ces données. Le troisième nuage concerne les données sur la consommation des bananes en France entre 1926 et 1961. Le quatrième exemple est relatif à la consommation du gaz dans 143 villes de France. C'est un exemple assez rare de section simultanée ou coupe instantanée (1) (en 1954) de la consommation. Telles quelles, ces données ont été utilisées dans un essai d'ajustement. L'ordinateur a eu des difficultés pour digérer le problème. On a donc réduit le nuage initial, par une recherche empirique des centres de gravité des sous-nuages, au nombre de 19. Ces données figurent dans le tableau n° 1 ci-après. Société d'Economie et de Mathématique Appliquées avec l'autorisation de ses clients.

-----

(1) En anglais "cross section".



Consolidation des données sur le gaz de France en 1954  
 Les 143 points d'origine ont été abrégé en 19, d'une manière  
 arbitrairement plausible. Voici ces 19 points, (désignés  
 par des lettres de l'alphabet).

Lettre	x (Prix)	y (Consommation)
a	64	263
b	67	209
c	77,5	177
d	74,5	150
e	74,3	128
f	93	129,4
g	100,7	121,8
h	92,8	106
i	89,8	85,3
j	101	81,1
k	104,7	89,3
l	100,4	96,2
m	101,3	107,8
n	105,5	101
o	113	90,4
p	110,5	81,4
q	108	72
r	114	72,3
s	119	59,7

Note :

1/ Les données sur les bananes ont été aimablement communiquées par la Société d'Economie et de Mathématiques Appliquées (SEMA).

L'auteur remercie Monsieur Salomon, Directeur d'Etudes à la SEMA, grâce à qui l'utilisation de ces chiffres a été possible.

2/ Les données du gaz ont été fournies de la même manière par la SEMA, grâce à l'autorisation du Gaz de France. Elles sont relatives à l'année 1954 et concernent un échantillon de 143 exploitations desservies par le Gaz de France. Cet échantillon, qui groupe un peu plus du quart du nombre des exploitations, comprend les plus importantes d'entre elles et représente de ce fait les 3/4 des abonnés et des ventes.

La consommation unitaire de gaz à usage domestique est caractérisée par la consommation moyenne par personne desservie. Le prix retenu est le prix moyen (taxes comprises) de l'ensemble des usages domestiques. Consommation et prix sont exprimés en indice de base 100 = moyenne arithmétique de l'échantillon.

L'auteur remercie particulièrement M. Nahon, Directeur d'Etudes et Mlle Morice, Statisticienne à la SEMA, pour leur aide amicale et efficace. Ils ont bien voulu lire son travail et, bien qu'ils n'aient pu être d'accord avec toutes les opinions contenues, leurs remarques ont été très précieuses, l'auteur gardant évidemment seul l'entière responsabilité de ces opinions.

Les études de M. Nahon et de Mlle Morice sur l'industrie du gaz n'ont pas été publiées, mais seulement exposées en partie dans des séminaires. Il est donc impossible d'en donner des références précises.

7 - Solutions du système d'équations normales -

Les abscisses et ordonnées des asymptotes des hyperboles d'ajustement satisfont évidemment aux conditions :

$$\begin{aligned} Z_1 &> x_i \quad \forall i \in N \\ Z_2 &> y_i \quad \forall i \in N \end{aligned} \tag{7.1}$$

A - Méthode de Newton.

On se donne deux valeurs  $Z_{1,0}$ ,  $Z_{2,0}$  satisfaisant aux conditions (7.1). En pratique, on porte le nuage statistique sur un papier log-log et on fixe intuitivement les asymptotes  $Z_{1,0}$ ,  $Z_{2,0}$ . La valeur de la constante  $Z_{3,0} = A$  est ensuite calculée par l'équation  $F_3 = 0$  (7.4).

La méthode de Newton consiste à calculer les 3 valeurs  $Z_{i,j+1}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) à partir des 3 valeurs  $Z_{i,j}$  en résolvant les systèmes d'équations linéaires : (où  $j$  est le numéro d'ordre de l'itération).

$$F_x \begin{pmatrix} Z_{1,j+1} - Z_{1,j} \\ Z_{2,j+1} - Z_{2,j} \\ Z_{3,j+1} - Z_{3,j} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

où  $F$  est le jacobien:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Z_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_2} & \frac{\partial F_1}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Z_1} & \frac{\partial F_2}{\partial Z_2} & \frac{\partial F_2}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial Z_1} & \frac{\partial F_3}{\partial Z_2} & \frac{\partial F_3}{\partial Z_3} \end{bmatrix}$$

B - Méthode du gradient.

Cette méthode consiste à assimiler la surface d'équation :

$$G = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0$$

à une surface du second degré au voisinage de la solution, qui correspond à un minimum de  $G$ .

A partir du point  $M_i$ , de coordonnées :

$$Z_{1,i}, \quad Z_{2,i}, \quad Z_{3,i},$$

extrémité d'un vecteur issu de l'origine ( $Z_i$ ), le point suivant  $M_{i+1}$  est obtenu par une translation de  $M_i$  égale à  $\mu_i V_i$  :

$$\vec{Z}_{i+1} = \vec{Z}_i + \mu_i \vec{V}_i$$

telle que :

$$G(Z_{i+1}) = \text{minimum}$$

On démontre que le scalaire  $\mu_i$  est égal à :

$$\mu_i = \frac{G'(Z_k)}{G''(Z_i)}$$

avec :

$$G'(Z_i) = \left( \frac{\partial G}{\partial Z_1} + \frac{\partial G}{\partial Z_2} + \frac{\partial G}{\partial Z_3} \right)$$

et :

$$G'' = \left[ \varphi_{jk} \right] = \left[ \frac{\partial^2 G}{\partial Z_j \partial Z_k} \right]$$

Les deux variantes de la méthode du gradient utilisées diffèrent dans le choix de la direction  $V_i$

$$V_i = - G'(Z_i)$$

dans la méthode de la plus grande pente,

$$V_i = e_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

dans la méthode de relaxation, où  $e_r$  est le vecteur unité des coordonnées.

## 8 - RESULTATS -

Au moment de la rédaction de cette note, nous disposons des "états-imprimante" c'est-à-dire des résultats de calculs pour les cas suivants :

<u>N°</u>	<u>Produit</u>	<u>Méthode</u>
1	Sucre	Gradient, plus grande pente
2	cake	Newton
3	cake	Gradient, plus grande pente
4	banane	" " " "
5	"	" , relaxation
6	gaz	141 points, gradient, relaxation
7	"	19 " , " "

Cas n° 1 - Sucre, méthode de gradient, plus grande pente.

Le calcul de la machine de bureau, exposé dans [1] a conduit à adopter les valeurs suivantes des inconnues :

$$Z_1 = x^0 = 2,3855$$

$$Z_2 = y^0 = 2,8250$$

$$Z_3 = A = 0,321158$$

Afin de vérifier les convergences, caractérisée par la décroissance des valeurs absolues de  $F_1, F_2, F_3$  et de la somme des carrés, on a fait plusieurs essais avec des valeurs initiales éloignées de ces solutions, à priori bonnes. Dans tous ces essais on a obtenu une convergence ex-

trémement lente par la méthode utilisée. Le tableau 2 rend compte de ces résultats. Les valeurs suivantes des inconnues peuvent en être déduites (par interpolation, portant simultanément sur  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$ , entre les essais 2 et 5):

$$\begin{aligned} Z_1 &= x^o = 2,3873 & q_{\max} &= 243,95 \\ Z_2 &= y^o = 2,8258 & p_{\max} &= 669,6 \\ Z_3 &= A = 0,3228 \end{aligned}$$

Ces valeurs sont très voisines de celles obtenues à la main, dans [1]. Les élasticités et les figures 1 et 2 de [1] restent valables.

Tableau 2  
Sucre (Cas n° 1)  
Méthode du gradient, plus grande pente

		Numéro de l'essai					Observation
		1	2	3	4	5	
$Z_1$	$V_i$	2,0791	2,4770	2,1760	2,3979	2,3891	$V_i$ = Valeur initiale $V_f$ = Valeur finale
	$V_f$	2,0618	2,4742	2,1735	2,3977	2,3890	
$Z_2$	$V_i$	2,3221	2,8450	2,4770	2,8195	2,8260	$Z_3 = A =$ constante de l'hyperbole
	$V_f$	2,3334	2,8486	2,4801	2,8198	2,8263	
$Z_3$	$V_i$	0,0255	0,3970	0,0854	0,3273	0,3242	
	$V_f$	0,0239	0,3968	0,0853	0,3273	0,3242	
$F_1$	$V_i$	- 0,7910	- 0,0384	- 0,0855	- 0,0108	- 0,0037	
	$V_f$	- 0,2936	- 0,0358	- 0,0677	- 0,0087	- 0,0023	
$F_2$	$V_i$	+ 0,4042	+ 0,0440	+ 0,0679	+ 0,0095	- 0,0004	
	$V_f$	+ 0,0709	+ 0,0409	+ 0,0613	0,0121	+ 0,0010	
$F_3$	$V_i$	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,0000	
	$V_f$	- 0,0625	+ 0,0001	- 0,0105	0,0020	- 0,0012	
$\Sigma a$	$V_i$	0,0343	0,0070	0,0104	0,0054	0,0053	$\Sigma a$ = somme des aires d'écartes
	$V_f$	0,0242	0,0068	0,0100	0,0054	0,0053	
		20	50	43	39	40	$n$ = nombre d'itérations

Cas n° 2 et 3 . Cake, méthode de Newton et de gradient (plus grande pente).

Le calcul à la machine de bureau, exposé dans [1], a conduit à adopter les valeurs suivantes des inconnues :

$$\begin{aligned} Z_1 &= x_o = 2,5450 \\ Z_2 &= y_o = 2,3200 \\ Z_3 &= A = 0,159027 \end{aligned}$$

Le tableau 3 donne les résultats du calcul par programme sur ordinateur. On remarquera que la convergence par la méthode de Newton est dans ce cas fort satisfaisante.

En 15 itérations, on est arrivé aux valeurs :

$$\begin{aligned} x_o &= 2,5521 \\ y_o &= 2,3194, \end{aligned}$$

très voisines des valeurs obtenues à la main.

Par contre, le calcul montre une convergence aussi lente que dans le cas précédent pour la méthode du gradient. On constate que, que l'on soit loin de la solution (essais n° 1 et 2) ou plus près de celle-ci (essais n° 3 et 4) la convergence est aussi lente.

Tableau 3

Cake (Cas n° 2 et 3)

Méthodes de Newton et du gradient (plus grande pente)

		Newton	Méthode du gradient - numéro de l'essai			
			C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>4</sub>
Z <sub>1</sub>	V <sub>i</sub>	2,3855	2,0413	2,0791	2,4771	2,5185
	V <sub>f</sub>	2,5521	2,0445	2,0798	2,4779	2,5186
Z <sub>2</sub>	V <sub>i</sub>	2,8250	2,1760	2,1760	2,3979	2,3617
	V <sub>f</sub>	2,3194	2,1765	2,1756	2,3973	2,3616
Z <sub>3</sub>	V <sub>i</sub>	0,3000	0,012	0,0166	0,1872	0,1786
	V <sub>f</sub>	0,1076	0,0116	0,0166	0,1872	0,1783
F <sub>1</sub>	V <sub>i</sub>	- 3,0721	+ 0,4860	0,2231	0,0774	0,0456
	V <sub>f</sub>	- 0,0032	+ 0,4786	0,2189	0,0765	0,0452
F <sub>2</sub>	V <sub>i</sub>	- 4,3898	- 0,5546	- 0,8875	- 0,0426	- 0,0204
	V <sub>f</sub>	- 0,0012	- 0,5399	- 0,1794	- 0,0424	- 0,0205
F <sub>3</sub>	V <sub>i</sub>	+ 3,3134	- 0,0000	- 0,0000	0,0000	0,0000
	V <sub>f</sub>	+ 0,0012	- 0,0018	- 0,0018	0,0003	0,0002
Σ a	V <sub>i</sub>	0,2987	0,0378	0,0253	0,0224	0,0188
	V <sub>f</sub>	0,0176	0,0372	0,0250	0,0223	0,0188
n		15	20	26	39	21

Cas n° 4 et 5 - Bananes, méthode du gradient, variantes : plus grande pente et relaxation.

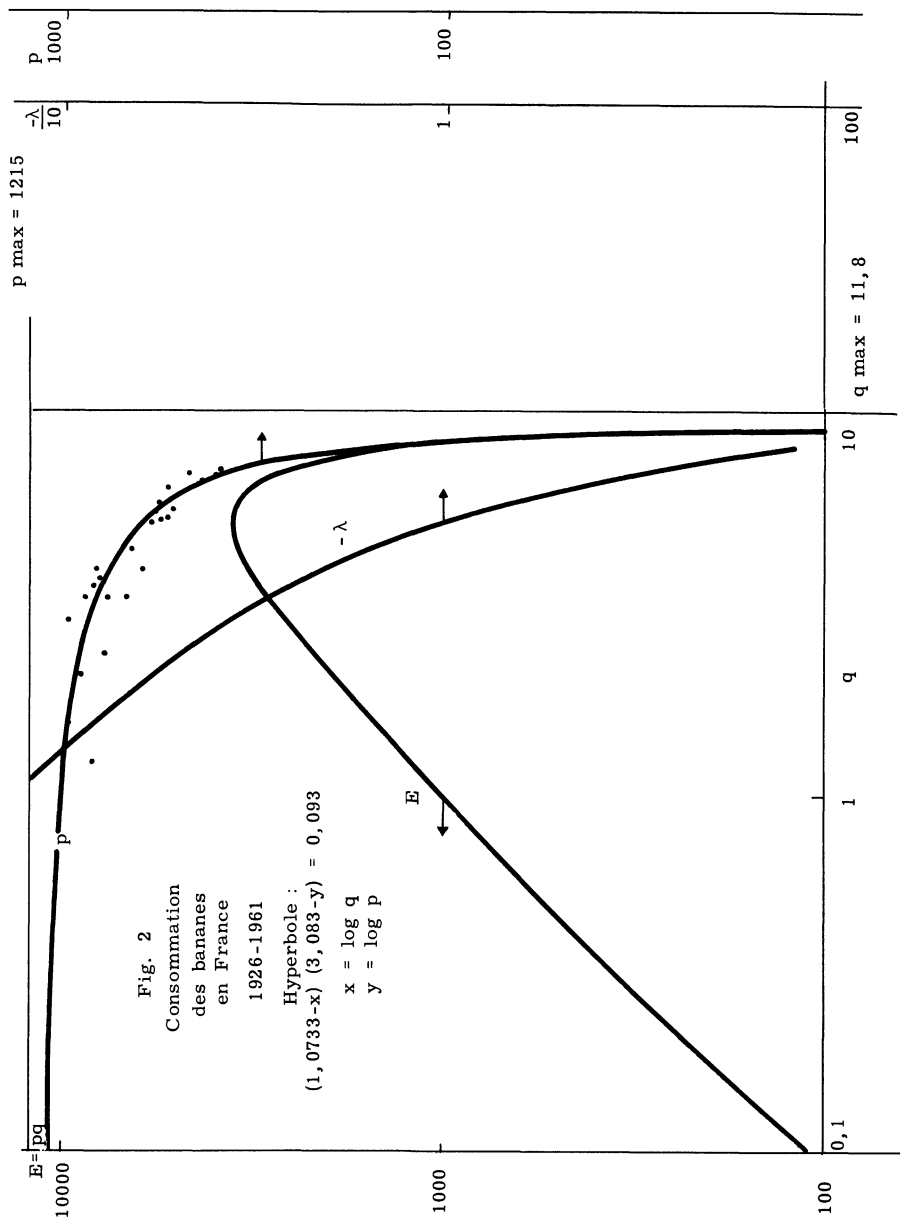
Sur ce cas, on rencontre la première divergence, essai n° 1, tableau 4. Tous les autres essais convergent, mais très lentement. En adoptant les valeurs résultant des essais B<sup>7</sup> ou BR<sup>4</sup>, on est largement près de la solution. BR<sup>4</sup> semble être la meilleure valeur. Les convergences, bien que lentes, donnent des indications cohérentes sur le sens des sauts (ou diagonalisation) à effectuer. Les figures 2 et 3 montrent les fonctions de la demande obtenues, pour :

$$x_0 = 1,0733$$

$$y_0 = 3,0830$$

$$A = 0,093,$$

correspondant à une consommation de prix nul de 11,84 Kg/habitant/an, soit environ 1,5 fois celle de 1961 et un prix de demande nulle de 1211 AF/Kg, soit environ 3,2 fois le prix de 1961.



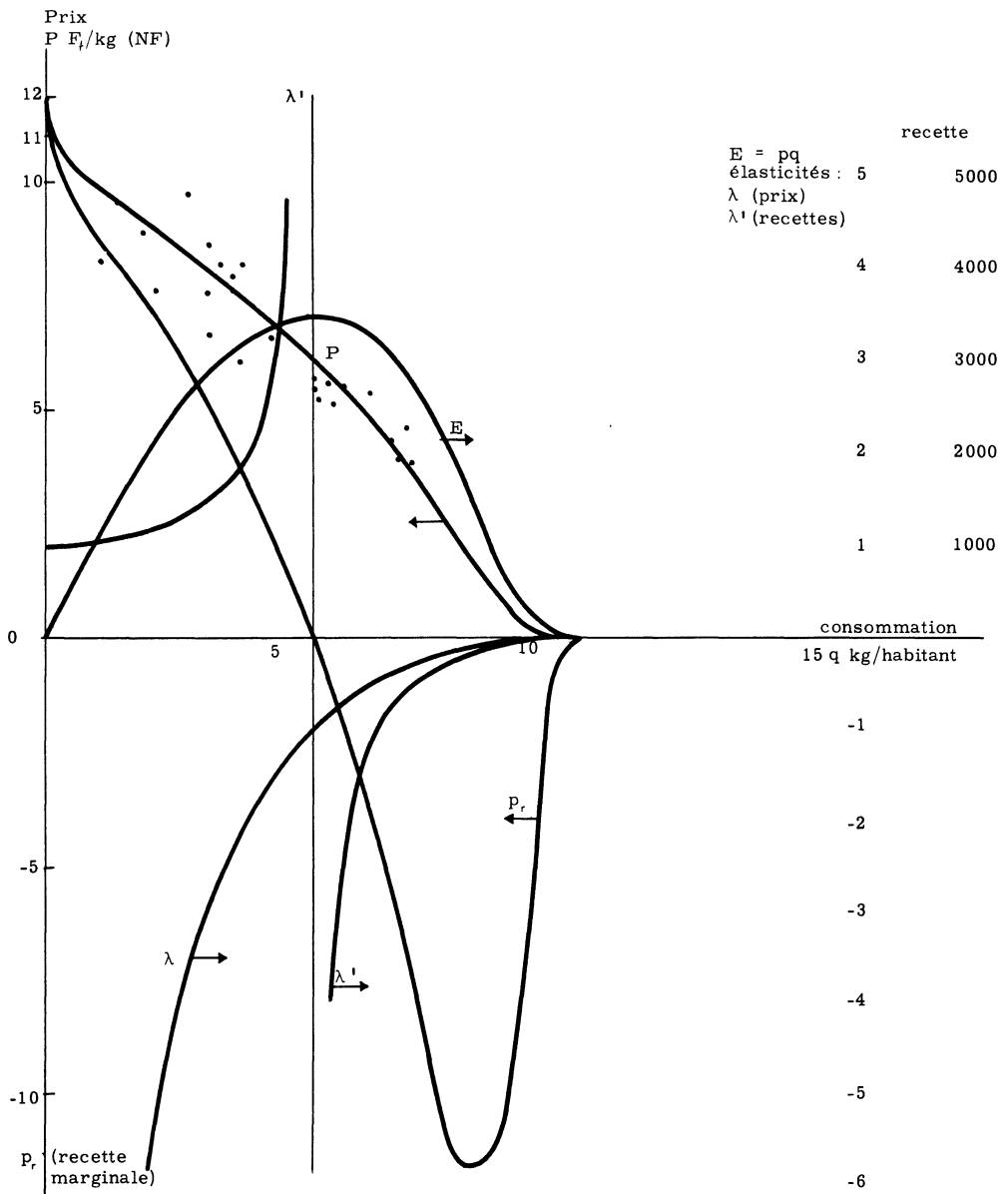


Fig. 3  
Consommation des bananes  
en France  
1926-1961

L'élasticité prix aurait, d'après ce calcul, dépassé légèrement - 10 en 1926 et serait devenue, en 1961 que - 0,3 environ. Dans cette période la banane serait donc devenue, en France, à partir d'un produit de grand luxe, un fruit de très grande diffusion, bon marché, et dont la consommation a cessé d'être élastique au prix. Si l'on analyse la situation plus en détail, on peut remarquer qu'en 1938, à la veille de la guerre, la situation a déjà largement évolué. L'élasticité/prix a décru jusqu'à environ - 2,5 à - 2, valeurs habituelles pour les fruits de table ; une très large marge de développement du marché subsistait à cette époque.

Vers 1951-53 on atteint la situation du maximum de recette (de chiffre d'affaires) ; l'élasticité/prix est voisine de l'unité.

On peut aussi remarquer que dans le cas de la banane, les données disponibles s'étalent beaucoup plus largement dans la plage possible des consommations et des prix. Les extrapolations, en particulier celles du prix de la demande nulle et celle de la demande de prix nul sont, donc en principe, moins hasardeuses.

#### Cas n° 6 et 7. Gaz. Méthode du gradient, variante relaxation.

Ces deux cas sont relatifs à la consommation du gaz dans différentes villes françaises. Les prix du gaz étaient fort variables dans ces villes, en 1954, année de la statistique utilisée.

Le traitement à partir de l'énumération des données de 143 villes n'a pas donné de résultats exploitables. La convergence très lente a fait que l'on n'a pu arriver, dans le temps disponible, au voisinage du minimum d'aires d'écart.

Les passages successifs ont livré, pour la valeur de la somme de ces aires, 0,7071 ; 0,6544 ; 0,5170 ; 0,489 ; 0,3565 ; 0,384 ; 0,3635 ; 0,4682 ; 0,3618 sans que, dans chaque itération, les valeurs de  $x$  et  $y$  varient sensiblement. Les valeurs correspondant au minimum étaient :

$$x_0 = 2,7782$$

$$y_0 = 2,3975$$

$$A = 0,3106$$

On a donc repris la même méthode avec les données du tableau 1, réduction des 143 points initiaux en 19 centres de gravité des sous-nuages.

La somme de ces aires obtenues ont été :

$$0,055 ; 0,0546 ; 0,063 ; 0,0546 ; 0,0532$$

Ici encore les itérations convergent avec une lenteur telle que l'on ne peut rien affirmer quant à leur sens.

Il serait nécessaire d'essayer, pour ce cas, des méthodes d'accélération des convergences. Peut être la diagonalisation réussirait à l'obtenir.

Faute de mieux, on a admis pour l'interprétation économétrique provisoire le résultat de la dernière itération donnant :

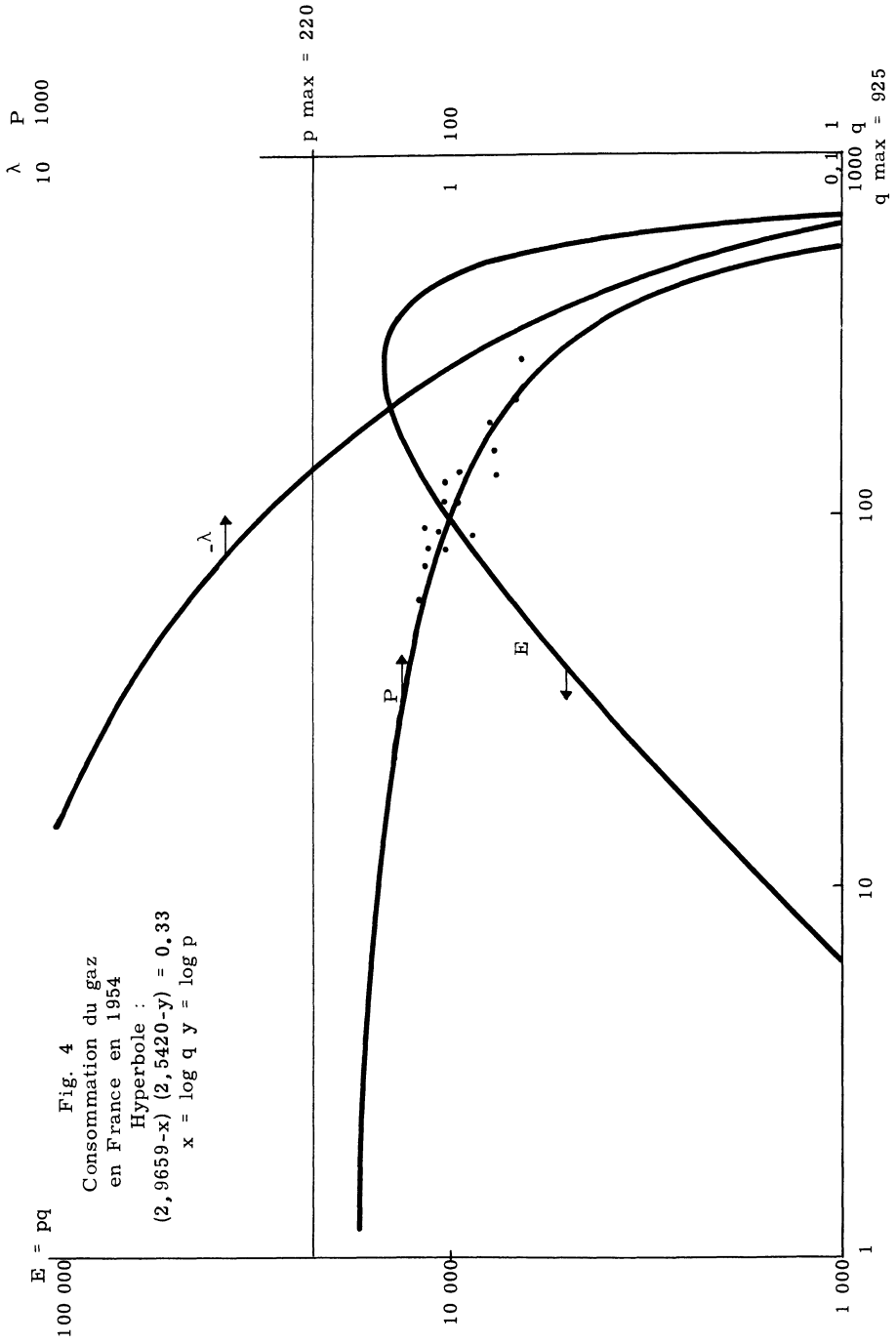
$$x_0 = 2,9659 \quad q_{\max} = 924,5 \text{ (consommation de prix nul)}$$

$$y_0 = 2,3420 \quad p_{\max} = 219,8 \text{ (prix de la consommation nulle)}$$

$$A = 0,3301$$

Les figures 4 et 5 présentent ce résultat.





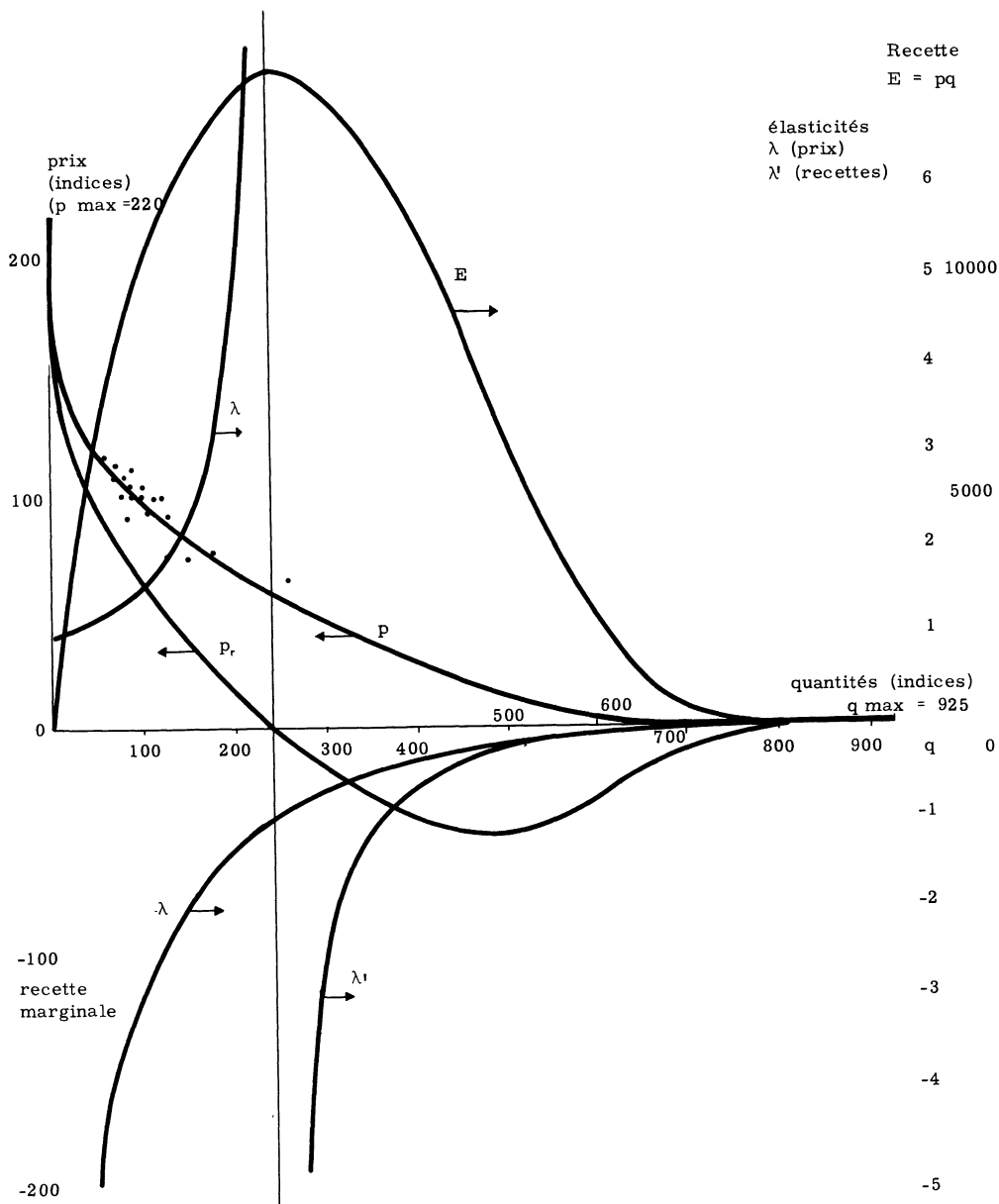


Fig. 5  
 Consommation de gaz  
 en France  
 en 1954

Tableau 4

Bananes (Cas n° 4 et 5)

Méthode du gradient (plus grande pente)

		Numéro de l'essai										
		B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>	B <sub>4</sub>	B <sub>5</sub>	B <sub>6</sub>	B <sub>7</sub>	BR <sub>1</sub>	BR <sub>2</sub>	BR <sub>3</sub>	BR <sub>4</sub>
Z <sub>1</sub>	V <sub>i</sub>	0,9030	1,0000	1,0413	1,0791	1,0755	1,0681	1,0755	1,0755	1,0755	1,0718	1,0726
	V <sub>f</sub>	0,9017	1,0230	1,0722	1,0761	0,1732	1,0695	1,0733	1,0761	1,0762	1,0727	1,0734
Z <sub>2</sub>	V <sub>i</sub>	3,0000	3,1760	3,1139	3,0791	3,0802	3,0827	3,0802	3,0802	3,0813	3,0824	3,0827
	V <sub>f</sub>	2,9886	3,1291	3,0873	3,0810	3,0818	3,0822	3,0846	3,0811	3,0820	3,0827	3,0830
Z <sub>3</sub>	V <sub>i</sub>	0,0080	0,0980	0,0952	0,0926	0,0921	0,0912	0,0921	0,0921	0,0926	0,0921	0,0924
	V <sub>f</sub>	0,0083	0,0947	0,0942	0,0924	0,0920	0,0911	0,0932	0,0923	0,0928	0,0921	0,0925
F <sub>1</sub>	V <sub>i</sub>	4,2808	2,0894	0,9502	-0,3531	-0,2652	-0,0807	-0,2652	-0,2652	-0,2310	-0,1451	-0,1449
	V <sub>f</sub>	-928,7658	1,4582	0,0404	-0,2046	-0,1349	-0,0675	-0,0389	-0,1480	-0,1276	-0,0745	-0,0746
F <sub>2</sub>	V <sub>i</sub>	-59,2936	-2,9308	-0,9264	-0,0244	-0,0240	-0,1324	-0,0240	-0,0240	-0,0396	-0,0901	-0,0882
	V <sub>f</sub>	-1274,6278	-1,4938	-0,1329	-0,0027	-0,0399	-0,0798	-0,0673	+0,0328	+0,0152	-0,0376	-0,0362
F <sub>3</sub>	V <sub>i</sub>	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	V <sub>f</sub>	-1,9615	-0,0579	-0,0493	-0,0495	-0,0529	-0,0561	-0,0717	-0,1135	-0,1046	-0,0859	-0,0853
Σ <sup>a</sup>	V <sub>i</sub>	0,5264	0,3219	0,1487	0,1203	0,1199	0,1201	0,1199	0,1199	0,1197	0,1197	0,1196
	V <sub>f</sub>	0,4208	0,1914	0,1193	0,1197	0,1197	0,1200	0,1193	0,1197	0,1195	0,1196	0,1195
n		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

Il apparaît que le marché du gaz de France, en 1954, était encore entièrement "élastique", au sens classique de ce terme. L'élasticité/prix, dans les villes où il était le plus cher, Arles et Commercy (indice 120) était de - 5, tandis qu'à Arras, où le gaz était vendu environ 50 % moins cher, cette élasticité était voisine de l'unité.

Les figures 4 et 5 permettraient, dans chaque cas particulier et si l'on admet ces résultats, d'estimer la variation de la consommation pour une variation donnée des tarifs, d'une manière peut être plus fine que par les méthodes en usage, fondées sur l'estimation d'une élasticité constante unique.

Mais il y aurait surtout lieu de pousser l'étude des méthodes mathématiques d'estimation, pour améliorer celles-ci. La voie proposée semble utile et à suivre ; mais les résultats jusqu'ici atteints ne peuvent pas satisfaire.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BERNARD - Recettes et dépenses des entreprises, Cahiers du Séminaire d'Econométrie CNRS N° 6 - 1962 (et bibliographie indiquée)
- [2] P. HUARD - Résolution des programmes mathématiques à fonction économique non linéaire. Monographie EDF non publiée.
- [3] Ph. WOLFE - The reduced Gradient Method, The Rand Corporation, à paraître.
- [4] A. CAUCHY - Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées, C.R. Ac. Sc. Paris 25 (1947) - p. 536-38 .
- [5] M.L. STEIN - Gradient Methods in the solution of systems of Linear Equations National Bureau of Standards, NAML Rep. 52 - 7, July (1951).
- [6] J.B. CROCKETT et H. CHERNOFF - Gradient Methods of Maximization Pac. Journal of Math. 5(1), Mars 1955, p. 33/50.
- [7] A. KORGANOFF - Méthodes de calcul numérique, Dunod, 1961.